ECONOMÍA, POLÍTICA Y OTROS JUEGOS. UNA INTRODUCCIÓN A LOS JUEGOS NO COOPERATIVOS

Paloma Zapata Lillo

Marzo 2006

Índice general

Prólogo I

Introducción V

I Modelos de juegos no cooperativos 1

1. Juegos Rectangulares 3
1.1. Presentación del modelo 3
1.2. Algunas definiciones 6
1.3. Ejemplos 8
1.4. Estrategias puras conservadoras 19
1.5. La paranoia colectiva puede ser solución 22
1.6. Algunos ejemplos infinitos 33
1.7. Ejercicios 37

2. Juegos Extensivos 45
2.1. Sobre el modelo 45
2.2. Alternancia, azar e información. 46
2.3. Gráficas y juegos extensivos 62
2.4. ¿Posición o Historia? 72
2.5. Gráficas Dirigidas y Juegos. 82
2.6. Selección de Equilibrios y Gráficas Dirigidas. 86
2.7. Ejercicios 95

3. Estrategias y Forma Normal 101
3.1. Planteamiento del Problema 101
3.2. Estrategias en Juegos Extensivos 102
3.3. Buenas Estrategias en Información Perfecta 106
3.4. Forma Normal y Equilibrio de Nash 112

3.5. Equilibrios Perfectos en Subjuegos 121
3.6. Inducción hacia atrás en el caso infinito 131
3.6.1. Un principio de equilibrio. 139
3.6.2. El juego con horizonte infinito. 142
3.7. Ejercicios 145

4. Sobre gustos y conocimiento 151
4.1. Justificación del Capítulo 151
4.2. Sobre gustos y utilidad 152
4.3. Sobre Conocimiento 159
4.3.1. Conocimiento Privado. 159
4.3.2. Conocimiento Común. 166
4.4. Racionales y Bayesianos 168
4.5. ¿Y si no se conocen las reglas? 173
4.5.1. Juegos rectangulares bayesianos (o de información incompleta) 174
4.5.2. Juegos extensivos bayesianos 179
4.5.3. Juegos de señalización 179

II Mezclando y Jugando en el largo Plazo 187

5. Estrategias Mixtas 189
5.1. Motivando con el Juego Ficticio 189
5.2. Estrategias Mixtas y Pago Esperado 195
5.3. Respondiendo a perfiles mixtos 199
5.3.1. Una cruz Gamada para los juegos $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ 207
5.3.2. Las curvas de reacción 211
5.4. Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas 216
5.5. Geometría de las Estrategias Mixtas 222
5.5.1. Un Algoritmo de Scarf para Calcular Puntos Fijos . . 227
5.6. Existencia de Equilibrios 236
5.7. Ejercicios 237

6. Comportamiento Conservador 245
6.1. Discusión del Problema 245
6.2. Estrategias Mixtas Conservadoras 246
6.3. Equilibrio de Nash en Juegos Antagónicos 253
6.4. Calculando Estrategias Conservadoras 261
6.5. Ejercicios 277

7. Equilibrios Perfectos en Subjuegos 283
7.1. Planteamiento del Problema 283
7.2. Estrategias de Comportamiento 285
7.3. Juegos de Memoria Perfecta 292
7.3.1. El Surgimiento de una Organización Social 296
7.4. Juegos Repetidos 306
7.4.1. Los Equilibrios de un Conflicto Repetido 307
7.4.2. La Tradición Oral y el Espíritu de Venganza 309
7.4.3. Los Juegos Repetidos en General 312
7.4.4. La Conjetura de Coase para un Monopolio en el Mercado de un bien durable 317
7.5. Inducción hacia atrás en estrategias mixtas 328
7.6. Ejercicios 335

8. Selección de Equilibrios 341
8.1. ¿Y si existe más de un equilibrio? 341
8.2. Selección de Harsanyi 343
8.2.1. La Selección de Equilibrios Propuesta por Nash 343
8.2.2. La Selección de Harsanyi 345
8.2.3. La v-Solución y la t-Solución de Harsanyi 345
8.3. Un enfoque más realista de selección 355
8.4. Digráficas y aprendizaje 357
8.4.1. Dinámica de Aprendizaje en Poblaciones, el Enfoque de Kandori, Mailath y Rob 358
8.4.2. Dinámica de historias de tamaño r. El Enfoque de Young. 366
8.4.3. Errar es de Humanos 370
8.5. Digráficas de aprendizaje en general 372
8.5.1. Digráficas Perturbadas 377
8.5.2. La Digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente 381
8.6. La dinámica como un proceso estocástico 388
8.6.1. Otra vez sobre errores y experimentos 390
8.6.2. Una versión de Young de un teorema de Freidlin y Wentzell sobre procesos de Markov finitos y perturbados. 393
8.7. Ejercicios 396

Bibliografía 399

Prólogo

Este texto es una introdución a la teoría de juegos no cooperativos, la cual se utiliza cada vez más como un instrumento de análisis dentro de las ciencias sociales, particularmente de la economía. Entendemos por juego a un modelo simplificado de un conflicto social en donde cada participante (jugador) tiene un objetivo y para tratar de lograrlo debe tomar una o varias decisiones dentro de un conjunto posible. El resultado que se obtiene en dicho conflicto depende de las decisiones de todos y puede resultar contrario a lo que cada uno deseaba. En un juego no cooperativo, los jugadores pueden comunicarse y acordar la conducta que seguirán, pero no es obligatorio respetar esos acuerdos.

El trabajo está pensado como texto para un curso de la materia de Teoría de Juegos, al nivel de licenciatura, en las carreras de Actuaría, Economía y Matemáticas. En cada una de ellas, sin embargo, habría que hacer distintos énfasis.

A medida que van apareciendo los conceptos, procuramos examinarlos a la luz de ejemplos sencillos. Dividimos el material en dos partes, cada una de ellas con cuatro capítulos. En la primera estudiamos los dos modelos que se trabajan en la teoría de los juegos no cooperativos. Por un lado, el rectangular o estratégico que consta del conjunto de jugadores, de un conjunto de estrategias puras para cada jugador y de una función de pago. Por el otro lado, tenemos al modelo extensivo que incorpora más elementos que el rectangular para estudiar conflictos reales. El extensivo es un modelo menos estático que el rectangular, pues los jugadores tienen que tomar varias decisiones a lo largo del tiempo y, además, pueden aparecer en este modelo, si es necesario, los problemas de falta de información que tengan algunos jugadores, lo mismo que el azar. En esta primera parte, no sólo exponemos los modelos, también nos preguntamos qué se puede decir acerca de los juegos cuando éstos se van a llevar a cabo por una sola ocasión. En el último capítulo de la primera parte, presentamos ciertas ideas de formalización de la teorías de la utilidad y del conocimiento común y privado que tienen los

jugadores.

El texto gira en torno al concepto de solución de los juegos no cooperativos, el equilibrio de Nash, que consiste en un perfil de estrategias, una para jugador, de tal manera que cada uno está maximizando su pago respecto a las elecciones de los demás. Desde las primeras páginas de este trabajo aparece la forma más simple de dicho equilibrio, la de estrategias puras. Sin embargo, no todos los juegos tienen equilibrio de Nash en dichas estrategias. La segunda parte del libro la dedicamos a la combinación de estrategias puras, en particular a lo largo del tiempo. Es decir, ahora los jugadores combinarán sus estrategias puras ya sea en una sola ocasión o al repetirse el juego a lo largo del tiempo. El recurso del cual dispondrán los jugadores para establecer esa combinación de estrategias puras es el concepto de estrategia mixta. Se generalizará mucho de lo que hicimos con estrategias puras, pero ahora tendremos el teorema fundamental de la teoría de los juegos no cooperativos que establece que siempre existen equilibrios de Nash en estrategias mixtas en los juegos finitos. En esta segunda parte, estaremos casi exclusivamente en el contexto del modelo rectangular de un juego, excepto en el capítulo 7 donde combinamos los juegos extensivos con los rectangulares. Estudiamos varios métodos para calcular equilibrios de Nash. Al final del libro, con la ayuda de las gráficas dirigidas y de algunos elementos de procesos estocásticos se pueden estudiar diversas dinámicas de aprendizaje con las que se podría desenvolver la repetición de un juego y poner a prueba el derecho del equilibrio de Nash a llamarse solución y, al mismo tiempo, establecer mecanismos de selección entre los equilibrios del juego.

En la primera y segunda parte se examina, con detenimiento, un tipo especial de conflictos en el cual los jugadores tienen intereses antagónicos. Para ello se constuye un concepto de juego que es una generalización de los juegos bipersonales llamados de "suma cero". Puede decirse que es el más simple que estudia la teoría de juegos y donde el concepto de solución resulta más contundente.

Un tema que también se estudia en las dos partes es el de la posibilidad de descomponer un juego extensivo en pequeños juegos, llamados subjuegos, que forman parte de él. La idea es encontrar una solución del juego completo (equilibrio de Nash), a partir de encontrar las de dichos subjuegos. Esto no sólo facilita la técnica para construir equilibrios de Nash, sino que es una primera forma de seleccionar equilibrios, pues los que se encuentran de esa manera, los equilibrios perfectos en subjuegos, están protegidos contra los errores de todos los jugadores.

La mayor parte del material que presentamos está centrado en los juegos

rectangulares y extensivos finitos, pero introducimos secciones en que se abordan los juegos infinitos.

El texto contiene algunas temáticas que no sería adecuado tratar en un curso básico. Por ejemplo, nos referimos al trabajo formal con juegos infinitos, en particular, el tratamiento con juegos repetidos. Nos referimos, también, a temas que se centran en la formalización de la racionalidad de los jugadores como la exposición de los criterios de selección de Harsanyi o a la formalización de la teoría del conocimiento. Sin embargo, muchos de los ejemplos presentados en esas direcciones y aún los resultados teóricos pueden abrir un panorama interesante, aunque no se trabaje en detalle en ellos. Por otro lado, hay temas que están teniendo una aplicación muy interesante en diversos conflictos sociales y que apenas se tocan, como los juegos de información incompleta o bayesianos. Nos ha parecido que, de haberlo hecho, se hubiera ampliado el texto en forma considerable.

Durante varios semestres, se han utilizado los avances de este texto dentro de los cursos de Teoría de Juegos impartidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM. El texto se ha beneficiado con las críticas y sugerencias, tanto de estudiantes, como de profesores y ayudantes de dichos cursos. Queremos expresar nuestro profundo agradecimiento por dicho apoyo, en especial a la profesora Claudia Villegas.

Dentro del seminario de "Economía Matemática y Teoría de Juegos de la Facultad de Ciencias, UNAM" presentamos varios de los temas que se exponen en el libro y recibimos numerosas y valiosas aportaciones de todos los participantes. A todos ellos les damos las gracias más sinceras.

Mención aparte merece el apoyo que en todos sentidos recibimos del profesor Sergio Hernández Castañeda. Sin él este libro no hubiera sido posible. Sergio no sólo es una presencia importantísima dentro del seminario mencionado, sino que desde que nos iniciamos juntos en el estudio y, posteriormente, en la enseñanza de la Teoría de Juegos, empezamos a desarrollar una parte importante del material que contiene este texto.

Queremos, por último, hacer constar nuestro reconocimiento a los arbitros que revisaron el trabajo por las valiosas sugerencias que hicieron, las cuáles esperamos haber incorporado como ellos deseaban.

Por supuesto, la autora se declara como la única responsable de todos los errores y limitaciones que contenga el texto.

Introducción

"Economía, Política y otros Juegos" es el título que hemos puesto al libro. Quizá parezca extraño ese nombre, ¿cómo calificar de juegos, asuntos tan importantes y que a todos afectan, como son la economía y la política? Hemos querido destacar, con dicho título, un aspecto esencial de los conflictos humanos, sean económicos, políticos o de otra índole, que en los juegos de salón aparece claramente. Nos referimos a que los resultados que se obtienen en los distintos conflictos humanos son producto, como ocurre en dichos juegos, de las decisiones de numerosos individuos que buscan su propio beneficio y construyen, entre todos, algo que posiblemente nadie quería. La Teoría de Juegos busca construir modelos, inspirados en los juegos de salón, para estudiar los conflictos humanos.

Abordar los problemas de la sociedad capitalista, con el enfoque propio de la Teoría de Juegos, es decir, estudiando la "resultante" de las fuerzas con que empujan cada uno de los participantes, corresponde a la concepción filosófica del pensamiento de la economía política clásica, desde la mano invisible de Adam Smith. Corresponde también al pensamiento neoclásico y es un aspecto importante de la concepción de Marx y Engels.

"La historia del desarrollo de la sociedad - dice Federico Engels- difiere substancialmente, en un punto, de la historia del desarrollo de la naturaleza. En ésta, si prescindimos de la acción inversa ejercida a su vez por los hombres sobre la naturaleza, los factores que actúan los unos sobre los otros y en cuyo juego mutuo se impone la ley general, son todos agentes inconscientes y ciegos. En cambio, en la historia de la sociedad, los agentes son todos hombres dotados de conciencia, que actúan movidos por la reflexión o la pasión, persiguiendo determinados fines; aquí nada acaece sin una intención consciente, sin un fin propuesto..." "Los hombres hacen su historia, cualesquiera que sean los rumbos de ésta al perseguir cada cual sus fines propios conscientemente; y la resultante de estas numerosas voluntades, proyectadas en diversas direcciones y de su múltiple influencia sobre el mundo exterior, es precisamente la historia." Y, sobre esta resultante, Engels agrega, poste-

riormente, "... las voluntades que actúan en la historia producen casi siempre resultados muy distintos de los propuestos."

Después de leer esas citas de Engels, cuyo contenido se repite en otras de sus obras lo mismo que en las de Marx y en las de muchos de los pensadores clásicos y neoclásicos, ya no nos parecerá raro que la teoría de juegos tenga mucho que hacer en el campo de las Ciencias Sociales.

Fue John von Neumann el que concibió a la Teoría de Juegos como la matemática ad hoc para estudiar la problemática económica. Él pensaba que el enfoque usual dentro de la teoría de su época no correspondía a la realidad de los conflictos económicos y podríamos agregar que ni a la de los sociales, en general. Este enfoque de la teoría económica situaba a agentes, individuales y aislados, optimizando sus recursos sin tomar en cuenta las posibilidades de acción que tenían los demás individuos; ya que no consideraba que los resultados del conflicto dependían de las acciones de todos los involucrados. Ilustraremos el contraste entre los dos enfoques recurriendo a un ejemplo muy simple.

Pensemos en una empresa M que está a punto de lanzar al mercado un producto, por ejemplo un nuevo software, cuyo precio total es de 1000 000 unidades de dinero y que, para promoverlo, tiene que decidir el sistema de publicidad que le resulta más conveniente de entre tres a los cuales podría recurrir: 1) regalar algunos paquetes en lugares claves y esperar que la noticia de la excelencia del producto se vaya corriendo de boca en boca, 2) usar de medios escritos para hacer publicidad y 3) usar los medios electrónicos de comunicación masiva para hacerlo. Cada uno de los tres tiene distinto costo y logra la venta de distintas cantidades del producto en cada uno de los dos años en que éste se encontrará en el mercado. Suponemos que el producto total se agota en los dos años. En la siguiente tabla, podemos ver las características de cada uno de estos tres métodos.

métodos	costo	ventas 1er año	ventas 2°	ganancias
regalar	200, 000	100,000	900,000	800,000
prensa	400,000	400,000	600,000	600,000
radio y tv	450,000	800,000	200,000	550,000

Si la empresa no tiene interés en vender cuanto antes su producto, entonces es una trivialidad encontrar el método que le permitirá obtener mayor ganancia que, sin lugar a dudas, es el primero. Aunque utilizando una matemática muy sofisticada, muchos problemas de la microeconomía que no usan teoría de juegos tienen en esencia el mismo enfoque que consiste en

maximizar la función objetivo de un agente sujeta a diversas restricciones. Sería mucho más realista el ejemplo anterior, si existiera otra empresa que en el segundo año considerara la conveniencia o no de competir con M quien todo el primer año ha monopolizado el software. Cuál será la ganancia de cada empresa, depende de las acciones de las dos. Si suponemos, por ejemplo, que la segunda empresa tiene que realizar gastos por valor de solamente 200,000 pesos, pues está usando la propaganda ya realizada, y que las dos empresas se repartirán la demanda del segundo año en partes iguales; si, además, pensamos que las empresas tienen que tomar decisiones simultáneamente al inicio del primer año, cada una sin conocer lo que hará la otra, la siguiente matriz registrará los resultados correspondientes a cada pareja de decisiones. La primera coordenada de la entrada ij es la ganancia de M y la segunda coordenada la de C.

	competir en el 2° año	no competir
regalar	(350,000; 250,000)	(800,000; 0)
prensa	(300,000; 100,000)	(600,000; 0)
radio y tv	(450,000; -100,000)	(550,000; 0)

Ahora, ya no es tan sencillo saber cuáles deberían ser las decisiones de la empresa M o las de la empresa C, porque esto depende de las acciones de su respectivo oponente. Si C escoge no entrar a competir, entonces los posibles pagos de M son los mismos que cuando no existía C y, cómo en aquel caso, le conviene regalar algunos productos como método publicitario ganando 800,000 pesos. En cambio, si C elige entrar a competir, la mejor alternativa para M es usar los medios electrónicos para hacerle publicidad al producto ganando 450,000 pesos. Lo mismo es válido para C. Dependiendo de la elección de M, C tendrá una mejor decisión distinta. Por ejemplo, si M elige su primera o su segunda opción, entonces a C le conviene decidirse por entrar a competir. Por el contrario, si M escoge hacer propaganda a través de los medios electrónicos, entonces C no debería entrar a competir. Esta es la situación típica dentro de la Teoría de Juegos.

En general, hablaremos de los resultados de los juegos en términos de eneadas de reales, uno para cada jugador, lo que puede crear la falsa impresión de que el pago que los jugadores reciben es siempre en dinero o en cualquier otra forma fácil de expresar en términos de números reales. La idea no es esa; los pagos o resultados para un jugador pueden ser hechos tan difíciles de medir como el obtener los favores del ser amado o recibir una paliza de su pareja actual. Sin embargo, recurriendo a la llamada teoría de la utilidad se pueden convertir en números reales los diversos pagos de los jugadores.

Von Neumann no es el primero que estudió a los juegos; varios matemáticos anteriores habían estudiado diversos aspectos de estos. Por ejemplo, Emile Borel definió el concepto de estrategia y Zermelo (1913) construyó un método de análisis de un juego que lleva a lo que hoy se llama un equilibrio perfecto en subjuegos. Tampoco es von Numann el primero que establece ideas en torno a la vinculación entre juegos y fenómenos económicos. El matemático francés Agustine Cournot (1838), por ejemplo, sin hablar explícitamente de juegos, tiene un tratamiento del oligopolio propio de la teoría contemporánea y establece un concepto de solución que es una caso particular del equilibrio que definió Nash más de un siglo después. Lo mismo ocurre con Edgeworth (1881) quien para estudiar un mercado con dos agentes y dos mercancías, en el fondo, utilizó el moderno concepto de núcleo de un juego. Sin embargo, el libro de von Neumann y Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior" es un hito histórico porque establece la teoría como una nueva rama de las matemáticas, la apropiada para el análisis de la economía. Dentro de ese libro se trabajan varias direcciones, tanto en los llamados juegos cooperativos, como los no cooperativos.

Los juegos cooperativos tienen un papel normativo, buscan los resultados "equitativos", "justos" que conseguirían agentes "racionales" y "bien informados". Los diversos conceptos de solución que hay en la teoría que los estudia se establecen con conjuntos de axiomas que responden a una forma de entender esas propiedades de racionalidad, justicia y equidad. Los juegos no cooperativos, en cambio, son un marco teórico adecuado para estudiar si hay una "ley" interna en el conflicto que se estudia, y pueden resultar un importante instrumento de análisis en la teoría económica para las distintas corrientes de pensamiento que existen dentro de ella, como las mencionadas teorías clásica, neoclásica y marxista, tanto por la posibilidad de plantear muchos problemas de la sociedad capitalista utilizando los juegos no cooperativos, como por la posibilidad de estudiar problemas de la sociedad en su conjunto. Por ejemplo, el estudio de la formación de las instituciones, de la moral y de las convenciones sociales. Desde luego, también el uso de los juegos ha tenido resultados prácticos importantes en diversas problemáticas, al situarse el analista en el lugar de alguno de los jugadores, o como su consejero, para preguntarse ¿cuál es su forma óptima de jugar?

Íntimamente ligado al desarrollo de la teoría de la clase de los juegos no cooperativos está el matemático norteamericano John Nash quien introdujo el concepto de equilibrio que lleva su nombre y estableció un teorema fundamental de existencia de tales equilibrios. La clave para la división entre los juegos cooperativos y los no coopertivos consiste en que, en los primeros, cada participante, antes de tomar sus decisiones, puede asociarse con los demás

jugadores o con algunos de ellos, para decidir conjuntamente las elecciones de cada uno de los miembros de la coalición que se haya formado, y quizá, si es posible, repartirse el pago que reciba dicha coalición. Estos acuerdos son obligatorios para todos ellos y serán los mejores desde el punto de vista de poseer las propiedades que señalábamos antes. Por el contrario, en los juegos no cooperativos, no existe ese tipo de acuerdos obligatorios a priori. Aquí los jugadores pueden platicar y decidir acciones conjuntas, pero nadie los obligará a respetar lo acordado. Para aclarar un poco más concretamente esta diferencia nos resultará útil un sencillo juego al que se da el nombre del dilema del prisionero Albert W. Tucker, matemático muy conocido por el teorema de optimización no lineal que descubrió conjuntamente con Harold Kuhn inventó ese famoso ejemplo que ha hecho correr tanta tinta.

La historia que se narra en el dilema del prisionero es como sigue: Dos hombres cometen un delito, por ejemplo un asalto a mano armada. Cuando son detenidos, resulta que la policía no puede probar que el asalto fue cometido por los 2 prisioneros, necesita la confesión de alguno de ellos, para lograrlo. Sólo los podrá acusar de portar armas prohibidas si los dos se niegan a confesar. Separando a los dos prisioneros, la policía les plantea, a cada uno de ellos, el dilema expresado en la siguiente matriz:

	confesar	no confesar
confesar	(10 años, 10 años)	(libre, 20 años)
no confesar	(20 año, libre)	(2 años, 2 años)

Supongamos que antes de ser aprehendidos, sintiéndose cercados, los dos hombres deciden actuar coordinadamente y escoger alguna de las parejas de acciones posibles. ¿Cuál será esa pareja? ¿Cumplirán lo acordado? No cabe duda de que podríamos abordar la situación con dos enfoques distintos; correspondiendo a cada uno un concepto de solución del juego. El primero consiste en suponer que existe una fuerza exterior capaz de hacer cumplir el acuerdo. Por ejemplo, una banda a la que pertenecieran ambos y cuyo principio moral fundamental, siempre cumplido, fuera que los traidores que violan los acuerdos morirán. Es obvio que la "solución" de ese juego, es decir el acuerdo al que llegarían los jugadores, sería que ninguno de ellos confesaría, y ambos lo cumplirían, pues estarían seguros de la acción del otro. Entonces cada uno pasaría dos años en la cárcel. En el segundo enfoque, los participantes tienen la libertad de violar los acuerdos sin recibir castigo alguno. Seguramente, en este caso, los dos hombres llegarían al acuerdo de que ninguno confesaría y quizá jurarían con sangre que nada en el mundo haría que violasen ese acuerdo. Pero es fácil darse cuenta de que a la hora de la verdad los dos lo traicionarían. El primer enfoque es el de los juegos

cooperativos, el segundo el de los juegos no cooperativos. Es decir, en el primero, es como si los jugadores firmaran un contrato ante una autoridad externa que obliga a su cumplimiento, so pena de algún castigo que está implícito en el modelo. En el segundo, no existe nada externo al conflicto y nadie está obligado a cumplir ningún acuerdo previo.

En el dilema del prisionero, con el enfoque no cooperativo, la pareja de acciones (confesar, confesar) es la "ley" del juego. Dicha pareja es lo que se llama un equilibrio de Nash del juego. Cada uno de estos equilibrios se puede pensar como un acuerdo entre todos los jugadores para decidir lo que elegirá cada uno de ellos, con la propiedad adicional de que si el jugador j abandona el acuerdo, mientras los demás lo respetan, no logrará j mejorar su pago. Sobre este concepto ha girado todo el desarrollo posterior a Nash de los juegos no cooperativos. Por ejemplo, John Harsanyi y Reinhard Selten realizaron un enorme trabajo sobre criterios de selección de los equilibrios de Nash. Establecieron entre otros conceptos ligados a estos criterios, el de equilibrio dominante por riesgo, el de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos y los de equilibrios bayesianos y de bayesiano perfecto.

Como un reconocimiento a las sólidas piedras que pusieron para el desarrollo de la teoría de juegos y con éste del de la economía, Nash, Harsanyi y Selten recibieron conjuntamente el Premio Nobel de economía en 1994.

Hemos insistido en que la teoría de juegos no cooperativos pretende prescindir de fuertes supuestos de racionalidad y, sin embargo, los equilibrios de Nash los necesitan, sobre todo en lo referente al conocimiento que deben poseer los jugadores, lo que podría quitarle realidad e interés al concepto. Este problema desaparece, en distintos tratamientos modernos, en particular en el de los juegos evolutivos, en los cuáles un mismo conflicto es enfrentado repetidamente por grandes poblaciones, cuyos miembros están llenos de limitaciones, miopías, inercias y cometen errores. Se establecen relaciones entre los patrones de conducta recurrentes o estables de estos procesos y los equilibrios de Nash. Es interesante mencionar que este tratamiento de los juegos evolutivos se inició con los trabajos del biólogo Maynard Smith para elaborar modelos sobre la evolución de las especies. Desde la biología, estos juegos pasaron a ser un interesante instrumento de análisis de la problemática social, por ejemplo, del establecimiento de convenciones, instituciones, concepciones éticas, etc.

Hoy parecieran empezar a comprobarse las previsiones de von Neumann, en el sentido de que la teoría de juegos sería la matemática apropiada para el análisis económico (político, social, etc.) Proliferan los libros de teoría económica en donde el instrumento de análisis es la teoría de juegos y hay una enorme cantidad de libros con aplicaciones de los juegos a prob-

lemas económicos, políticos y sociales. Pero esto no fue tan inmediato como se hubiera supuesto en los fructíferos años que siguieron a la aparición de "Theory of Games and Economic Behavior" en 1944. En la década de los 50 y los primeros de la de los 60 del siglo pasado se sentaron las bases para la fundamentación de la teoría, se señalaron las rutas más importantes para el desarrollo de su investigación y se escribieron libros que son ya los clásicos del campo como el de Thomas Schelling "The Strategy of Conflict" o el de Duncan Luce y Howard Raiffa "Games and Decisions". Muchos de los más reconocidos teóricos de los juegos empezaron a trabajar en esas décadas. Además de los ya mencionados, von Neumann, Nash, Harsanyi, Selten, Shelling, Luce y Raiffa, están nombres de la talla de Harold Kuhn, Robert Aumann, Lloyd Shapley, David Gale, Martin Shubik , Gerard Debreu y Herbert Scarf entre muchos otros.

Los años finales de los 60 y la década de los 70 fueron, en cierto modo, decepcionantes. Aunque no estuvieron exentos de resultados muy importantes, pareció que la teoría de juegos no cumplía todas las expectativas que había despertado pues no daba muchos frutos para el análisis teórico y práctico de los problemas sociales. Desde nuestro muy personal punto de vista, sin lugar a dudas parcial, esto se debió a que los teóricos se centraron casi exclusivamente en los juegos cooperativos que no resultan, también según nuestra opinión, tan adecuados para estudiar las leyes que rigen los fenómenos sociales. Desde mediados de los 80, la teoría ha retomado ampliamente a los juegos no cooperativos y se ha fortalecido su influencia en las ciencias sociales, particularmente en la economía. Los premios Nobel de economía otorgados a Nash, Harsanyi y Selten en 1994 y a Schelling y Aumann en 2005 son un reconocimiento de esta potencia. Uno de los teóricos actuales más interesantes, Ken Binmore, notable no sólo por su trabajo en la teoría de juegos misma, sino por su trabajo filosófico sobre ella, asegura que la teoría económica moderna y la teoría de juegos son una y la misma cosa.

Este texto está dedicado a los juegos no cooperativos y el equilibrio de Nash es su protagonista principal. Vamos teniendo, a lo largo del libro, distintos acercamientos a él, lo estudiamos desde varios puntos de vista: cuando los jugadores sólo juegan una vez y se tienen que limitar a las llamadas estrategias puras, cuando pueden combinar dichas estrategias, cuándo el juego se repite a lo largo del tiempo, etc. Nos preguntamos, por ejemplo, si personas con muchas limitaciones de racionalidad e información que están aprendiendo a comportarse dentro de un conflicto, usando su propia experiencia, llegaran necesariamente a un equilibrio de Nash. En caso afirmativo, ¿a cuál de ellos? Y la sociedad en su conjunto, ¿juega en equilibrios de Nash? A través de muchos ejemplos, inspirados y adaptados de textos cuyas

referencias se pueden encontrar en la bibliografía, queremos hacer sentir la fuerza de los juegos no cooperativos y del equilibrio de Nash para ayudar a entender los conflictos humanos de la más diversa índole.

Parte I

Modelos de juegos no cooperativos

Capítulo 1

Juegos Rectangulares

1.1. Presentación del modelo

Existen dos tipos de modelos para los juegos no cooperativos, el de los llamados juegos rectangulares o estratégicos y el de los juegos extensivos. En este capítulo nos referiremos al primero. Los juegos rectangulares o estratégicos resultan más fáciles de definir que los extensivos, pero hacer un modelo de este tipo sobre un conflicto real es más difícil que hacer uno extensivo. Los ejemplos que aparecieron en la introducción, el dilema del prisionero y la competencia potencial entre dos empresas, son modelos rectangulares o estratégicos.

Para establecer uno de estos modelos rectangulares para un conflicto dado, tenemos que determinar quiénes son los principales protagonistas en éste, qué objetivos persiguen ellos, cuál es el conjunto de decisiones que tiene cada uno y, finalmente, qué resultado se obtendrá después de que cada uno, en forma simultánea, ha escogido una de sus posibles decisiones. Todo esto, si el conflicto es suficientemente complicado, no es tarea fácil.

Supongamos que pretendemos estudiar la segunda guerra mundial, a través de la teoría de juegos, y que queremos establecer un modelo rectangular de ella. Designar, por ejemplo, a los jugadores resulta sumamente difícil. Quizás, podríamos llegar a la conclusión de que para modelar los rasgos esenciales del desarrollo de la guerra, sería suficiente considerar sólo a los gobiernos de las potencias mundiales, o a los bloques que establecieron entre ellos. Pero no cabe duda que también fue importante, para entender lo que ocurrió, la elección que tomaron los gobiernos de los países invadidos, si colaboraron o no con el invasor alemán, o la decisión de millones de personas de organizar la resistencia contra los ocupantes. Todavía más

complicadas son preguntas como ¿cuáles conjuntos de decisiones contienen todas las posibilidades de acción que tuvieron los "jugadores" durante esos cinco años? o ¿cómo formalizar, a través de funciones de pago, los resultados que hubieran provocado las diversas decisiones cruzadas?

Hemos elegido un ejemplo demasiado complicado; en general, los problemas abordados no lo son tanto.

Presentemos el sencillo modelo matemático que expusimos en *Miscelánea Matemática*, en el artículo ¿Convenir para jugar o jugar para convenir? [58], sobre el espinoso conflicto entre los hombres y las mujeres, para empezar a discutir el problema.

Existe un famoso ejemplo de la teoría de juegos que lleva el sonoro nombre de **La Batalla de los Sexos**, lo que provoca frustraciones de todo el que lo aborda, tanto si piensa que se le presentará un tratamiento sobre la liberación femenina, como si le emociona enfrentarse a un modelo matemático de alguna sección del Kamasutra. Y en lugar de esos temas o de algún otro, igual de apasionante, se encuentra con la historia de un matrimonio que tiene un grave conflicto, pues a ella le gusta el ballet, mientras que él prefiere el box, por lo demás todo es simétrico y equitativo entre ellos. Tratemos nosotros de abordar una situación más cercana a nuestra idiosincrasia, pero pensemos en que nos encontramos en el México de los años 40 o 50 del siglo XX, así evitaremos herir alguna susceptibilidad.

Simplificando enormemente, podemos decretar que un hombre de esa época sólo tenía dos pautas de conducta, entre las que **podría elegir** en cada ocasión que tuviera que enfrentarse a una mujer, según pensara que le convendría una u otra. La primera de estas pautas de conducta o estrategias sería la representada por nuestro llorado Pedro Infante, en casi cualquiera de sus personajes, Pepe el Toro por ejemplo, macho entre los machos, nadie como él para enamorar a las mujeres. La segunda, la de un hombre comprensivo y cooperador, conducta poco respetada, nos referimos a aquella época ¡claro está!, por ello, nos cuesta trabajo encontrar un galán de la talla de Pedro Infante para representarla y tendremos que conformarnos con una caricatura como la de Don Regino, el de la *Familia Burrón* de Gabriel Vargas. Es decir, cada vez que un hombre entraba en conflicto con una mujer tenía que elegir la estrategia de actuar como un Pedro Infante o como un Regino Burrón

Como es lógico, las conductas o estrategias que cada mujer podía decidir seguir, cuando se iba a relacionar con un hombre, se tipifican con las contrapartes. Así una mujer podría decidir que le convenía comportarse como una sufrida mujer mexicana, al estilo de La Chorreada (Blanca Estela Pavón) o

podría decidir actuar en forma "argüendera" y rebelde como doña Borola Burrón.

Para saber cuál es la bondad de cada estrategia, relativa a la usada por el contrario, en el conflicto en que estarían envueltos un hombre y una mujer de aquellos años, tendríamos que conocer las "utilidades" que él y ella recibirían con los resultados provocados por la elección de cada pareja de estrategias, una del hombre y otra la de la mujer. ¿Cómo les iría a uno que hubiera escogido comportarse como Pepe el Toro y a una que eligió actuar como Borola, al enfrentarse? Él pasaría más de un coraje, mientras ella sacaría algunos huesos rotos, seguramente en más de una ocasión, cada uno de ellos, habría pensado en cambiar de estrategia. A los que hubieran elegido conductas como la de Pepe y su Chorreada, les habría ido de película, él siempre cantando y de buen humor, para ella llantos y celos, pero que cosa no compensaba aquello de "Amorcito Corazón, yo tengo tentación...", en esos momentos no se cambiaría por nadie. Si a uno que quiso hacerla de don Regino le hubiera tocado una que actuara de Chorreada, no cabe duda que sería más feliz que con la Borola, pero el gusanito de que las cosas le saldrían aún mejor al imitar a Pedro Infante acabaría por vencerlo, mientras que a la aspirante a Chorreada, después de suspirar frente a las escenas románticas de las películas de su ídolo, llegaría a la conclusión de que cambiando de estrategia, tendría la gran compensación de ser ella quien "llevara los pantalones". Por último, si alguna se decidió por hacer su santa voluntad como doña Borola y le tocase en suerte alguien decidido a ser tan paciente como Job o como Don Regino, ella podría hacer y deshacer a su antojo, mientras él pensaría que mejor no menearle. Pongamos números que desde nuestro punto de vista reflejan la "utilidad" que recibirían los dos contrincantes (hombre y mujer) en las diversas situaciones resultantes y, si al lector no le satisfacen, puede probar con otros.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B & Ch \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-10) & (5,2) \\ (0,5) & (1,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

En el "modelo" anterior estamos representando a las estrategias Pedro Infante, Regino, Borola y Chorreada como P, R, B y Ch, respectivamente.

Ahora, estamos en condiciones para describir cuáles parejas de estrategias son patrones de conducta estables, en este conflicto. Ese tipo de cuestiones se abordarán en las secciones de este capítulo y en todo el libro.

En una gran cantidad de conflictos, económicos, políticos, militares, etc., "los jugadores" tienen que tomar muchas decisiones a lo largo del tiempo.

Algunas situaciones a las que se tendrán que enfrentar son de tipo azaroso, no hay más que pensar en los numerosos juegos de salón, en que esto ocurre. Además, los participantes, al tener que tomar decisiones, pueden no tener información sobre cuál es exactamente la situación en la que se encuentran. Los modelos rectangulares dan pocos elementos para abordar todo esto, contaremos, para ello, con los modelos extensivos que nos proveen con más elementos, por ello son un mejor puente con la realidad. Los modelos rectangulares o estratégicos son, en cambio, más adecuados para definir los conceptos de solución, es en ellos, donde aparece el equilibrio de Nash.

En este capítulo introduciremos las definiciones de juego rectangular o estratégico y de equilibrio de Nash en estrategias puras, daremos varios ejemplos y estudiaremos un tipo de estrategias, que llamamos conservadoras, en las que cada jugador se imagina que está solo contra el mundo. Por el momento, únicamente trataremos las llamadas estrategias puras, con las que sólo podemos hablar de una única decisión o "tirada" para cada jugador; en el capítulo 5, aparecerán las estrategias mixtas, con las que es posible abordar la combinación de estrategias y la repetición del conflicto a lo largo del tiempo.

1.2. Algunas definiciones

Hemos discutido en que consiste el modelo rectangular y en la introducción presentamos dos ejemplos de este modelo y hablamos un poco del equilibrio de Nash, pasemos, ahora, a las definiciones y posteriormente presentaremos varios ejemplos más.

Definición 1.2.1. Un juego rectangular consta de un conjunto N, de una colección de conjuntos D_j, uno para cada j en N, y de una colección de funciones φ_j, una para cada j en N, donde $\varphi_j : \prod_{j \in N} D_j \to R$.

A N le llamaremos el **conjunto de jugadores**, a cada D_j el **conjunto de estrategias puras** del jugador j y a φ_j la f**unción de pago** del jugador j. $(N, \{D_j\}_{j \in N}, \{\varphi_j\}_{j \in N})$ denotará el juego que tiene el conjunto de jugadores N, los conjuntos de estrategias puras D_j y la funciones de pago φ_j. Usaremos la letra D para denotar al producto cartesiano $\prod_{j \in N} D_j$ (igual a $D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$ si N es finito y tiene n elementos). A los elementos de D les llamaremos **perfiles de estrategias puras**.

Definición 1.2.2. Si N y los conjuntos D_j son finitos, se dice que el juego es finito.

La mayor parte de este texto trata sobre juegos finitos y siempre considera que N es finito. Frecuentemente tendremos que examinar lo que ocurre con el pago de un jugador j, cuando habiendo escogido todas las estrategias puras correspondientes a algún perfil de estrategias puras $\overline{\sigma} = \left(\overline{\sigma}^1, \overline{\sigma}^2, ..., \overline{\sigma}^j, ..., \overline{\sigma}^n\right)$, j decide cambiar su estrategia, mientras los demás continúan con las estrategias que describen el perfil $\overline{\sigma}$. Por ello resultará útil la notación

$$\left(\overline{\sigma}\left|\sigma^j\right.\right) = \left(\overline{\sigma}^1, \overline{\sigma}^2, ..., \overline{\sigma}^{j-1}, \sigma^j, \overline{\sigma}^{j+1}, ..., \overline{\sigma}^n\right)$$

En muchos libros, para dicho perfil, se utiliza la notación $\left(\sigma^j, \overline{\sigma}^{-j}\right)$ en vez de $\left(\overline{\sigma}\left|\sigma^j\right.\right)$.

Definición 1.2.3. Se dice que σ^* en D es un equilibrio de Nash en estrategias puras (ep), si para cada jugador j en N se cumple:

$$\varphi_j\left(\sigma^*\right) \geq \varphi_j\left(\sigma^*\left|\sigma^j\right.\right) \ \textit{para toda } \sigma^j \textit{ en } D_j.$$

Si la desigualdad es estricta, se dice que σ^* es un equilibrio estricto, es decir, sí para cada j en N, $\varphi_j\left(\sigma^*\right) > \varphi_j\left(\sigma^*\left|\sigma^j\right.\right)$ para toda σ^j en D_j.

Definición 1.2.4. Dado un perfil de estrategias $\widehat{\sigma}$ en D, decimos que $\widetilde{\sigma}^j$ en D_j es una mejor respuesta del jugador j a $\widehat{\sigma}$, si

$$\varphi_j\left(\widehat{\sigma}\left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) \geq \varphi_j\left(\widehat{\sigma}\left|\sigma^j\right.\right) \ \textit{para toda } \sigma^j \textit{ en } D_j.$$

Además, decimos que $\widetilde{\sigma}^j \in D_j$ es una mejor respuesta estricta de j a $\widehat{\sigma}$, si

$$\varphi_j\left(\widehat{\sigma}\left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) \geq \varphi_j\left(\widehat{\sigma}\left|\sigma^j\right.\right), \textit{ para toda } \sigma^j \textit{ en } D_j, \text{ y } \varphi_j\left(\widehat{\sigma}\left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) > \varphi_j\left(\widehat{\sigma}\right)$$

Es claro que σ^* es un equilibrio de Nash (ep) si y sólo si σ^{*j} es una mejor respuesta de j a σ^* para toda $j \in N$.

Para los juegos bipersonales finitos resulta conveniente representar al juego con una matriz, a cada uno de sus renglones asignarle una de las estrategias del jugador 1, a cada una de las columnas una del jugador 2 y el término de la matriz correspondiente al renglón i y a la columna j será el vector $(\varphi_1(i,j), \varphi_2(i,j))$. De hecho, podemos hablar de dos matrices de pago, la del jugador 1, $(\varphi_1(i,j))$ y la del jugador 2, $(\varphi_2(i,j))$, por eso, también se llaman juegos bimatriciales. En esta forma fueron presentados los ejemplos

de juegos rectangulares en la introducción. Es de esta representación de donde el modelo adquiere el nombre de juego rectangular.

Las secciones 1.3, 1.4 y 1.5 se dedicarán a juegos rectangulares finitos, en la sección 1.6 introduciremos algunos ejemplos infinitos.

Decimos que un juego es de suma cero si $\sum_{j \in N} \varphi_j(\sigma) = 0$ para toda $\sigma \in D$. Los juegos bipersonales de suma cero son los juegos más sencillos de analizar.

Definición 1.2.5. Si $\widehat{\sigma}^j$ y $\overline{\sigma}^j$ son dos estrategias puras tales que

$$\varphi_j\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq \varphi_j\left(\sigma \left| \overline{\sigma}^j\right.\right) \quad \text{para toda } \sigma \text{ en } D,$$

se dice que $\overline{\sigma}^j$ está dominada debilmente por $\widehat{\sigma}^j$ (o que $\widehat{\sigma}^j$ domina debilmente a $\overline{\sigma}^j$). $\overline{\sigma}^j$ es una estrategia no dominada, si no está dominada por ninguna $\widehat{\sigma}^j$ en D_j. Se dice que $\widehat{\sigma}^j$ domina estrictamente a $\overline{\sigma}^j$ si

$$\begin{array}{rcl} \varphi_j\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right) & \geq & \varphi_j\left(\sigma \left| \overline{\sigma}^j\right.\right) \quad \text{para toda } \sigma \text{ en } D \text{ y existe } \widetilde{\sigma} \text{ en } D \\ \varphi_j\left(\widetilde{\sigma} \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right) & > & \varphi_j\left(\widetilde{\sigma} \left| \overline{\sigma}^j\right.\right). \end{array}$$

1.3. Ejemplos

Juegos bipersonales de suma cero

Ejemplo 1.3.1. a) "En febrero de 1943, el general George Churchill Kenney, comandante en jefe de las fuerzas aéreas aliadas en el sur del Pacífico, tuvo que enfrentarse al siguiente problema. Los japoneses estaban intentando reforzar su ejército en Nueva Guinea, y para ello tenían que decidirse por transportar sus fuerzas por dos rutas alternativas. Podían navegar o bien al norte de Nueva Bretaña, donde el tiempo era lluvioso, o por el sur de la misma, en el que el tiempo era generalmente bueno. En cualquiera de ambos casos el viaje duraba tres días. El general Kenney tenía que decidir dónde debía concentrar el grueso de sus aviones de reconocimiento. Los japoneses, por su parte, deseaban que su flota estuviese expuesta el menor tiempo posible al bombardeo de sus enemigos. El general Kenney, por supuesto, deseaba lo contrario." (Ejemplo del libro de Morton D. Davis "Introducción a la Teoría de Juegos" [13].

La matriz de pago es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & JAPONESES \\ & & \begin{array}{cc} norte & sur \end{array} \\ ALIADOS & \begin{array}{c} norte \\ sur \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-2) & (2,-2) \\ (1,-1) & (3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Las palabras *norte* y *sur* que etiquetan los renglones significan concentrar el grueso de los aviones aliados en el norte y en el sur, respectivamente, análogamente para las columnas significan las rutas norte y sur para los barcos japoneses. Las primeras coordenadas de los vectores en los términos de la matriz son los pagos para el jugador que representa a los aliados. Estos pagos expresan el número de días que dicho jugador podrá bombardear a los japoneses, si los jugadores, aliados y japoneses, escogen las estrategias renglón y columna que corresponden. Del mismo modo, las segundas coordenadas negativas son el pago para el jugador que representa a los japoneses, el valor absoluto de ellas significa el número de días en que los japoneses serán bombardeados cuando se eligió la pareja de estrategias en cuestión.

El único equilibrio de Nash de este ejemplo es la pareja (*norte,norte*), que no es un equilibrio estricto.

Juegos como éste, bipersonales de suma cero y con equilibrio de Nash en estrategias puras, son los más sencillos. No todos los juegos bipersonales de suma cero tienen equilibrio de Nash en estrategias puras. Éste es el caso del juego que llamaremos del "volado", ejemplo 1.3.2, aunque en este juego, un jugador y no el azar elige la posición de la moneda.

Ejemplo 1.3.2. Dos amigos quieren decidir a quien le toca ir a comprar los cigarros. El primero saca una moneda y la coloca sobre la mesa cubriéndola con la mano, le pide a su compañero que adivine cuál es la posición en que la puso, ¿el águila hacia arriba o el sol? Si es descubierto, tendrá que ir él mismo a la compra, pero si no, le tocará al segundo amigo. La matriz de pago es

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \acute{a}guila & sol \end{array} \\ \begin{array}{c} \acute{a}guila \\ sol \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Es fácil observar que este juego no tiene equilibrio de Nash (ep).

En los juegos bipersonales de suma cero, basta trabajar con la función φ_1, función de pago del jugador 1, pues $\varphi_1 = -\varphi_2$, llamemos φ a φ_1. Para

caracterizar los juegos bipersonales de suma cero que tienen equilibrios de Nash (ep) definimos el concepto de punto silla de una función.

Definición 1.3.1. Sean D_1 y D_2 dos conjuntos y f una función de valor real, definida en $D_1 \times D_2$. Decimos que (x^*, y^*) en $D_1 \times D_2$ es un punto silla de f si se cumple que:

$$f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \text{ para toda } x \text{ en } D_1 \text{ y para toda y en } D_2.$$

Interpretación: En un juego bipersonal de suma cero, mientras el jugador 1 tratará de maximizar su función de pago, el jugador tratará de minimizar dicha función.

Dada una matriz B con m renglones, n columnas y entradas reales, decimos que la pareja (i^*, j^*) es un punto silla de la matriz B si $b_{i^*j^*}$ es el término menor de su renglón y el mayor de su columna. Es decir,

$$b_{ij^*} \leq b_{i^*j^*} \leq b_{i^*j} \text{ para toda pareja } (i, j)\text{, con } i = 1, ..., m \text{ y } j = 1, ..., n.$$

Por ejemplo, podemos pensar en la matriz B como una función f definida en

$$\{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \text{ como } f(i, b) = b_{ij}.$$

La pareja (*norte,norte*) es un punto silla de la matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{norte} & \textit{sur} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{norte} \\ \textit{sur} \end{array} & \begin{pmatrix} (2) & (2) \\ (1) & (3) \end{pmatrix} \end{array},$$

mientras que la matriz de pago del jugador 1 en el ejemplo del "volado" no tiene punto silla.

Proposición 1.3.2. *Dado $(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi)$, un juego bipersonal de suma cero (i^*, j^*) es un equilibrio de Nash (ep) si y sólo si es un punto silla de φ. Es decir (i^*, j^*) es equilibrio de Nash si y sólo si es punto silla de la matriz de pago del jugador 1.*

Demostración. (i^*, j^*) es un equilibrio de Nash (ep) si y sólo si:

1. $\varphi(i^*, j^*) \geq \varphi(i, j^*)$ para toda i en D_1 y
2. $-\varphi(i^*, j^*) \geq -\varphi(i^*, j)$ para toda j en D_2.

La desigualdad 1 es, directamente, una de las desigualdades que se tiene que cumplir para que (i^*, j^*) sea punto silla de φ. La segunda es equivalente a $\varphi(i^*, j^*) \leq \varphi(i^*, j)$, para toda j en D_2 que es la segunda desigualdad punto silla. ∎

Juegos Simétricos 2×2

Los juegos simétricos son aquellos para los que los jugadores pueden cambiar sus papeles unos por otros. Los más sencillos de todos son los de dos jugadores, cada uno con dos estrategias, su matriz de pagos es de la forma:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (d,d) & (e,f) \\ (f,e) & (g,g) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si suponemos que $d \neq f$ y $e \neq g$, todos los equilibrios de Nash (ep) son estrictos y tenemos tres casos:

i) $(d-f)(g-e) < 0$. Tendríamos dos subcasos. En el primero, $d > f$ y $e > g$, entonces $(1,1)$ es el único equilibrio de Nash (ep) del juego. En el segundo, $f > d$ y $g > e$, entonces $(2,2)$ es el único equilibrio de Nash (ep).

ii) $(d-f)(g-e) > 0$ y, además, $d > f$ y $g > e$, entonces el juego tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras, $(1,1)$ y $(2,2)$.

iii) $(d-f)(g-e) > 0$ y, además, $d < f$ y $g < e$, también el juego tiene dos equilibrios en estrategias puras que son $(1,2)$ y $(2,1)$.

En estos juegos es frecuente interpretar una de las estrategias como agresiva (halcón) o egoísta, y a la otra como conciliadora (paloma) o solidaria. Demos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.3.3. a) Otro ejemplo tipo dilema del prisionero. Dos empresas, $N = \{E_1, E_2\}$, fabricantes de aparatos electrodomésticos han competido por el mercado de esos productos durante varios años. Ambas han considerado siempre el mismo conjunto de opciones para cada uno de sus productos, a saber,

$$D_j = \{caro\ y\ durable\ (calidad), barato\ y\ desechable\ \ (baratija)\}\,.$$

Supongamos que la matriz de pago siguiente expresa la "experiencia de ganancias promedio".

$$\begin{array}{c} \\ calidad \\ baratija \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} calidad & baratija \end{array} \\ \begin{pmatrix} (100,100) & (10,200) \\ (200,10) & (50,50) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso, $(baratija, baratija)$ es el único equilibrio de Nash del juego. Este juego simétrico es del tipo i.

b) Dos países petroleros tienen la opción de ponerse de acuerdo para reducir su plataforma de producción (*reducir*) ó mantener una alta producción (*no* re*ducir*). Si los dos deciden reducir la cantidad de petróleo que producen, entonces el precio del hidrocarburo subirá, beneficiándolos a ambos. Si, por el contrario, los dos permanecen con la misma producción, seguirá la tendencia a la baja del precio. También puede ocurrir que uno de ellos reduzca su producción y el otro no, entonces, el precio se estacará y el que no ha bajado la cantidad tendrá mayores beneficios. En la siguiente matriz se asignan pagos a los jugadores para expresar lo relatado anteriormente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{reducir} & \textit{no reducir} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{reducir} \\ \textit{no reducir} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este ejemplo del tipo ii, los equilibrios de Nash en estrategias puras son (*reducir*, *reducir*) y (*no* reducir, *no* reducir). A este tipo de juegos se les llama juegos de coordinación. En este juego específico, el primer equilibrio tiene la ventaja de que otorga, a cada uno, una mayor ganancia, pero la desventaja de que ambos países arriesgan obtener un pago muy malo si el otro país no reduce su producción.

c) Dos hombres que viven en el mismo edificio salen todos los días, de sus respectivos hogares, a la misma hora y los dos con una gran prisa, pues están a punto de llegar tarde a trabajar. Ambos tienen que sacar el coche del garaje común y no pueden hacerlo simultáneamente. Así, que cada día tienen que decidir si prefieren aguantar las ironías y reconvenciones de sus jefes, por llegar tarde a la oficina debido a sus cortesías con el vecino, o sufrir las maldiciones de dicho vecino si tratan de salir por delante, a como de lugar. Si los dos adoptan esa actitud descortés habrá una reyerta segura que significa mayor pérdida de tiempo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{cortés} & \textit{descortés} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{cortés} \\ \textit{descortés} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso, los equilibrios de Nash en estrategias puras son:

$$(\textit{cortés}, \textit{descortés}) \text{ y}$$
$$(\textit{descortés}, \textit{cortés}).$$

Este es un ejemplo de tipo iii. A cada uno de los dos jugadores le conviene uno de los equilibrios y no existen equilibrios en estrategias puras que

sean simétricos como en los otros dos casos. En juegos análogos, pero no simétricos, por ejemplo, el conflicto entre el hombre y la mujer que apareció en la sección 1.1, ocurre lo mismo. Pero, en el caso de los vecinos, ambos jugadores tienen igual peso, por lo que no hay criterio para pensar que a la larga se impondrá uno u otro. En cambio, es natural esperar que el equilibrio que le conviene al hombre es el que se impondrá como costumbre.

Otros Ejemplos Bipersonales que no son 2×2.

Ejemplo 1.3.4. El juego de las empresas que apareció en la introducción.

$$\begin{array}{c} \\ \textit{regalar muestras} \\ \textit{publicidad escrita} \\ \textit{publicidad en radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{entrar} & \textit{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (45,-10) & (55,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

El juego no tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.

Ejemplo 1.3.5. El baile de Shapley

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) & (1,2) & (-1,-1) \\ (1,2) & (2,1) & (0,0) & (-1,-1) \\ (0,0) & (1,2) & (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Éste juego tiene un único equilibrio de Nash que es (d,d) y no es estricto. La característica de este juego radica en que si los jugadores eligen un perfil que no es (d,d) y consideramos un proceso en el que, en cada paso, se permite a uno sólo de los jugadores cambiar su estrategia por otra que optimice su pago, se produce un ciclo que Shapley apreció como un baile.

Juegos n-Personales

Hasta el momento, sólo hemos mostrado ejemplos bipersonales, ahora revisemos algunos ejemplos de más jugadores.

Ejemplo 1.3.6 (El ligue de Nash (un problema machista)). ¿Recuerdan la película Mente brillante? En una parte de ésta, aparece Nash, con otros tres estudiantes amigos suyos, sentados en la mesa de un bar. En otra mesa cercana, se encuentran cinco bellas chicas, entre ellas una

Rubia "espectacular" que tiene el defecto de ser muy acaparadora. Cada estudiante quiere ligar a una chica, aunque todos prefieren a la rubia. El comportamiento de cada chica, diferente de la Rubia, consiste en que, si varios de los estudiantes le piden salir con alguno de ellos, realizará una rifa para elegir al galán. En cambio, la Rubia sólo hará una rifa, si los 4 estudiantes le piden salir, si sus pretendientes son menos que 4, rechazará a todos.

Los jugadores son los estudiantes, las chicas son los premios, la rubia es el premio mayor. Tenemos el juego siguiente: $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, donde $N = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, $D_j = \{Rubia, ch_1, ch_2, ch_3, ch_4\}$

Si para $i \in D_j$, n_i es el número de estudiantes que eligieron a la chica i, la función de pago del jugador j se expresa con la función φ_j tal que $\forall \sigma \in D$,

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 1/n_{ch_k} & \text{si } \sigma^j = ch_k \\ 0 & \text{si } \sigma^j = Rubia \text{ y } n_{Rubia} < 4 \\ 1/2 & \text{si } \sigma^j = Rubia \text{ y } n_{Rubia} = 4 \end{cases}$$

En la película, uno de los estudiantes afirma que Adam Smith les aconsejaría que todos fueran a tratar de ligarse a la Rubia porque los mejores resultados se obtienen con la libre competencia. Nash contrapone la idea de que cada uno de ellos elija a una chicas diferente y que no sea la rubia. Los Equilibrios de Nash del juego son precisamente los perfiles recomendados por éste, según la película.

Dilemas del Prisionero n-Personales

G. Hardin en su artículo "The tragedy of the Commons" de 1968 [24] generalizó, para cualquier número de jugadores, el dilema del prisionero de Tucker. Esta generalización ha sido muy importante, tanto en la motivación del desarrollo de la teoría, como para modelar y analizar verdaderas tragedias que provocamos los humanos en nuestro pobre mundo.

Esta clase de conflictos son omnipresentes en la sociedad en que vivimos y se caracterizan porque, en ellos, cada jugador tiene dos estrategias, llamémoslas, por el momento, Egoísta y Solidaria. La estrategia Egoísta es dominante estrictamente, es decir, para cada perfil de estrategias σ, el jugador j obtendrá un pago mayor con en el perfil $(\sigma \mid \textit{Egoísta})$ y, sin embargo, el pago obtenido por cada jugador cuando todos escogen Egoísta es menor que cuando todos escogen Solidario.

Es en este dilema donde se enfrentan, más claramente, las concepciones clásicas de la sociedad de Adam Smith y también de los neoclásicos y la de los juegos no cooperativos. Ambas concepciones consideran a la sociedad como una suma de individuos egoístas buscando su propio interés, sin preocuparse del bien común y, cuando llegan a construirlo, sería una resultante no buscada de las decisiones egoístas.

Sin embargo, en los juegos no cooperativos la resultante de las aciones colectivas puede construir la desgracia común, cosa que no podían concebir los clásicos ni lo quieren hacer los neoclásicos.

Veamos algunos ejemplos de este tipo de juegos.

Ejemplo 1.3.7. a) Supongamos una gran ciudad, como la de México, y discutamos una posible explicación acerca de uno de sus problemas de contaminación ambiental y de congestionamiento vehicular. Para ello, pensemos en la parte de su población que posee automóvil. Es decir,

$N = \{habitante\ de\ la\ ciudad\ de\ México\ |posee\ un\ automóvil\}$. Cada uno de ellos tiene que decidir si se transporta casi siempre en su automóvil o trata de limitar el uso de éste y utilizar el transporte público.

$D_j = \{uso\ intensivo\ del\ automóvil, uso\ de\ transporte\ público\}$.

Si una gran cantidad de personas utilizan intensivamente el auto, el tránsito se vuelve insoportable y la contaminación de la atmósfera se convierte en dañina para la salud.

Denotemos como r a este tope del número de auto dependientes, donde r es un número positivo menor que n, y sea σ un perfil de estrategias y k_σ el número de los que usan intensivamente el auto de acuerdo σ.

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 50 & \text{si } k_\sigma < r \text{ y } \sigma^j = transporte\ público \\ -100 & \text{si } k_\sigma \geq r \text{ y } \sigma^j = transporte\ público \\ 100 & \text{si } k_\sigma \leq r \text{ y } \sigma^j = auto \\ -50 & \text{si } k_\sigma > r \text{ y } \sigma^j = auto \end{cases}$$

El único Equilibrio de Nash del juego, que por cierto es estricto, es (*auto,auto,...,auto*). En el equilibrio, cada uno de los jugadores gana –50, mientras que en $(transporte\ público, transporte\ público, \ldots, transporte\ público)$ gana 50. ¿Logra este dilema del prisionero captar aspectos esenciales del problema? Nosotros creemos que sí.

b) **El juego del parasitismo social**. Otros dilemas del prisionero consisten en que algún tipo de comunidad se propone realizar, con la cooperación de todos, algún proyecto para mejorar la "utilidad" de cada miembro. Por ejemplo, pensemos en un barrio en el que no hay una escuela cercana y las autoridades se encargarán de establecerla si los vecinos construyen el

edificio. Por cada familia que coopera, aumenta en β unidades de utilidad, el beneficio recibido por cada familia, de parte de la escuela, β menor que 1, pero mayor que $1/n$, donde n es el tamaño del grupo. Cooperar con la construcción implica la pérdida de una unidad de utilidad. Por supuesto, la cooperación es voluntaria, pero la escuela estará abierta para los hijos de todos, hayan cooperado o no. La función de pago para cada familia es como sigue:

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} \gamma + \beta(k_\sigma + 1) - 1 & si\ \sigma^j = Cooperar, \\ \gamma + \beta k_\sigma & si\ \sigma^j = No\ Cooperar, \end{cases}$$

k_σ es el número de miembros de la comunidad que escogieron cooperar de acuerdo a σ.

De nuevo el único equilibrio de Nash es

$(No\ Cooperar, ..., No\ Cooperar)$. Es decir, no se construirá la escuela.

Juegos de Mayoría

Ejemplo 1.3.8. a) **Haciendo más flexibles las reglas de trabajo** (modelo de Vega Redondo [52] modificado). Supongamos que en una planta industrial, existe la tradición de que sus obreros realizan funciones muy bien establecidas por un contrato de trabajo. La empresa quiere cambiar las cosas y poder flexibilizar la forma de trabajo, cambiando las funciones de los obreros, según necesidades de la producción. Para alentar el cambio, diseña un sistema de premios para los obreros que acepten la flexibilización y aumenten su productividad. La aceptación del sistema debe ser individual, es decir cada obrero puede resistirse a dicho cambio. Si menos de q obreros aceptan ser flexibles, no se podrá legitimar el sistema de premios, $n \geq q > 1$, las funciones de todos seguirán rigiéndose por el contrato. En cualquier caso, la cooperación con la empresa, aceptando cambiar las funciones de trabajo implica un esfuerzo que descuenta c unidades a la utilidad recibida.

$N = \{obreros\ de\ una\ planta\ industrial\}$.

$D_j = \{flexibiliza, resiste\}$.

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j = resiste \\ x - c > 0 & \text{si } \sigma^j = flexibiliza \text{ y } n_f \geq q \\ -c < 0 & \text{si } \sigma^j = flexibiliza \text{ y } n_f < q \end{cases}$$

n_f es el número de trabajadores que, de acuerdo a σ, acepta flexibilizar sus funciones.

Este juego tiene dos equilibrios de Nash (ep):

$$(flexibiliza, flexibiliza, \ldots, flexibiliza) \text{ y}$$
$$(resiste, resiste, ..., resiste).$$

Depende de los valores de x, c y q, cuál de estos equilibrios será el que se imponga como ley del conflicto.

b) **El juego de la Cargada.** Los miembros de un partido político tienen que escoger, ellos mismos, sin intervención de algún dedo privilegiado, al candidato presidencial que lanzarán en las próximas elecciones. El conjunto de aspirantes, de donde tiene que salir el candidato es $\{C_1, C_2, ..., C_r\}$. Los miembros del partido pueden decidir *abstención*, es decir, no manifestar públicamente sus preferencias. Si un militante no apoya a nadie, no obtendrá ni beneficios, ni castigos; si, por el contrario, apoya a alguno de los aspirantes, puede obtener un buen "hueso", si logra jugársela con el "bueno" o quizá tendrá que olvidarse de la política durante los próximos seis años, si su visión no fue suficientemente buena y apoyó a un perdedor. Podríamos decir que la función φ, definida a continuación, esquematiza la situación descrita.

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j = abstención, \\ 0 & \text{si } \sigma^j = C_k \text{ y no hay mayoría}, \\ p > 0 & \text{si } \sigma^j = C_k \text{ y } C_k \text{ tiene mayoría}, \\ q < 0 & \text{si } \sigma^j = C_k \text{ y otro } C_l \text{ distinto tiene mayoría.} \end{cases}$$

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son $(C_k, C_k, ..., C_k)$, para $k = 1, 2, .., r$. Es decir, la resultante, en este juego, es una tradicional cargada. Cuál es el equilibrio que se lograría imponer depende de los valores de p, q y n. Si cambiáramos ligeramente la función de pago exigiendo que la mayoría de un candidato sólo se reconoce cuando tiene más de un voto, el perfil en que todos los jugadores escogieran abstenerse también sería equilibrio de Nash. Este equilibrio podría llamarse "el que se mueve no sale en la foto".

Los juegos de "la mayoría" son juegos de coordinación, no es necesario que estos sean simétricos en cuanto a los pagos, pero los equilibrios de Nash si lo son pues todos los jugadores escogen la misma estrategia. Es decir, en el equilibrio, los "jugadores" se coordinan.

Juegos de Concurreccia o de Ventanillas

Por último, damos unos ejemplos del tipo "juegos de concurrencia o de ventanillas", en su versión más simple. Estos juegos los introdujo S.

Hernández [27] para analizar problemática planteada por la economía clásica. En ellos, los jugadores escogen formarse en alguna de las ventanillas posibles, en las que hay una cantidad de dinero a repartir entre todos los que se hayan formado en ella. Existen ejemplos, para los cuáles, algunos jugadores pueden escoger cualquier ventanilla, mientras que los otros solo algunas de ellas. En distintos contextos se pueden dar diversas interpretaciones de las ventanillas.

Ejemplo 1.3.9. a) Los trabajadores (artesanos) de una ciudad tienen que escoger a que actividad productiva se dedicarán de entre un conjunto de posibilidades $\{O_1, O_2, ..., O_r\}$. Ellos solo emplearán trabajo para realizar su actividad. La demanda d_j pesos del producto de O_j está determinada por las necesidades de los habitantes y esta demanda se repartirá entre todos los que se dedican al oficio. Es decir, si i está entre los que eligen la estrategia O_k,

$$\varphi_i(\sigma) = \frac{d_k}{\eta_k}$$

donde η_k es el número de jugadores que escogió O_k de acuerdo a σ.

Si los trabajadores son 10, los oficios son 5 y las demandas en miles de pesos son $d_1 = 500$, $d_2 = 400$, $d_3 = 300$, $d_4 = 200$, $d_5 = 100$, entonces los equilibrios de Nash (ep) son todos aquellos en que cuatro jugadores escogen el primer oficio, tres el segundo, dos el tercero, uno el cuarto y ninguno el quinto.

b) Supongamos que para algunos oficios se necesita tener cierta preparación o experiencia y solo algunos de los trabajadores la tienen, entonces estos jugadores podrán escoger cualquiera de los oficios, pero los otros no. La función de pago es la misma que en el ejemplo anterior.

Consideremos que, como en dicho ejemplo, existen 10 trabajadores y 5 oficios, y que las demandas d_i tienen el mismo valor. Pero, pensemos que para los oficios O_1, O_2 y O_3 se necesita tener por lo menos 10 años de experiencia y solamente los trabajadores 1 y 2 la tienen. Para los otros dos oficios no es necesaria ninguna experiencia. Entonces, los conjuntos de estrategias puras de este juego son $D_1 = D_2 = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$ y $D_j = \{O_4, O_5\}$ para j =3, 4, ..., 10.

Todos los equilibrios de Nash (ep) son tales que, los trabajadores 1 y 2 escogen el primer o el segundo oficio, pero, no los dos el mismo. Para los restantes jugadores, unos equilibrios son tales que seis escogen el cuarto oficio, mientras que los dos últimos el quinto, mientras que en otros equilibrios, de los ocho trabajadores distintos a 1 y a 2, cinco hombres eligen el cuarto y tres el quinto.

1.4. Estrategias puras conservadoras

Vamos a hablar, en esta sección, de un tipo de estrategias que corresponden a un comportamiento que podríamos llamar paranoico, pues consiste en que un jugador supone que todos los demás se han unido para actuar en su contra. Estas estrategias y los pagos asociados a ellas representan lo mejor que cada jugador puede conseguir por sí mismo, contando sólo con sus propias fuerzas.

Uno de los enfoques para abordar la problemática, sería partir de todos los pagos que el jugador j tiene seguros, prácticamente en el bolsillo. Es decir, aquellos pagos para los que j tiene una estrategia con la que, los demás jugadores, no pueden impedirle ganar por lo menos el pago en cuestión. Después, j buscaría, si existe, la más grande de todas esas cantidades. Formalmente:

Definición 1.4.1. Se dice que el número real x *es asegurable en estrategias puras(ep) para el jugador* j, *si existe* $\widehat{\sigma}^j \in D_j$, *tal que* $\varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq x$ *para toda* $\sigma \in D$.

En el ejemplo 1.3.3, 39 es una cantidad asegurable para la empresa que monopolizaba, hasta ese momento, el producto, porque si escoge la estrategia de realizar *publicidad en radio y tv*, no importa lo que escoja el competidor potencial, M ganará por lo menos 39. En el juego 1.3.6 a, -1 es asegurable para cualquier capitalista, pues basta que uno de ellos saque su capital, para que gane más que -1, cualesquiera que sean las decisiones de los demás. Es claro que en ambos juegos, los jugadores pueden asegurar cantidades mayores.

Consideramos, ahora, $\widetilde{A_j'} = \{x \in R \,|x \text{ asegurable para } j\}$.

Proposición 1.4.2. *Si el juego* $(N, \{D_j\}, \varphi)$ *es finito, entonces, para toda* $j \in N$, *existe el supremo de* $\widetilde{A_j'}$.

Demostración. Sea $m_j = \min\limits_{(\sigma|\sigma^j)} \varphi_j\left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right)$. m_j existe, pues el conjunto de valores que toma φ_j es finito. Asimismo, m_j está en $\widetilde{A_j'}$, pues para cualquier $\overline{\sigma}^j \in D_j$, $\varphi_j\left(\sigma \left|\overline{\sigma}^j\right.\right) \geq m_j$. Por lo que $\widetilde{A_j'} \neq \emptyset$.

Por otro lado, $\text{máx}_j = \max\limits_{(\sigma|\sigma^j)} \varphi_j\left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right)$ también existe.

Para toda $x \in \widetilde{A_j'}$, existe $\widetilde{\sigma}^j \in D_j$ tal que $\varphi_j\left(\sigma \left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) \geq x$.

Pero, $\text{máx}_j \geq \varphi_j\left(\sigma \left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) \geq x$.

Es decir, $\widetilde{A_j^{'}}$ es un subconjunto de reales no vacío y acotado superiormente, por lo que tiene supremo. ∎

Denotaremos como $v_j^{'}$ al supremo de $\widetilde{A_j^{'}}$. Se puede decir que j juega conservadoramente en estrategias puras, si trata de que su pago esté lo más cerca posible de ese número.

Otra forma de introducir la conducta conservadora o paranoica de j es considerar que éste siempre piensa en lo peor que pudiera ocurrirle. Es decir, ante cada una de sus estrategias, j piensa en el pago menor que puede recibir, cuando escoge dicha estrategia y, por aquello de que "de los males, el menos", decide inclinarse por la estrategia que le da el más alto de los peores pagos. Formalmente:

Dado $\widehat{\sigma}^j \in D_j$, el conjunto $\left\{x \in R \left| \varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right) = x \right.\right\}$ es finito, entonces, existe $\min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)$.

Por lo tanto, podemos construir $h_j^{'}{:}D_j \to R$, definida como

$$h_j^{'}\left(\widehat{\sigma}^j\right) = \min_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right).$$

Es claro que $h_j^{'}$ alcanza su máximo en D_j, pues este conjunto es finito. A este máximo lo denotamos como $\max\limits_{\widehat{\sigma}^j \in D_j} \min\limits_{\sigma \in D} \varphi_j$.

Proposición 1.4.3. $v_j^{'} = \max\limits_{\widehat{\sigma}^j \in D_j} \min\limits_{\sigma \in D} \varphi_j$

Demostración. Sea $x \in \widetilde{A_j^{'}}$, entonces existe $\widehat{\sigma}^j$ tal que $\varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right) \geq x$, para toda σ en D.

Tenemos que $\min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right) \geq x$.

Pero, $\max\limits_{\sigma^j \in D_j} \min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \sigma^j \right.\right) \geq \min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right) \geq x$.

Es decir, $\max\limits_{\sigma^j \in D_j} \min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \sigma^j \right.\right)$ es una cota superior de $\widetilde{A_j^{'}}$.

Por lo que se cumple que $\max\limits_{\sigma^j \in D_j} \min\limits_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \sigma^j \right.\right) \geq v_j^{'}$.

Por otro lado, existe $\widetilde{\sigma}^j \in D_j$, tal que

$$\varphi_j \left(\widetilde{\sigma} \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right) = \min_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right) = \max_{\sigma^j \in D_j} \min_{\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)} \varphi_j \left(\sigma \left| \sigma^j \right.\right).$$

Es decir, $\underset{\sigma^j \in D_j\left(\sigma \middle| \widehat{\sigma}^j\right)}{\text{máx}} \underset{}{\text{mín}} \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma^j\right.\right) \leq \varphi_j\left(\sigma \left| \widetilde{\sigma}^j\right.\right)$, para toda $\sigma \in D$. Lo que significa que $\underset{\sigma^j \in D_j\left(\sigma \middle| \widehat{\sigma}^j\right)}{\text{máx}} \underset{}{\text{mín}} \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma^j\right.\right) \in \widetilde{A_j^{'}}$.

Pero, entonces, $\underset{\sigma^j \in D_j\left(\sigma \middle| \widehat{\sigma}^j\right)}{\text{máx}} \underset{}{\text{mín}} \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma^j\right.\right) \leq v_j^{'}$.

Por lo tanto, $\underset{\sigma^j \in D_j\left(\sigma \middle| \widehat{\sigma}^j\right)}{\text{máx}} \underset{}{\text{mín}} \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma^j\right.\right) = v_j^{'}$. ∎

Diremos que $\widehat{\sigma}^j$es **una estrategia conservadora (ep) para el jugador** j, si éste gana por lo menos $v_j^{'}$, cuando escoge $\widehat{\sigma}^j$. A $v_j^{'}$ se le llamará el máximo asegurable para el jugador j en estrategias puras (ep). En el proceso de la prueba se ha demostrado que existen estrategias conservadoras (ep), Para cualquier juego y para cada jugador.

Las dos formas de acercarnos a las estrategias conservadoras llevan a lo mismo y la igualdad 1.4.3 permite que $v_j^{'}$ se calcule fácilmente.

Los aliados y los japoneses, en el conflicto planteado en 1.3.1 a, jugarán conservadoramente escogiendo la ruta Norte y el máximo pago que los aliados pueden asegurar, si el juego se realiza una sola vez, es el de bombardear durante dos días a sus enemigos. Ser bombardeados durante dos días es el máximo pago que pueden asegurar los japoneses. En el "volado" (1.3.1 b), todas las estrategias de los jugadores son conservadoras y lo máximo que puede asegurar en estrategias puras, cada uno de los dos jugadores, es -1. La empresa monopólica de 1.3.3 con sólo sus fuerzas asegura como máximo 40, con su estrategia de hacer *publicidad en radio y tv* que es conservadora (ep). Por su parte, la empresa competidora asegura obtener 0 cuando no entra a la competencia y es lo máximo que puede asegurar, cuando se limita a estrategias puras. Todos los artesanos (1.3.7 a) actuarán conservadoramente eligiendo el oficio cuyo producto tiene mayor demanda, y cada uno obtendrá un pago de 50 como máximo asegurable.

En los ejemplos de 1.3, se puede apreciar que los jugadores reciben en un equilibrio de Nash (e.p) al menos $v_j^{'}$. Esto es cierto para cualquier juego.

Proposición 1.4.4. *Si σ^* es un equilibrio de Nash (ep), entonces*

$$\varphi_j\left(\sigma^*\right) \geq v_j^{'}.$$

Demostración. Sea $\widehat{\sigma}^j$ una estrategia conservadora del jugador j,

$$\varphi_j\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq v_j^{'},$$

para toda σ.

Como σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras,

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^* \left| \sigma^j \right.\right), \text{ para toda } \sigma^j \in D_j.$$

En particular, $\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^* \left| \widehat{\sigma}^j \right.\right)$. Y, por lo tanto, $\varphi_j(\sigma^*) \geq v_j^{'}$. ∎

1.5. La paranoia colectiva puede ser solución

En los juegos bipersonales de suma cero, existen intereses antagónicos entre los participantes. No es una actitud que amerite consultar a un siquiatra, el que un jugador que participa en uno de estos juegos piense que su oponente trata de imponerle el peor pago posible. Intuitivamente, sabemos que, en ellos, una forma conservadora de actuar es "buena" para los dos jugadores, pero veremos que esto no siempre se puede establecer, cuando el juego se realiza en estrategias puras. Por otro lado, estrategias que parten de que un jugador piensa que todo el mundo se ha puesto en su contra pueden ser las adecuadas para otros juegos, en donde también existe antagonismo entre los competidores, pero éste no es tan evidente. En esta sección, caracterizamos este tipo de juegos y estudiamos la relación entre sus equilibrios de Nash y sus estrategias conservadoras, ambos en estrategias puras.

Para $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, un juego arbitrario, denotamos como Max a la máxima ganancia conjunta. Es decir, $Max = \max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} \varphi_j(\sigma)$.

Si cada jugador j escoge una estrategia conservadora $\widehat{\sigma}^j$, la suma de las ganancias de todos no rebasa a Max. Esto es, $\sum\limits_{j\in N} \varphi_j\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2, ..., \widehat{\sigma}^n\right) \leq Max$. Pero, entonces, tenemos la proposición:

Proposición 1.5.1. *Para cualquier juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ se cumple que $\sum\limits_{j\in N} v_j^{'} \leq Max$. Si el juego es bipersonal de suma cero, la desigualdad significa que $v_1^{'} \leq -v_2^{'}$.*

Esta desigualdad induce una división entre los juegos que resulta muy importante para la problemática que queremos estudiar; los juegos que cumplen $\sum\limits_{j\in N} v_j^{'} = Max$ y los que cumplen $\sum\limits_{j\in N} v_j^{'} < Max$. En el primer caso, cuando $\sum\limits_{j\in N} v_j^{'} = Max$, los jugadores, actuando cada uno con sus propias fuerzas, logran repartirse Max. Ninguno de ellos, por ejemplo j, puede esperar llegar a algún "pacto" con otros jugadores que le permita obtener un pago g_j

mayor que $v_j^{'}$. Para que esto pudiera ocurrir, algún jugador k, tendría que ganar menos que $v_k^{'}$ y k no lo permitiría. Por ello, es obvio que, en estas situaciones, los jugadores tienen intereses contrapuestos.

Definición 1.5.2. Decimos que $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es un juego antagónico en estrategias puras, si $\sum\limits_{j\in N} v_j^{'} = Max$.

El juego 1.3.1 a), Aliados contra Japoneses, es antagónico (ep), puesto que en 1.3.1 a), el máximo asegurable para los aliados es 2, mientras que para los japoneses es -2. Por otro lado, como el juego es de suma cero, Max es cero. Ya se había observado que $(norte, norte)$ es un equilibrio de Nash y un punto silla de la función de pago de los aliados, es claro que también es una pareja de estrategias puras conservadoras.

Sin embargo, no se cumple que todos los juegos bipersonales de suma cero son antagónicos en estrategias puras. Así, en el juego del volado, $v_1^{'} = v_2^{'} = -1$, mientras que Max es 0. Recordemos que mientras las dos estrategias, águila y sol, son conservadoras para los dos jugadores, el juego no tiene equilibrio de Nash (ep), ni la función de pago del primer jugador tiene punto silla.

Ejemplo 1.5.1.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3,6) & (5,2) & (4,1) & (7,1) \\ (1,7) & (1,3) & (5,2) & (4,2) \\ (0,8) & (4,1) & (5,-1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego, $v_1^{'} = 3$, $v_2^{'} = 6$ y $Max = 9$. $(1,1)$ es un equilibrio de Nash (ep) y un punto silla de la matriz de pago del jugador 1 y de la del jugador 2 (poniendo como renglones las estrategias de 2 y como columnas las de 1). Además, $(1,1)$ es un perfil de estrategias puras conservadoras (ep) y cada uno de los dos jugadores obtiene su máximo asegurable, en dicho perfil. El juego es antagónico (ep), pero no es de suma cero.

Ejemplo 1.5.2. De los juegos de "ventanilla", podemos construir alguno que sea antagónico (ep) cambiando la función de pago del ejemplo 1.3.7 a). Pensemos en los 10 artesanos, con sus 5 oficios y las mismas demandas para cada O_i. Para $j = 1, 2, \ldots, 10$, el conjunto de estrategias es el mismo que en $1.3.7a$, es decir, el conjunto de los 5 oficios. Pero, en cambio, supongamos que las pareja de artesanos 1 y 2, son los más famosos y solicitados en el

primer oficio, la pareja 3 y 4 en el segundo. En el tercero, cuarto y quinto lo serán, respectivamente, las parejas formadas por 5 y 6, 7 y 8 y 9 y 10. Esto repercutirá en las funciones de pago que son $\varphi_j(\sigma) =$

$$\begin{cases} \frac{d_k}{2} & \text{Si } j \text{ y su par escogieron } \overline{O_j}. \\ \frac{2d_k}{3} & \text{Si } j \text{ escogió } \overline{O_j}, \text{ pero su par no lo hizo.} \\ 0 & \text{Si } \sigma^j = O_k \neq \overline{O_j} \text{ y los 2 expertos eligieron } O_k \\ \frac{d_k}{3n_k(\sigma)} & \text{Si } \sigma^j = O_k \neq \overline{O_j} \text{ y un experto eligió } O_k \\ \frac{d_k}{n_k(\sigma)} & \text{Si } \sigma^j = O_k \neq \overline{O_j} \text{ y ningún experto eligió } O_k, \end{cases}$$

donde $n_k(\sigma)$ es el número de artesanos que eligieron O_k de acuerdo a σ. Observe que $\overline{O_j}$ es el oficio en el que j es especialista.

Tenemos, entonces, que $v_1' = v_2' = 250$, $v_3' = v_4' = 200$, $v_5' = v_6' = 150$, $v_7' = v_8' = 100$, $v_9' = v_{10}' = 50$.

$Max = 1500 = \sum_{j=1}^{10} v_j'$. Es decir, el juego es antagónico en estrategias puras.

Si σ^{*j} es la estrategia en que j elige su especialidad, entonces j ganará por lo menos v_j', independientemente de lo que hagan los demás. Por lo que σ^{*j} es una estrategia conservadora para j. $\varphi_j\left(\sigma^{*1}, \sigma^{*2}, ..., \sigma^{*10}\right) = v_j'$.

Para toda j en N, si σ^j distinta que σ^{*j}, $\varphi_j\left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right) = 0$.

Por lo tanto, para cada j en N, $\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^* \middle| \sigma^j\right)$ para toda σ^j en D_j. Es decir, σ^* es equilibrio de Nash (ep).

Observamos que en estos ejemplos de juegos antagónicos hay una relación entre el comportamiento conservador y los equilibrios de Nash (ep), trataremos de ver que tan general es tal relación.

Por lo pronto, veamos que en dichos juegos, el pago de equilibrio es el mismo que se obtiene con el comportamiento conservador de todos los jugadores.

Proposición 1.5.3. *Sea $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ antagónico (ep), entonces:*

a) *si $\sigma^* \in D$ es un equilibrio de Nash (ep), $\varphi_j(\sigma^*) = v_j'$, para toda $j \in N$.*

b) *si $\sigma^{*j} \in D_j$ es conservadora (ep) para cada j, $\varphi_j(\sigma^*) = v_j'$.*

Demostración. Para toda $j \in N$, $\varphi_j(\sigma^*) \geq v_j'$, como se demostró en 1.4.4.

Supongamos que, para alguna $k \in N$, $\varphi_k(\sigma^*) > v_k'$. Entonces

$$\sum_{j\in N} \varphi_j(\sigma^*) > \sum_{j\in N} v_j' = Max.$$

Pero $\sum_{j\in N} \varphi_j(\sigma^*) \leq Max$. Con lo que llegamos a un absurdo, es decir $\varphi_j(\sigma^*)$ tiene que ser igual a $v_j^{'}$, para toda j.

La demostración de que, en un perfil de estrategias conservadoras, los jugadores ganan su máximo asegurable sigue el mismo razonamiento. ∎

Una observación ante la proposición 1.5.3 es que, para los equilibrios de Nash (ep), es urgente ver si ellos implican un comportamiento conservador, pues si estos perfiles sólo son capaces de proporcionar a cada jugador su máximo asegurable, pero no lo salvan del riesgo de ganar menos, entonces no tendrían interés para los involucrados en el juego, ya que eligiendo estrategias conservadores, ellos garantizan dicho pago.

Para avanzar en el problema, nos servirá analizar primero el caso de los juegos bipersonales de suma cero, del que ya tenemos algunos resultados. Lo que sabemos de estos juegos es que tienen equilibrio de Nash (ep), si y sólo si la función de pago del jugador 1 tiene punto silla y que una pareja de estrategias puras es punto silla de la matriz de pago del jugador que elige renglones, si y sólo si es equilibrio de Nash (ep). Haremos ver que, en los juegos bipersonales de suma cero que son antagónicos, ser un punto silla de la función de pago del jugador 1 es equivalente a ser una pareja de estrategias conservadoras. Y que el que la función de pago del jugador 1 tenga punto silla es equivalente a ser antagónico (ep).

Proposición 1.5.4. *Si* $(N = \{1,2\}, \{D_1, D_2\}, \varphi)$ *es un juego bipersonal de suma cero,*

$$v_1^{'} = \max_{\sigma^1\in D_1} \min_{\sigma^2\in D_2} \varphi_1\left(\sigma^1,\sigma^2\right) = -\min_{\sigma^1\in D_1} \max_{\sigma^2\in D_2} \varphi_2\left(\sigma^1,\sigma^2\right)$$

y

$$v_2^{'} = \max_{\sigma^2\in D_2} \min_{\sigma^1\in D_1} \varphi_2\left(\sigma^1,\sigma^2\right) = -\min_{\sigma^2\in D_2} \max_{\sigma^1\in D_1} \varphi_1\left(\sigma^1,\sigma^2\right)$$

Demostración. Sea una función $f : D \to R$ tal que alcanza un máximo y un mínimo en D, es conocido que:

$$\max_{x\in D} \left(-f(x)\right) = -\min_{x\in D} \left(f(x)\right)$$

y

$$\min_{x\in D} \left(-f(x)\right) = -\max_{x\in D} \left(f(x)\right).$$

Sabemos que $v_2^{'} = \max_{\sigma^2\in D_2} \left\{ \min_{\sigma^1\in D_1} \varphi_2\left(\sigma^1,\sigma^2\right) \right\}$ y, además, el juego es de suma cero, entonces

$$v_2^{'} = \max_{\sigma^2\in D_2} \left\{ \min_{\sigma^1\in D_1} \left(-\varphi_1\left(\sigma^1,\sigma^2\right)\right) \right\} =$$

$$\max_{\sigma^2 \in D_2} \left(- \left\{ \max_{\sigma^1 \in D_1} \left(\varphi_1 \left(\sigma^1, \sigma^2 \right) \right) \right\} \right) = - \min_{\sigma^2 \in D_2} \left\{ \max_{\sigma^1 \in D_1} \varphi_1 \left(\sigma^1, \sigma^2 \right) \right\}.$$

∎

Proposición 1.5.5. *Si* $(N = \{1,2\}, \{D_1, D_2\}, \varphi)$ *es bipersonal de suma cero, entonces es antagónico (ep) si y sólo si la matriz* $A = (\varphi_1(i,j))$ *tiene punto silla. Además, una pareja de estrategias es punto silla de* A*, si y sólo si cada una de ellas es conservadora para el jugador en cuestión.*

Demostración. Supongamos que (i^*, j^*) es punto silla de la matriz A, entonces $a_{i\ j^*} \leq a_{i^* j^*} \leq a_{i^*\ j}$, para cualesquiera $i \in D_1$ y $j \in D_2$.

Así $a_{i^* j^*} \leq \min_{j \in D_2} a_{i^*\ j} \leq \max_{i \in D_1} \min_{j \in D_2} a_{i\ j} = v_1^{'}$.

Por otro lado,

$-v_2^{'} = \min_{j \in D_2} \max_{i \in D_1} a_{i\ j} \leq \max_{i \in D_1} a_{i\ j^*} \leq a_{i^* j^*} \leq v_1^{'}$.

Pero sabemos que $-v_2^{'} \geq v_1^{'}$. Por lo tanto $-v_2^{'} = v_1^{'} = a_{i^* j^*}$. Por lo que el juego es antagónico (ep).

Reinterpretando las desigualdades punto silla, $a_{i^* j^*} \leq a_{i^*\ j}$ para toda j, nos dice que $a_{i^*\ j} \geq v_1^{'}$ para toda $j \in D_2$. Es decir, i^* es una estrategia conservadora para el jugador 1.

Por otro lado, $a_{i\ j^*} \leq a_{i^* j^*}$ para toda $i \in D_1$ implica que j^* es una estrategia conservadora para el jugador 2, pues es equivalente a

$-\ a_{i\ j^*} \geq -a_{i^* j^*} = v_2^{'}$ para toda $i \in D_1$.

Supongamos, ahora, que el juego es antagónico (ep), es decir $-v_2^{'} = v_1^{'}$. Sea (i^*, j^*) una pareja de estrategias conservadoras para 1 y 2, respectivamente. Entonces, $a_{i^*\ j} \geq v_1^{'}$ para toda $j \in D_2$, y $-\ a_{i\ j^*} \geq v_2^{'}$ para toda $i \in D_1$.

Por lo que, para toda $i \in D_1$ y para toda $j \in D_2$,

$$a_{i^*\ j} \geq v_1^{'} \geq a_{i\ j^*}.$$

Basta demostrar que $a_{i^*\ j^*} = v_1^{'}$ para que hayamos demostrado que, en un juego antagónico (ep), A tiene punto silla y toda pareja de estrategias conservadoras es un punto silla. Pero en 1.5.3b, se demostró esa igualdad para los juegos antagónicos (ep). ∎

Las proposiciones 1.5.5 y 1.3.2 nos dicen que, en los juegos bipersonales de suma cero, antagónicos, los equilibrios de Nash, las parejas de estrategias conservadoras y los puntos silla, todos en estrategias puras, son conceptos equivalentes y los juegos bipersonales son antagónicos (ep), si y sólo si la matriz de pago del jugador 1 tiene punto silla. La proposición siguiente reúne y enfatiza dichos resultados que ya han sido demostrados.

Proposición 1.5.6. *En un juego bipersonal de suma cero antagónico las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\sigma^* = (i^*, j^*)$ *es punto silla de* φ_1*, la función de pago del jugador 1.*

b) σ^* *es un equilibrio de Nash (ep).*

c) i^* *y* j^* *son estrategias conservadoras para 1 y 2, respectivamente.*

Tenemos, además como corolario de 1.5.5 el siguiente resultado:

Corolario 1.5.7. *En* $(N, \{D_j\}, \varphi)$ *bipersonal de suma cero, antagónico (ep), existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.*

Tratemos de generalizar el concepto de punto silla para todos los juegos e investiguemos si tiene un papel semejante en la caracterización de los juegos antagónicos en general.

Observación 1.5.1. En los juegos bipersonales de suma cero, sólo nos preocupamos de que la función de pago del jugador 1 tenga punto silla. ¿Por qué? Supongamos que $\left(\widehat{i}, \widehat{j}\right)$ es dicho punto silla. Basta que multipliquemos por –1 todos los términos de las desigualdades implicadas en el punto silla de la función de pago para 1, para que obtengamos las desigualdades para la función de pago del jugador 2. Es decir, $\left(\widehat{i}, \widehat{j}\right)$ es también punto silla del jugador 2. Este hecho no ocurre necesariamente en un juego que no es bipersonal de suma cero. En el ejemplo 1.5.3, la función de pago del jugador 1 tiene punto silla y, sin embargo, no es antagónico, pues $v_1^{'} = 3$, $v_2^{'} = 1$, pero $Max = 8$.

Ejemplo 1.5.3.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3,0) & (5,2) & (4,1) & (7,1) \\ (1,7) & (1,3) & (5,2) & (4,2) \\ (0,8) & (4,1) & (5,-1) & (1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si observamos esta matriz, podemos ver que mientras que la función de pago del jugador 1 tiene punto silla, la del jugador 2 no lo tiene.

Examinemos el ejemplo 1.3.3. Repetimos su expresión matricial a continuación.

$$\begin{array}{c} \\ \textit{regalar muestras} \\ \textit{publicidad escrita} \\ \textit{publicidad en radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{entrar} & \textit{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (45,-10) & (55,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Las dos funciones de pago tienen punto silla. Para la función de la empresa monopólica, jugador 1, (*publicidad en radio y tv, entrar*), para la del 2 (*publicidad en radio y tv, no entrar*). Sin embargo, como ya habíamos observado anteriormente, el juego no tiene equilibrios de Nash (ep) y, además, no es antagónico, pues $v_1^{'} = 45$, $v_2^{'} = 0$ y $Max = 80$.

Si examinamos detenidamente el argumento que usamos en la anterior observación, para hacer ver que en los juegos bipersonales de suma cero no puede ocurrir que la función de pago de uno de los jugadores tenga punto silla y la del otro no lo tenga, nos daremos cuenta que allí se decía algo más fuerte y era que la misma pareja es punto silla de ambas funciones. Inspirándonos en eso, establecemos la definición de punto silla de un juego como un perfil de estrategias puras que sea punto silla, al mismo tiempo, de las funciones de pago de todos los jugadores.

Definición 1.5.8. Considérese el juego rectangular $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \{\varphi_j\}_{j\in N}\right)$. Decimos que $\widetilde{\sigma} \in D$ es punto silla de la función de pago del jugador j si, para toda $\sigma \in D$ y para toda $\sigma^j \in D_j$, se cumple que

$$\varphi_j\left(\widetilde{\sigma} \mid \sigma^j\right) \leq \varphi_j\left(\widetilde{\sigma}\right) \leq \varphi_j\left(\sigma \mid \widetilde{\sigma}^j\right).$$

Decimos que $\sigma^* \in D$ es punto silla del juego $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \{\varphi_j\}_{j\in N}\right)$, si es punto silla de la función de pago de cada jugador.

Antes de estudiar el papel que los puntos sillas tienen en los juegos antagónicos (ep), veamos que estos puntos son importantes en cualquier juego, desde la problemática que estudiamos.

Proposición 1.5.9. *Si σ^* es un punto silla del juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \{\varphi\})$, entonces se cumplen:*

a) *σ^* es equilibrio de Nash (ep).*

b) *σ^* está formada por estrategias conservadoras para cada jugador.*

Demostración. Como σ^* es punto silla, se cumple que, para todo jugador j, para toda $\sigma \in D$ y para toda $\sigma^j \in D_j$,

$$\varphi_j\left(\sigma^* \left|\sigma^j\right.\right) \leq \varphi_j\left(\sigma^*\right) \leq \varphi_j\left(\sigma \left|\sigma^{*j}\right.\right).$$

Tomando en cuenta las n desigualdades del lado izquierdo, tenemos que se cumplen las condiciones para afirmar que σ^* es equilibrio de Nash (ep). Por lo que la afirmación del inciso a es válida.

Pero si σ^* es equilibrio de Nash, para toda $j \in N$, $\varphi_j(\sigma^*) \geq v_j'$. Entonces, por las desigualdades de la derecha, $\varphi_j\left(\sigma \left| \sigma^{*j}\right.\right) \geq v_j'$ para toda $\sigma \in D$ y para toda $j \in N$. Lo que quiere decir que σ^{*j} es una estrategia conservadora del jugador j. Y como esto es cierto para cualquier jugador, σ^* está formado por estrategias conservadoras. ∎

En la proposición 1.5.9 se demostró que un punto silla de un juego, sin importar si este juego es o no antagónico, está formado por estrategias conservadoras. Sin embargo, lo recíproco no es cierto, como es fácil observar en el juego del volado, en el que todos los perfiles de estrategias puras están formados por estrategias conservadoras, pero el juego no tiene punto silla.

Tampoco los equilibrios de Nash de cualquier juego son necesariamente puntos sillas o están formados por estrategias conservadoras. En el ejemplo 1.3.3 b), mientras que la pareja (nr, nr) es punto silla y, entonces, está formada por estrategias conservadoras y es equilibrio de Nash (ep), la pareja (r, r) no es punto silla y no está formado por estrategias conservadoras y, sin embargo, es equilibrio de Nash. Sin embargo, el juego 1.3.3 b) no es antagónico. Vayamos, ahora, a la relación entre puntos silla de un juego y la propiedad de que éste sea antagónico. Examinemos el ejemplo 1.5.1. Éste es un juego antagónico y bipersonal, pero no de suma cero. Habíamos constatado que la pareja (1, 1) es un equilibrio de Nash del juego y está formado por una pareja de estrategias conservadoras. Es fácil observar que (1, 1), también, es punto silla de las funciones de pago de ambos jugadores. La del primer jugador está representada por la matriz de la izquierda, la del segundo por la matriz de la derecha.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

En el juego de ventanillas del juego antagónico del ejemplo 1.5.2, el perfil

$$\sigma^{**} = (O_1, O_1, O_2, O_2, O_3, O_3, O_4, O_4, O_5, O_5)$$

es un equilibrio de Nash (ep) y está formado por estrategias conservadoras, una para cada jugador. También dicho perfil es un punto silla del juego.

Para mostrar esta última afirmación, podemos escribir en una matriz $A^{(j)}$ la función de pago del jugador j. Por ejemplo, la matriz $A^{(5)}$ corresponde

a uno de los especialistas en el oficio 3, en los renglones están colocadas las estrategias del artesano 5 y en las columnas los perfiles de estrategias de los 9 artesanos restantes. En dicha matriz, suponemos que los perfiles de los 9 artesanos que no son el 5 están ordenados de tal manera que en las primeras columnas se colocan, en cualquier orden, aquellos en los que el artesano 6, el otro especialista en el oficio 3, elige O_3 y los demás perfiles en cualquier orden son las columnas siguientes. La columna con asterisco es aquella en la que los 9 artesanos, distintos que 5, eligen su especialidad. Examinemos la pareja $\left(\widehat{\sigma}^j, \widehat{\sigma}\right)$ tal que $\widehat{\sigma}^j$ es el renglón donde 5 escoge O_3 y $\widehat{\sigma}$ la correspondiente a la columna con asterisco, en donde los artesanos distintos a 5 también escogen su especialidad.

$A^{(5)} =$

$$\begin{array}{c} \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_4 \\ O_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & * & & & & & \\ \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ \frac{d_3}{2} & \dots & \frac{d_3}{2} & \dots & \frac{d_3}{2} & \frac{2d_3}{3} & \dots & \frac{2d_3}{3} \\ & & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Es evidente que $\left(\widehat{\sigma}^j, \widehat{\sigma}\right)$ es un punto silla de $A^{(5)}$.

Más aún, $\left(\widehat{\sigma}^j, \widehat{\sigma}\right) = (O_1, O_1, O_2, O_2, O_3, O_3, O_4, O_4, O_5, O_5)$ es un punto silla de $A^{(j)}$ para cualquier artesano j, es decir es punto silla del juego.

En estos ejemplos de juegos antagónicos (ep) se observa un comportamiento similar al de los juegos bipersonales de suma cero antagónicos. Expresemos, en la proposición siguiente, un resultado general.

Proposición 1.5.10. *Si $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es antagónico (ep), entonces tiene punto silla. Cualquier perfil formado por estrategias conservadoras es punto silla del juego.*

Demostración. Supongamos que el juego es antagónico (ep) y sea $\widetilde{\sigma} \in D$, tal que $\widetilde{\sigma}^j$ es conservadora, para cada $j \in N$.

Se tiene que para toda $j \in N$, $\varphi_j\left(\sigma \,\middle|\, \widetilde{\sigma}^j\right) \geq v_j'$ para toda $\sigma \in D$ y $\varphi_j\left(\widetilde{\sigma}\right) = v_j'$. Es decir, $\varphi_j\left(\sigma \,\middle|\, \widetilde{\sigma}^j\right) \geq \varphi_j\left(\widetilde{\sigma}\right)$ para toda $\sigma \in D$.

Además, $\varphi_j\left(\widetilde{\sigma}\right) = Max - \sum\limits_{i\neq j} \varphi_i\left(\widetilde{\sigma}\right)$ y

$\varphi_j\left(\widetilde{\sigma} \,\middle|\, \sigma^j\right) \leq Max - \sum\limits_{i\neq j} \varphi_i\left(\widetilde{\sigma} \,\middle|\, \sigma^j\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$.

Pero, para toda $i \neq j$, $\varphi_i\left(\widetilde{\sigma} \,\middle|\, \sigma^j\right) \geq \varphi_i\left(\widetilde{\sigma}\right)$.

Entonces,

$$Max - \sum_{i \neq j} \varphi_i \left(\widetilde{\sigma} \mid \sigma^j \right) \leq Max - \sum_{i \neq j} \varphi_i \left(\widetilde{\sigma} \right) = \varphi_j \left(\widetilde{\sigma} \right).$$

Es decir, para toda $\sigma \in D$ y para toda $\sigma^j \in D_j$,

$$\varphi_j \left(\widetilde{\sigma} \mid \sigma^j \right) \leq \varphi_j \left(\widetilde{\sigma} \right) \leq \varphi_j \left(\sigma \mid \widetilde{\sigma}^j \right).$$

O sea que $\widetilde{\sigma}$ es punto silla de la función de pago de cada jugador. ∎

Sin embargo, no es cierto, a diferencia de lo que ocurre en los juegos bipersonales de suma cero, que si un juego tiene punto silla, entonces el juego es antagónico (ep), cómo podemos observar en los ejemplos siguientes:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} confesar & no\ confesar \end{array} \\ \begin{array}{c} confesar \\ no\ confesar \end{array} & \begin{pmatrix} (-10,-10) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-2,-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

y

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) & (1,2) & (-1,-1) \\ (1,2) & (2,1) & (0,0) & (-1,-1) \\ (0,0) & (1,2) & (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

El primer ejemplo es nuestro viejo conocido dilema del prisionero que aparece en la introducción. En este juego $(confesar, confesar)$ es punto silla de las funciones de pago de los dos jugadores. El juego no es antagónico, pues el máximo asegurable para ambos es -10, pero Max no es -20, sino -4. Como es obligado $(confesar, confesar)$ es un perfil de estrategias conservadoras y, a pesar de no ser antagónico, es punto equilibrio de Nash y punto silla.

Lo mismo ocurre en el segundo ejemplo que es el baile de Shapley (ejemplo 1.3.5). Este juego tiene un único punto silla en (d, d), que es el único equilibrio de Nash y está formado por estrategias conservadoras. Las matrices de los jugadores 1 y 2 tienen otros puntos sillas, pero no lo son del juego. El baile de Shapley no es antagónico, ambos jugadores tienen como máximo asegurable (ep) a –1 y Max es 3.

Por otro lado, ¿cómo son los equilibrios en los juegos antagónicos (ep) que no son bipersonales de suma cero? A diferencia de estos últimos juegos,

en los antagónicos más generales, un equilibrio de Nash (ep) puede ser un perfil de estrategias que no son conservadoras (ep). Además un equilibrio de Nash en estrategias puras no necesariamente es punto silla del juego. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.4.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En este juego, 0 es el máximo asegurable (ep) para los dos jugadores y Max es 0, es decir, el juego es antagónico (ep). Hay un punto silla en $(2,1)$ que es un equilibrio de Nash (ep) y que, además, es un perfil de estrategias conservadoras (ep), mientras que $(1,2)$ es equilibrio de Nash (ep), pero no es punto silla de ninguna de las funciones de pago y tampoco es un perfil de estrategias conservadoras (ep).

La proposición 1.5.11 resume los resultados que hemos probado respecto a puntos sillas, estrategias conservadoras y equilibrios de Nash en los juegos antagónicos, todos estos conceptos en relación con estrategias puras.

Proposición 1.5.11. *Si $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es antagónico (ep), entonces*

i) σ^* es punto silla de φ_j para toda $j \in N$ si y sólo si σ^{*j} es estrategia conservadora (ep) para toda $j \in N$.

ii) Si σ^* es punto silla de φ_j para toda $j \in N$, entonces σ^* es equilibrio de Nash (ep).

Entonces, hablando en el contexto de las estrategias puras, los perfiles de estrategias conservadoras, que siempre existen, son equilibrios de Nash en los juegos antagónicos, pero, en algunos de estos juegos, existen equilibrios de Nash que no están formados con estrategias conservadoras. En la proposición 1.5.3, se probó que, en los juegos antagónicos, el pago en todos los equilibrios es el máximo asegurable, con eso se hizo claro, como lo comentamos en ese momento, que los jugadores preferirán estrategias conservadoras en dichos juegos. Afortunadamente, para los equilibrios de Nash, los perfiles con estas estrategias son equilibrios, pero aquellos equilibrios que no aseguran los pagos $v_j^{'}$ no podrán formar parte del conjunto "solución". Es decir, en los juegos antagónicos (ep), cualquiera que sea el número de jugadores, si se define un conjunto, al que debe llamarse la "solución" del juego, en todos los perfiles que formen parte de este conjunto, los jugadores

actuarían conservadoramente. En el contexto de las estrategias puras hemos mostrado que en los juegos antagónicos, por eso les hemos puesto ese nombre, los jugadores tienen intereses contrapuestos y no se puede esperar que se formen pactos o coaliciones entre los jugadores, al igual que ocurre en los juegos bipersonales de suma cero, con punto silla.

1.6. Algunos ejemplos infinitos

Aunque nuestra definición fue más general, hasta ahora, jugar una sola vez ha querido decir tratar con un juego finito, pero esto no tiene por que ser así, en muchos conflictos, a los que toman las decisiones se les pueden presentar infinitas opciones. Una empresa que debe considerar el precio de cada uno de sus productos tendrá una infinidad de posibilidades. También cada uno de los clientes potenciales de ella, aunque sólo tengan que decir un sí o un no, a cada uno de esos posibles precios, tienen infinitas estrategias. Decidir cuánto invertirá de su capital en cada una de las opciones posibles sería elegir una de sus estrategias en muchos de los conflictos en que se ve envuelto un hombre de negocios. ¿Qué parte de su fortuna heredará, un viejo millonario, a cada uno de sus parientes? En todos estos ejemplos la elección dentro de un conjunto infinito ocurre en cada ocasión que se celebra el conflicto.

La definición de equilibrio de Nash es válida para juegos infinitos. A estas alturas del texto queda claro, que en los juegos finitos no siempre existen equilibrios de Nash (ep), lo mismo ocurre en los juegos infinitos. Para tener teoremas de existencia, en juegos finitos e infinitos, tendremos que esperar al capítulo 5. Para los juegos finitos aparecerán las estrategias mixtas, en los infinitos no tendremos que "mezclar", aunque también se puede, pero aprovecharemos la técnica usada con las estrategias mixtas, para discutir condiciones de existencia de equilibrios de Nash en el caso infinito y, por ello, trataremos al mismo tiempo el asunto. En esta sección, simplemente, introduciremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.6.1 (Un juego bipersonal de suma cero infinito). Del libro Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos de J.C.C. McKinsey [36]:

"El coronel Blotto desea atacar dos posiciones A y B igualmente importantes, y debe decidir que porción de su regimiento envía a A y cuál a B. El coronel enemigo sólo tiene a disposición una parte z de su regimiento, $0 < z < 1$, y debe decidir cómo distribuir dicha parte en la defensa de las posiciones A y B. La lucha es a muerte y tomará la posición el que tenga

más hombres concentrados en ella, para ello habrá tenido que matar a todos los enemigos y habrá perdido tantos hombres como el enemigo. El pago será igual a las posiciones ganadas que valen lo que un regimiento completo más los sobrevivientes.

Entonces $N = \{Coronel\ Blotto, Coronel\ Enemigo\}$, $D_B = D_E = [0,1]$, $\varphi_B = -\varphi_E$. Donde

$$\varphi_B(x,y) = sgn[x - yz] + x - yz + \\ sgn[1 - x - (1-y)z] + 1 - x - (1-y)z, \text{ con}$$

$$sgn(c) = \begin{cases} -1 & \text{si } c < 0 \\ 0 & \text{si } c = 0 \\ 1 & \text{si } c > 0 \end{cases}.$$

Supongamos que existen

$$v_B = \operatorname*{máx}_{x\in[0,1]} \operatorname*{mín}_{y\in[0,1]} \varphi_B(x,y)$$

y

$$v_E = -\operatorname*{mín}_{y\in[0,1]} \operatorname*{máx}_{x\in[0,1]} \varphi_B(x,y)$$

Entonces, el Coronel Blotto tiene una estrategia de tal manera que por lo menos gana v_B y el Coronel Enemigo tiene una estrategia de tal manera que le impide ganar más que $-v_E$.

Si $v_B = -v_E$, φ_B tiene un punto silla (x_0, y_0). (x_0, y_0) es equilibrio de Nash y $\varphi_B(x_0, y_0) = v_B$.

Ejemplo 1.6.2. Podemos transformar el juego de ventanillas 1.3.9 a), permitiendo que los artesanos no se dediquen a un solo oficio, sino que sus decisiones sean ahora vectores de dimensión r que indiquen la parte de su jornada, digamos que de 8 horas, que dedicarán a cada oficio.

Entonces, para el artesano j,

$\widetilde{D}_j = \left\{ X^j \in R^r \middle| x^j_{O_i} \geq 0, \forall O_i \text{ y } \sum_{i=1}^{r} x^j_{O_i} = 8 \right\}$ es el conjunto de donde escogerá cada día. Para cada $j \in N$, la función de pago se define, cuando $X = \left(X^1, X^2, ..., X^n\right)$, de la manera siguiente:

$$\widetilde{\varphi}_j(X) = \sum_{(O_{k_1}, O_{k_2}, ..., O_{k_n})} \sum_{O_k \left| x^j_{O_k} \neq 0 \right.} \frac{d_k}{\sum_{i\in N} x^i_{O_k}}.$$

Es claro que existen equilibrios de Nash tales que todos ganan lo mismo. Podríamos trabajar este modelo para hacer ver que el mercado es un planificador espontáneo y reparte el trabajo de una manera sabia. O podríamos,

como hace S. Hernández [27], con un modelo similar, demostrar que en estas condiciones vale la ley del valor trabajo. O siguiendo a ese autor discutir la formación de la tasa media de ganancia en un modelo de concurrencia, donde los jugadores son capitalistas, existe un conjunto de opciones de inversión, libres para todos, y las estrategias de los jugadores consisten en decidir que parte de su capital emplearán en cada una de sus opciones.

Ejemplo 1.6.3 (El Duopolio de Cournot). Dos empresas controlan el mercado de un bien. Cada una de ellas debe decidir la cantidad $q_i \in R_+$ que producirá. El precio unitario del bien se determina para igualar la demanda con la oferta (un precio de equilibrio). Supongamos que dicho precio cumple con la ecuación: $p = d - q_1 - q_2$, donde d sería la demanda si el precio fuera cero. Entonces, si c es el costo unitario, la ganancia que recibirá la empresa i, cuando se han elegido q_1 y q_2 está expresada en la función:

$$\varphi_i(q_1, q_2) = q_i(p - c) = q_i(d - q_1 - q_2 - c)$$

Para buscar cuál es la conducta racional que seguirán las empresas, Antoine Augustin Cournot [12] supone que si la empresa 2 ha elegido q_2^*, la empresa 1, buscará q_1 que maximice $\varphi_1(q_1, q_2^*)$. Y análogamente actuará 2, si 1 ha elegido q_1^*. Considerando la condición de primer orden de maximización de las ganancias de ambas empresas, llegamos al par de ecuaciones que deben cumplir q_1^* y q_2^*.

Es decir, Cournot diría que el equilibrio del duopolio es:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1}{3}(d - c).$$

Resulta que esa misma pareja de estrategias es el equilibrio de Nash, pues es exactamente la misma definición. Cournot, matemático francés del siglo XIX que es pionero de la aplicación de las matemáticas a la economía, se adelantó en más de 100 años en la construcción de un concepto análogo al del equilibrio de Nash, para los casos de empresas oligopólicas.

Ejemplo 1.6.4. Una empresa M que monopoliza un bien, cuyo costo unitario es c, tiene que elegir el precio al que lo venderá, en principio, cualquier real es válido. Sus posibles r compradores (los consumidores) desean, cada uno, una unidad. Tienen que decidir, para cada precio posible, si compran o no compran. La ganancia que recibirá el monopolio es igual al precio de todas sus ventas menos el costo. El pago para el consumidor j es igual a la utilidad que le reporta el bien (U_j) menos el precio que pagó por éste si compra, o 0 en el caso de no comprar. Suponemos que $0 \leq c \leq \min_j \{U_j\} = U_b$.

El juego se puede describir de la siguiente forma:
$N = \{M, 1, 2, \ldots, r\}$,
$D_M = R_+$
$D_j = \left\{f^{\,j} : R_+ \to \{sí\ compra, no\ compra\}\right\}$

$$\varphi_M\left(p,\ f^{\,1},\ f^{\,2}, ...,\ f^{\,r}\right) = (p - c)\, n_p$$

n_p es el número de consumidores que compran al precio p, de acuerdo a $\left\{f^{\,j}\right\}$.

Para $j = \{1, 2, \ldots, r\}$, $\varphi_j\left(p,\ f^{\,1},\ f^{\,2}, ...,\ f^{\,r}\right) =$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } f^j(p) = no\ compra, \\ U_j - p & \text{si } f^j(p) = compra. \end{cases}$$

Dos equilibrios de este juego:

a) Cada comprador elige comprar, cuando el precio es a lo más igual a la utilidad que recibe del bien y no comprar a precios más altos. El monopolio elige el precio igual a la utilidad del consumidor que, en estas condiciones, le permite obtener mayor ganancia. Si el precio de venta determinado es muy alto, este equilibrio convendría al monopolio y no a los consumidores, pues muchos de ellos no podrían comprar y los que lo hicieran lo harían a un precio alto.

b) Cada comprador elige comprar, cuando el precio es a lo más igual a U_b, la utilidad más pequeña que existe entre los consumidores, y no comprar a precios más altos. El monopolio vende a un precio igual U_b. Este equilibrio convendría a los consumidores, pues todos podrían comprar y lo harían a un precio bajo. En cambio, al monopolio, excepto si a y b llevan al mismo precio, no le conviene esta situación, es como si los consumidores se hubieran coaligado en su contra exigiendo que el precio sea U_b. Sin embargo, este equilibrio encierra una amenaza no creíble, pues si el monopolio escogiese un precio $p > U_b$, los consumidores que tienen una utilidad mayor que p mejorarían comprando, por lo que el vendedor creería que no se sostendrían en no comprar a precios mayores que U_b, pero menores que la utilidad que les proporciona el bien.

También puede ser interesante considerar juegos infinitos en el sentido del número de jugadores, pues es una forma con la que se puede modelar que cada jugador, o algunos de ellos, no tienen peso. Por ejemplo, cada consumidor de un gran supermercado no hará que éste cambie el precio de un artículo, si decide no comprarlo. Los juegos en los que ningún jugador tiene peso se llaman "no atómicos". En este texto no nos meteremos en ese tema.

1.7. Ejercicios

Ejercicio 1.1. Construya un modelo rectangular de los siguientes "conflictos". Posteriormente señale, para cada uno, sus equilibrios de Nash (ep) o si no los tiene.

a) (M. Davis [13]) "En agosto de 1944, justamente después de la invasión de Europa, los aliados rompieron su cabeza de playa en Cherburgo y amenazaban al Noveno Ejército alemán. El comandante alemán tenía estas posibles elecciones: ataque o retirada. El comandante aliado tenía estas alternativas: reforzar la brecha, lanzar sus reservas hacia el este tan pronto como fuese posible, defenderse esperando veinticuatro horas para después decidir reforzar o empujar hacia el este". Para cada pareja de estrategias se tienen los resultados siguientes:

$$
\begin{array}{c}
 \\
\textit{reforzar} \\
\textit{reservas al este} \\
\textit{esperar}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \textit{ataque} & \textit{retirada} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\textit{probable rechazo del ataque} & \textit{débil presión} \\
\textit{alemanes pueden cerrar brecha} & \textit{disposición ideal contra alemanes} \\
\textit{brecha y rodeo de los alemanes} & \textit{atraso en llegada y poca presión contra alemanes}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

b) Considere dos empresas comerciales que compiten por atraer al mayor número de clientes. La más fuerte de las dos, pues cuenta con más capital, considera las tres estrategias siguientes: 1) aceptar un acuerdo sobre los precios si su competidora se lo ofrece y si no escoger un precio alto; 2) bajar precios y hacer una gran publicidad buscando arruinar al competidor y 3) ofrecer dinero al competidor para que éste abandone la competencia y si éste no acepta, bajar precios buscando arruinarlo. La otra empresa, por su lado, tiene dos opciones: 1) buscar un acuerdo con el competidor y aceptar el ofrecimiento, si se le hace, de abandonar y 2) actuar aisladamente, sin ofrecer, ni aceptar nada del competidor. Construya una matriz de los posibles resultados cualitativos, análoga a la del problema a y posteriormente asigne números reales que expresen un pago que refleje la situación.

c) Tres amigos quieren decidir quien pagará la cena escogiendo en forma simultánea, cada uno de ellos, entre águila o sol. El disparejo pierde. Si los

tres escogen lo mismo, cada quien pagará la tercera parte.

d) En una glorieta donde el flujo de automóviles es enorme, repentinamente, el semáforo se apaga, cada automovilista se encontrará en la disyuntiva de escoger entre comportarse civilizadamente (solidario), dejando pasar a otros automóviles cuando esto favorece la fluidez del tráfico o, por el contrario, buscar avanzar, él mismo, a como de lugar (egoísta). Cuando los automovilistas que deciden tomar este último comportamiento rebasan el número r, $n > r > 0$, se provoca un embotellamiento.

Si llamamos k_σ al número de automovilistas que en el perfil de estrategias $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right)$ escoge la estrategia egoísta, defina la función de pago φ que exprese el tiempo que tardará cada automovilista dependiendo de las decisiones de todos, de tal manera que el juego sea un dilema del prisionero.

e) Considere un conflicto actual y construya un juego rectangular sobre él.

f) Considere un conflicto que conozca que sea un dilema del prisionero (distinto de los que aparecen en este libro) y construya un juego rectangular sobre él.

g) Considere un conflicto que conozca que sea un juego de mayoría (distinto de los que aparecen en este libro) y construya un juego rectangular sobre él.

h) Construya un juego de ventanillas sobre las colas en las cajas del supermercado.

i) Construya un juego rectangular del conflicto entre hombres y mujeres, en el medio en que se mueve.

j) Es un año de elecciones y los dos partidos políticos principales se encuentran en el proceso de redactar sus programas. Hay una disputa entre dos estados X y Y relativa a derechos sobre agua y cada partido debe decidir si en su programa favorecerá a X o a Y o no tocará el punto. Los ciudadanos que no son de X o de Y son indiferentes al problema. En X y en Y, el comportamiento en la votación puede predecirse de la experiencia pasada. En X se decidirán por el que prometa apoyo a su estado y si ambos prometen lo mismo o no tocan el punto, los habitantes de X se abstendrán. En Y, ocurre lo mismo con la mitad de la población, pero la otra mitad, no votará por 1, aunque le prometa favorecerlos y por 2 sólo si les promete favorecerlos. La población de Y es 4/3 la de X.

Ejercicio 1.2. Sea $(N, \{D_j\}, \varphi)$, un juego bipersonal de suma cero, y $\left(\widetilde{\sigma}^1, \widetilde{\sigma}^2\right)$ y $\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2\right)$ dos perfiles que son equilibrios de Nash (ep). Demuestre que $\left(\widetilde{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2\right)$ y $\left(\widehat{\sigma}^1, \widetilde{\sigma}^2\right)$ también son equilibrios de Nash (ep) y que el pago, para los dos jugadores es el mismo en cualquier equilibrio de Nash.

Ejercicio 1.3. Considere los juegos siguientes y encuentre todos los equilibrios de Nash (ep)

a) $\begin{pmatrix} (1,5) & (-5,4) & (0,0) & (0,1) & (2.0) & (-3,3) \\ (3,2) & (5,-2) & (2,1) & (2,-1) & (3,4) & (10,5) \\ (4,-6) & (-7,0) & (0,-3) & (2,2) & (3,1) & (0,2) \\ (1,0) & (7,-2) & (1,1) & (-1,0) & (5,-5) & (7,1) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} (2,-1) & (1,0) & (5,-4) \\ (4,-3) & (4,-3) & (8,-7) \\ (-4,5) & (-1,2) & (-4,5) \\ (4,-3) & (4,-3) & (7,-6) \\ (3,-2) & (3,-2) & (2,-1) \\ (4,-3) & (2,-1) & (-4,5) \\ (0,1) & (-2,3) & (3,-2) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} (3,7) & (0,-2) & (1,1) & (-4,30) & (10,10) \\ (-4,5) & (3,10) & (2,-1) & (4,-5) & (5,-1) \\ (0,0) & (6,2) & (10,1) & (-3,-4) & (3,2) \\ (5,15) & (5,5) & (2,9) & (2,17) & (-2,7) \\ (1,10) & (2,11) & (-12,8) & (3,3) & (11,11) \end{pmatrix}$

d) El juego de los artesanos con 10 jugadores $D_1 = D_2 = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$, $D_3 = D_4 = D_5 = \{O_2, O_3, O_4\}$ y $D_6 = D_7 = D_8 = D_9 = D_{10} = \{O_3, O_4\}$, $d_1 = 2500$, $d_2 = 750$, $d_3 = 500$, $d_4 = 350$.

e) Corre el año 1994, n capitalistas tienen gran cantidad de dólares invertidos en algún país en donde están obteniendo enormes ganancias, sin embargo, en los últimos días de noviembre empiezan a correr fuertes rumores de que se aproximan acontecimientos políticos que pueden poner en peligro sus inversiones. Tienen que decidir, entonces, si sacan sus dólares del país para proteger su capital, aunque por algún tiempo sus ganancias se reduzcan considerablemente, o si asumen el riesgo y dejan sus inversiones donde están. Si más de r inversionistas permanecen en el país, el que así actúe hace buenos negocios, $1 < r < n$. En cambio si la mayoría de los inversionistas protege su dinero sacándolo del país, y permanecen menos de r el que haya decidido permanecer obtendrá pérdidas. Podemos suponer que si permanecen r inversionistas, nadie pierde, ni gana nada. La función de pago φ de este conflicto tendrá la forma siguiente:

$$\varphi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j = sale \\ 0 & \text{si } \sigma^j = no\ sale \text{ y } r \text{ no salen} \\ p > 0 & \text{si } \sigma^j = no\ sale \text{ y más que } r \text{ no salen} \\ q < 0 & \text{si } \sigma^j = no\ sale \text{ y menos de } r \text{ no salen} \end{cases}$$

Ejercicio 1.4. Justifique que los equilibrios de Nash son los que se señalan

en todos los ejemplos que aparecen en el capítulo.

Ejercicio 1.5. Encuentre el máximo asegurable (ep) y estrategias puras conservadoras para todos los jugadores, en los ejemplos del capítulo. Examine si los juegos son antagónicos o no.

Ejercicio 1.6. Considere los juegos simétricos 2×2 y demuestre que es cierto que los equilibrios son como se señala en el texto. La forma general de uno de estos juegos es como sigue:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} (d,d) & (e,f) \\ (f,e) & (g,g) \end{pmatrix} \end{array}$$

Considere que en el juego simétrico 2×2 se cumple que $(d-f)(e-g) = 0$. Examínense, para todos los casos cuáles son los equilibrios de Nash (ep), el máximo asegurable y las estrategias conservadoras para cada jugador. ¿Podemos decir algo sobre si es antagónico o no?

Ejercicio 1.7. En los juegos simétricos 2×2 que se contemplan en el texto, estudie en cada caso, si existe punto silla. En los casos para los que siempre hay punto silla y en los que nunca lo hay, demuestre por qué sucede dicho resultado. En los casos que a veces lo hay y a veces no lo hay, construya un ejemplo de cada uno.

Ejercicio 1.8. Los 100 socios de un gran consorcio tienen que votar por alguno de los candidatos C_1, C_2, C_3 y C_4 para elegir a su presidente, también tienen derecho a abstenerse. Gana el candidato que obtenga la mayoría de votos. Cada candidato ha hecho grandes promesas a los socios que lo apoyen, si es que logra ganar. Si un socio se abstiene, no gana, ni pierde nada, si apoyó al ganador recibe la recompensa prometida, si apoyó a un perdedor recibirá un castigo del candidato ganador. Si no hay mayoría ninguno gana o pierde algo. Considere que los premios y castigos (relativo al candidato C_i (p_i, c_i)) se pueden medir con los números siguientes: $p_1 = 500$, $p_2 = 1000$, $p_3 = 300$, $p_4 = 700$, $c_1 = -900$, $c_2 = -100$, $c_3 = -400$, $c_4 = -300$. Construya una función de pago que refleje este conflicto (ojo los candidatos no son jugadores, solo los socios). Encuentre todos los equilibrios de Nash (ep) del juego. Encontrar el máximo asegurable y las estrategias puras conservadoras de cada jugador. ¿Cuál es la máxima ganancia conjunta? ¿Es antagónico el juego? ¿El perfil de estrategias conservadoras es equilibrio de Nash (ep)?

Ejercicio 1.9. Construya un ejemplo de un juego bipersonal de suma cero, con 10 estrategias para el primer jugador y 15 para el segundo, de tal manera que sea antagónico. Señalar todas las estrategias conservadoras de cada jugador y todos los equilibrios de Nash.

Construya un ejemplo de un juego bipersonal que no sea de suma cero, ni de suma constante con el mismo número de estrategias que el anterior (10×15) y que sea antagónico (ep). Señale todas las estrategias conservadoras de cada jugador y todos los equilibrios de Nash.

Ejercicio 1.10. Considere el modelo de Cournot para n empresas. Las empresas $E_1, E_2, \ldots, E_n$ producen el mismo bien, el coste unitario de cada una es igual a c. La empresa E_j debe escoger q_j en $[0, \infty)$, que es la cantidad del bien que piensa producir. Todas las empresas deben vender al mismo precio unitario que cumple la ecuación: $p = d - \sum_i q_i$. La función de pago para la empresa E_j es $\varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n) = q_j(p - c)$. Encuentre el equilibrio de Cournot-Nash del juego. ¿Cuál es el precio correspondiente a dicho equilibrio? ¿Cuál es ese precio en el límite, cuando n tiende a infinito?

Ejercicio 1.11. En el duopolio de Cournot (dos empresas), considere que la ecuación de precios es $p = d - q_1 - q_2$. La función de pago para la empresa E_j es $\varphi_j(q_1, q_2) = q_j(p - c_j)$, con c_j, el costo unitario de la empresa j. Encuentre el equilibrio de Cournot-Nash del juego. Si $c_1 > c_2$, ¿cuál de las dos empresas produce más en el equilibrio?

Ejercicio 1.12. El duopolio de Bertrand. Dos empresas controlan el mercado de un bien. Las empresas eligen el precio unitario al que venderán el bien p_1y p_2, respectivamente. La cantidad demandada a la empresa i por los consumidores es

$$q_i(p_1, p_2) = a - p_i + bp_j.$$

$0 < b < 2$. El coste unitario c es tal que $0 < c < a$. La ganancia de la empresa j está dada por la función

$$\varphi_j(p_1, p_2) = q_j(p_1, p_2)(p_j - c).$$

Encuentre los equilibrios de Nash del juego. ¿Cómo cambian los precios de equilibrio si hay dos costes unitarios distintos para las empresas 1 y 2?

Ejercicio 1.13. Otro juego de ventanillas. Sea N el conjunto de los más grandes capitalistas de un país y $D_j = \{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ el conjunto de firmas en las que puede invertir cualquiera de las capitalistas de N. Cada firma produce un tipo de producto. La ganancia total medida en dinero que obtiene

la firma f_l es S_l. La ganancia de cada firma se divide en partes iguales entre sus accionistas, es decir, si j escoge f_l y $n_l = \#\{i \text{ escogió } f_l\}$, j gana $\frac{S_l}{n_l}$. $\#N = 6$, $k = 5$, $S_1 = 1000$ millones de pesos, $S_2 = 500$ millones de pesos, $S_3 = 300$ millones de pesos, $S_4 = 250$ millones de pesos y $S_5 = 125$ millones de pesos.

¿Cuáles piensa que son los equilibrios de Nash (ep) del juego?

Sea el conjunto $S = \left\{ (a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5) \;\middle|\; \begin{array}{c} a_i \text{ entero no negativo,} \\ a_i \leq 6 \text{ y } \sum_i a_i = 6 \end{array} \right\}$.

$(a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5)$ se identifica con todos los perfiles de estrategias puras en los que a_k capitalistas, sean los que sean, eligen la firma f_k. Considere la gráfica dirigida $\left(S, \overrightarrow{A}\right)$con vértices o nodos en S y tal que si v y w están en S, $(v, w) \in \overrightarrow{A} \iff$ se puede pasar de v a w con el cambio de estrategia de uno sólo de los jugadores y éste mejora el pago que tenía con ese cambio de estrategia. Dibuje la parte de $\left(S, \overrightarrow{A}\right)$ que empieza en el vector $(6, 0, 0, 0, 0)$, siga con todas las flechas que parten $(6, 0, 0, 0, 0)$, ahora, para cada vértice final de dichas flechas, considere las flechas que parten de él. Continúe con el procedimiento hasta que llegue a vértices de los que no parten flechas. Reinterprete esos vértices como perfiles de estrategias y habrá encontrado equilibrios de Nash. ¿Por qué?

Ejercicio 1.14. Considere un juego rectangular finito $\left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$ y la gráfica dirigida $\left(S, \overrightarrow{A}\right)$, con $S = D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$. ¿Cómo debería ser $\overrightarrow{A}$ para que tuviéramos un procedimiento análogo al del ejercicio 1.13? Encuentre con este procedimiento todos los equilibrios de Nash de un juego bipersonal con 6 estrategias para el jugador 1 y 5 para el dos.

Ejercicio 1.15. Una empresa M que monopoliza la venta de un paquete de software tiene que elegir entre vender cada paquete a 600 o 1000 pesos. El costo unitario de cada paquete es de 450 pesos. Hay 500 personas para las que la utilidad que reporta dicho software es equivalente a 1100 pesos menos el precio al que lo compren y 1000 personas para las que la utilidad es equivalente a 650 menos el precio al que la compren. Construya un modelo rectangular del juego. Es decir, especifique el conjunto de jugadores N, los conjuntos de estrategias D_j y las funciones de pago φ_j. Encuentre todos los equilibrios de Nash (ep) del juego.

Ejercicio 1.16. Conteste si las siguientes preguntas son falsas o verdaderas y diga por qué. Es decir, demuestre la afirmación si es verdadera o exhiba un contraejemplo si no lo es.

a) Un juego bipersonal de suma cero siempre es antagónico (ep).

b) Un juego bipersonal de suma cero, cuya matriz tiene punto silla tiene todos sus equilibrios de Nash formados por estrategias conservadoras.

c) Un juego antagónico (ep) tiene todos sus equilibrios formados por perfiles de estrategias conservadoras.

Capítulo 2

Juegos Extensivos

2.1. Sobre el modelo

En el capítulo 1, hablamos sobre las dificultades que tiene el construir modelos rectangulares de muchos de los conflictos reales. Por ejemplo, los conflictos militares, en donde los protagonistas toman una enorme cantidad de decisiones a lo largo del tiempo, no una sola, como hasta aquí hemos considerado. Aún para un juego de salón como el ajedrez, del que podría decirse que es, en cierto sentido, una simplificación de un conflicto militar, resulta muy complicado hacer un modelo tipo juego rectangular, precisamente porque los jugadores toman en una partida una gran cantidad de decisiones.

La situación se complica, respecto al ajedrez, en otros juegos de salón y en los conflictos económicos, políticos, militares, etc., en donde "los jugadores", además de tomar decisiones a lo largo del tiempo, enfrentan situaciones de tipo azaroso y tienen problemas de información. No hay más que pensar en juegos como el póker o el dominó, para obtener ejemplos en los que ocurren, tanto jugadas de azar, como falta de información. No sólo en juegos de salón se presentan estos problemas, en numerosos conflictos humanos, los participantes actúan sujetos a un azar real o ficticio y, al tener que tomar decisiones, pueden no tener información sobre cuál es exactamente la situación en la que se encuentran.

Los modelos rectangulares tienen que abolir esos elementos que poseen los conflictos reales, lo que no resulta fácil, si se busca una manera no arbitraria de hacerlo. Encontrar simplificaciones forzadas puede ser fácil, pero el modelo no serviría para el análisis del conflicto que interesa. Además, aunque el modelo sea bueno, es necesariamente más pobre. Afortunadamente, la

teoría de los juegos no cooperativos cuenta con otro tipo de modelos con el que se pueden tomar en cuenta todos los elementos mencionados, **los Juegos Extensivos**. Los modelos rectangulares o estratégicos son más adecuados para definir los conceptos de solución, en ellos apareció el equilibrio de Nash en estrategias puras. Desde dichos juegos, se extenderá el concepto para hablar de equilibrios de Nash en contextos como el de los juegos extensivos, entre otros.

La definición formal del modelo extensivo es más compleja que la del modelo rectangular, el meollo de ella es un concepto de la teoría de gráficas, el de árbol con raíz. Antes de establecer dicha definición presentaremos, en este capítulo, ejemplos de modelos extensivos de algunos conflictos sencillos que ayudarán a hacer que la definición resulte más natural. Los ejemplos buscan también presentar un pequeño panorama del tipo de modelos que se pueden elaborar. Posteriormente introducimos los conceptos de teoría de gráficas mínimos necesarios para las definiciones del modelo extensivo. Además, discutiremos la definición de juego extensivo, enfrentándole otra posible, la de juego de posiciones que se establece también en términos de gráficas.

Aprovechando que estamos en el contexto de la Teoría de Gráficas, hablaremos de gráficas dirigidas o digráficas que, después, utilizaremos ampliamente en la selección de equilibrios. En este capítulo sólo introducimos ese tema de la selección. También las digráficas nos servirán para ampliar el panorama que se sigue en el libro, presentando, en la sección 2.5, otro instrumento para analizar algunos juegos.

2.2. Alternancia, azar e información.

Juegos de información perfecta y sin azar

Ejemplo 2.2.1 (La Cadena de Supermercador de Selten 1 (Una amenaza increíble)). La empresa M, una cadena de supermercados, tiene el control sobre cierto producto, lo monopoliza, pero existe la posibilidad de que una empresa C decida entrar a competir a dicho mercado. M intentará convencer a C de que no lo haga, prometiéndole a cambio un millón de pesos de los seis que ella obtendría sin competidor y amenazándola, además, con bajar los precios si, a pesar de todo, C decidiera entrar a la competencia. Supongamos que llegara a ocurrir esto último, es decir, C hizo caso omiso del peligro que corre. De cumplir M su palabra, ninguna de las dos empresas obtendría ganancia alguna, en cambio, si M no cumple su amenaza,

las ganancias de cada uno serán de dos millones. La figura 2.2.1 muestra el modelo extensivo del ejemplo.

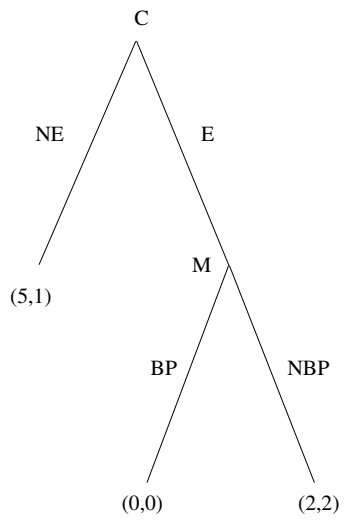

Figura 2.2.1:

Obsérvese que el desenvolvimiento del conflicto en el tiempo se representa con un árbol, las historias posibles del juego con los vértices y la posibilidad de pasar de una a otra con las aristas. En los vértices finales están colocados vectores con los pagos de los jugadores, las primeras coordenadas son los que recibe M, las segundas coordenadas los pagos para C. En cada vértice no final está una etiqueta M o una C, indicando a quien le toca decidir en ese vértice. En este conflicto no funciona el azar, ni existe falta de información de los jugadores sobre ninguna de las decisiones anteriores.

En un esquema como el representado en la figura 2.2.1 no parece difícil hacer un análisis para contestar preguntas como: ¿Le conviene a C aceptar ese dinero fácil?. Y si no lo hace ¿cumplirá M su amenaza?. Esto no depende tanto del tamaño del árbol como de los elementos que contiene. Aquí el ejemplo nos sirve para ilustrar algunos elementos de un juego extensivo. El siguiente ejemplo emplea los mismos elementos y, aunque el árbol es un poco mayor, será igualmente fácil analizarlo.

Ejemplo 2.2.2 (La Cadena de Supermercados de Selten 2 (Una amenaza que se puede creer)). Es claro que, en el ejemplo anterior, la amenaza de M no es creíble. Otra versión del conflicto en la que dicha amenaza se tendría que tomar más en serio, puede presentarse como sigue:

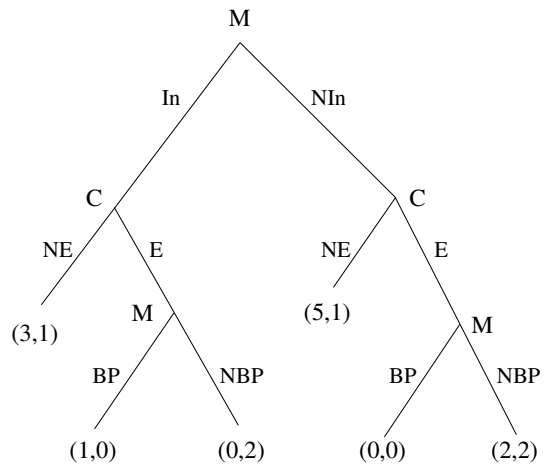

Figura 2.2.2:

la empresa M considera, al principio, la conveniencia o no de hacer una inversión en su planta. Con esa inversión M podría abaratar costos y estar en condiciones de cumplir su amenaza. Si M decide no hacer la inversión todo ocurrirá como en el ejemplo 2.2.1. Si, por el contrario, M decide hacer la inversión las cosas cambian. Por un lado, si C acepta el ofrecimiento de M, ésta se quedará con tres millones de su ganancia total, en cambio, si C decide entrar, M tendrá que decidir entre cumplir su promesa y bajar los precios, obteniéndose como vector de pago $(1, 0)$ o mantener los precios, en cuyo caso los pagos serán los del vector $(0, 2)$. La figura 2.2.2 describe la historia anterior. ¿Por qué ahora la amenaza de M es creíble?

Juegos de información perfecta y con azar.

Ejemplo 2.2.3 (Riesgo Moral. El Riesgo de Contratar a un Holgazán). (simplificación de un ejemplo del libro de Bierman y Fernández [3].) Un patrón (P) está considerando la conveniencia de ofrecer a un posible empleado (E) un salario de 100 pesos diarios ó uno de 200. En ambos casos, el empleado tiene que decidir si acepta (ac) o no acepta (nac) el ofrecimiento. Si E no acepta, tiene la seguridad de obtener, trabajando por su cuenta, 100 pesos de ingreso (el patrón no obtendría nada). Por otro lado, después de aceptar el empleo, a E le vendrá a la cabeza el que quizá no sea mala idea usar parte del tiempo en otras tareas que le reportarían un ingreso extra ($holg$), aunque no cabe duda que arriesgaría su empleo y tendría que pensar, si no sería mejor poner todo su empeño en su trabajo (tr). El patrón

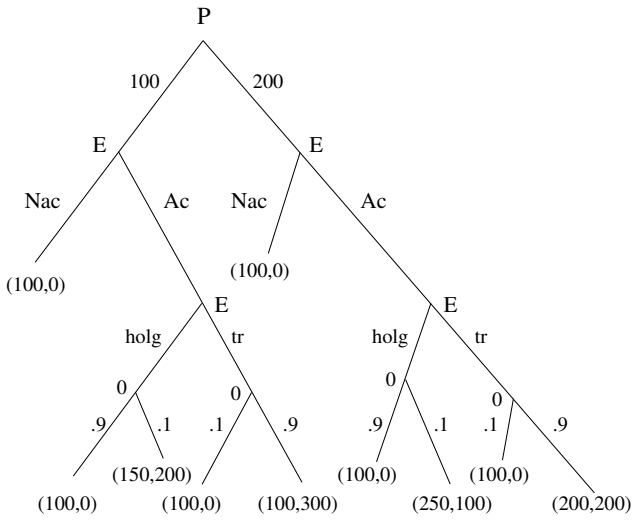

Figura 2.2.3:

no está en condiciones de invertir en un sistema de vigilancia que observe al empleado durante cada minuto de la jornada de trabajo, pues resultaría demasiado costoso, sólo cuenta con un inspector que sin previo aviso pasa por el lugar de trabajo de E. La forma de revisar de dicho inspector es tal que la probabilidad de que E sea atrapado sin trabajar depende de la elección ($holg$) o (tr) que éste haya tomado. Si el inspector atrapa al empleado, sin cumplir con sus obligaciones, el trabajador será despedido inmediatamente.

La forma extensiva del conflicto se ilustra en la figura 2.2.3. En los vectores de pagos la primera coordenada corresponde a E y la segunda a P. Obsérvese que hay una etiqueta 0 en algunos de los vértices no finales. En dichos vértices se realiza una jugada de azar y en cada alternativa del vértice en cuestión, a) el trabajador es atrapado "in fraganti" y b) no es atrapado, se especifica la probabilidad con que éstas ocurrirán. La aparición del azar en el juego complicará un poco el análisis, pero todavía resulta sencillo encontrar cuáles son los planes de acción más adecuados para cada jugador. Haremos el supuesto de que al aparecer el azar, los jugadores se comportan frente al pago esperado, buscando optimizarlo y haremos abstracción de la actitud de los jugadores frente al riesgo.

Ejemplo 2.2.4 (El Duelo). Dos personas se enfrentan en un duelo a pistola. Cuando éste empieza, los duelistas están separados por una distancia de n pasos. Cada pistola tiene una sola bala. Los duelistas se van alternando para

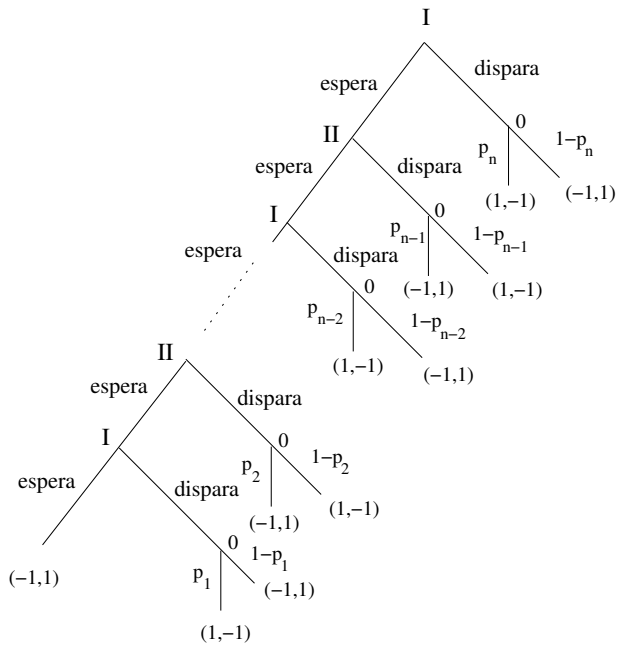

Figura 2.2.4:

decidir si disparan sobre su oponente o dan un paso hacia éste y esperan al siguiente turno. Si el jugador, en su turno, decide disparar, la probabilidad de herir a su enemigo depende de la distancia a la que se encuentran. La figura 2.2.4 ilustra el juego. ¿Cuánto deben esperar los jugadores para lanzar el disparo si empiezan separados n pasos y las p_j (probabilidad de atinar en el blanco cuando la separación es de j pasos) están dadas? (Binmore [4]).

Juegos de Información no Perfecta.

Ejemplo 2.2.5 (El padre y sus tres hijos 1). Había una vez un padre que tenía tres hijos. El padre quería heredar su tierra a dos de sus hijos, a pesar de que el hijo restante tendría que conformarse con un gato. La razón de todo esto era que el padre sabía que cuando sus tres hijos estaban juntos, siempre llegaban a las manos. Terminarían por dividir su amada tierra. Era importante que los dos hijos que heredaran la tierra estuviesen dispuestos a compartir toda la vida cuidándola, no sea que, también a ellos, les viniese, un día, la idea de dividirla. Por eso, decidió hacer la siguiente pregunta, por separado, a cada uno de sus hijos, A, B y C: "¿A cuál de tus hermanos prefieres, para sufrirlo hasta el final de tus días?" Empezó por A, el hijo

mayor, y continuó con el que A eligió. Al elegido, B ó C, no le contó nada de la reunión anterior, ni siquiera si él era al segundo que entrevistaba o ya había hablado con los otros dos, no salió de su boca palabra alguna sobre la respuesta obtenida. Si el resultado de estas dos consultas dejó al padre satisfecho, es decir, si A y B o A y C estaban en armonía, a ellos correspondió la tierra, no tomaría ya la opinión del tercer hermano, si no fue así, hubo de recurrir a este último y, sin hacer comentarios sobre pasadas entrevistas, le hizo la pregunta consabida. De nuevo, si logró el acuerdo entre B y C, serían ellos los beneficiados, pero si sus tres hijos eran tan necios de tener preferencias circulares, ofrecería sus tierras a la hermosa joven a quien cortejaba y que aún no se decidía a entregarle el ansiado sí. Quizá la promesa de las tierras, la alentaría a aceptar al viejo terrateniente, aunque sus tres hijos tuvieran que conformarse con el gato; después de todo, algunos de estos animales son muy listos.

Notemos que el padre no es uno de los jugadores, si lo fuera, quizá buscase aderezar con algunas buenas insidias, las entrevistas con sus hijos, buscando provocar decisiones circulares. Es seguro que, de lograr el tal círculo, su amada tierra correría el peligro de ser dividida y de terminar en manos de no se sabe quién. Sin embargo ¡la joven era tan hermosa! Bueno, pero esa es otra historia.

El elemento de la información en un juego complica tanto el análisis que no se podrá analizar en sí mismo y habrá que recurrir a la construcción de un juego rectangular equivalente.

El juego se ilustra en la figura 2.2.5. Obsérvese que los dos vértices con etiqueta B están encerrados en una elipse. Lo mismo ocurre con los vértices con etiqueta C. Esto significa que B ó C, según el caso, confunden situaciones, no saben con quién ha hablado el padre, ni la (o las) respuesta(s) obtenida(s). Pero eso implica que B tiene que contestar la misma pregunta en los dos casos y confunde la respuesta A, en la situación en que A lo ha elegido, lo que le aseguraría el disfrute de la tierra, con la repuesta A en el caso de que sea C, el que lo haya elegido, lo que le llevará a tener que compartir un gato con sus dos hermanos. Lo mismo ocurre con la respuesta C. Es decir, para que un jugador confunda varios vértices, debe identificar cada alternativa de uno de estos vértices con las correspondientes de los otros vértices confundidos.

Decisiones simultáneas e información no perfecta.

Ejemplo 2.2.6 (El padre y sus tres hijos 2.). Podemos pensar en la misma historia, pero ahora el padre pide a sus hijos que escriban, sin ser

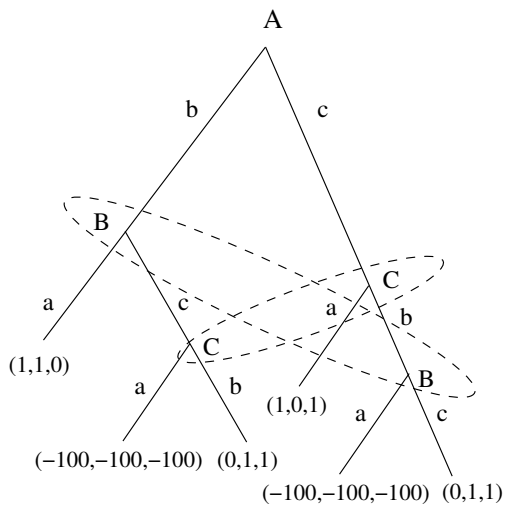

Figura 2.2.5:

vistos, el nombre del hermano preferido en un papel y se lo entreguen simultáneamente. El padre procedería con los mismos criterios que en 2.2.5 para hacer su testamento (Figura 2.2.6)

En este ejemplo, aparece el problema de simultaneidad de decisiones que caracterizaba al modelo rectangular, pero, en el modelo extensivo, suponemos que los jugadores se alternan en el tiempo para tomar decisiones, pues este modelo no permite que lo hagan al mismo tiempo. Es decir, procedemos de la siguiente manera: a) ordenamos a los jugadores, no importa cuál es el orden elegido, b) el primer jugador tiene toda la información, en el momento en que decide y c) los jugadores que toman decisiones, después de algún otro, confunden situaciones, cuando llega su turno, pues no conocen las elecciones de los jugadores anteriores.

Ejemplos con todos los ingredientes

Ejemplo 2.2.7 (Negociaciones de un Sindicato). Un sindicato (SIN) va a negociar el salario que los trabajadores recibirán en el año y está pensando en dos posibilidades. Una de ellas es exigir 50 pesos diarios, exigir 100 es la otra. Tiene, nuestro sindicato, un problema, pues no conoce bien el efecto que ha tenido la campaña publicitaria en su contra que los medios de comunicación han llevado a cabo. Por tal motivo no son evidentes las condiciones

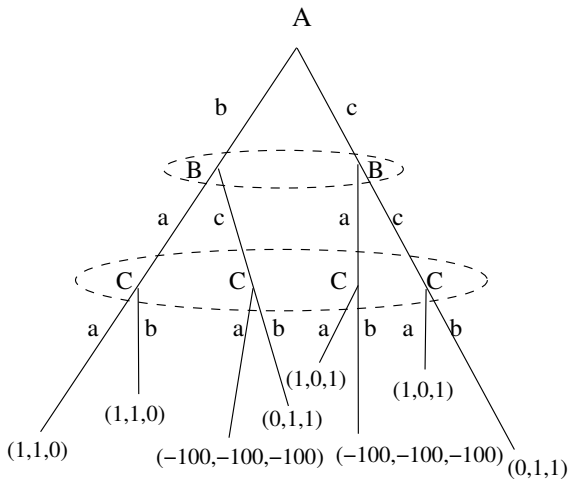

Figura 2.2.6:

de solidaridad que los demás sindicatos y la población en general pueden prestarle. Este asunto es muy importante para que tenga capacidad de resistir una lucha larga y difícil. Lo único que sabe, el sindicato, con respecto a dicho asunto es que con probabilidad de tres quintos las condiciones le son favorables, y con probabilidad dos quintos le son adversas. La empresa (EM) tampoco está enterada de si su campaña ha logrado mermar el prestigio del sindicato. Y al conocer la exigencia salarial que se le presente, tendrá que decidir si la acepta o, en su lugar, hace una contraposición que puede ser muy baja o no tanto.

Si la empresa no acepta su demanda, el sindicato, sin tener mejor información sobre las condiciones que enfrentará si realiza una huelga, tendrá que decidir si se lanza a ella o se conforma con lo que ofrece la empresa. En caso de huelga, el juego podría seguir ahora con decisiones de la empresa ante la interrupción de su producción. Ésta podría tratar de que intervenga el gobierno con la fuerza pública, para restablecer la "normalidad" o arreciar la campaña en contra del sindicato o amenazar con cerrar la fábrica o simplemente aceptar lo que se le está pidiendo. Simulemos todas estas posibilidades y las consecuentes respuestas del sindicato a través de una distribución de probabilidad sobre el triunfo de la huelga y su derrota. La huelga afectará, además, los pagos de empresa y sindicato. Con el modelo de la figura 2.2.7 esquematizamos la historia.

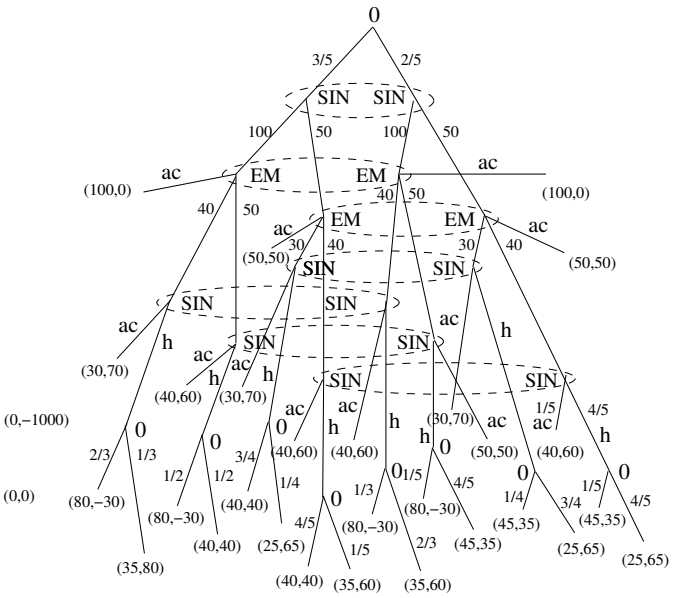

Figura 2.2.7:

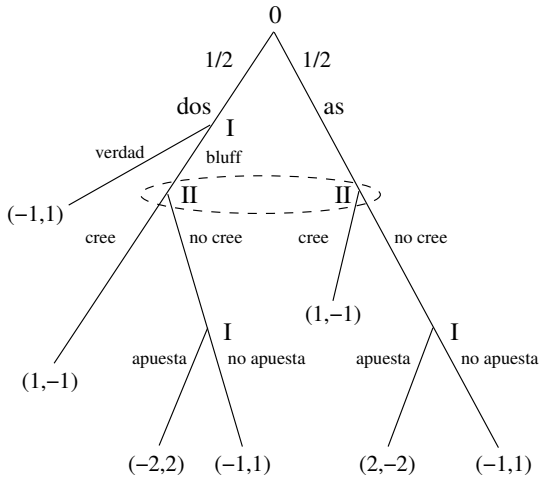

Figura 2.2.8:

Ejemplo 2.2.8 (El Póker Simplificado). En este juego participan dos personas. Se tienen dos cartas, un as y un dos, al inicio del juego, en forma aleatoria y con la misma probabilidad para el as y para el dos, se le entrega al jugador I una de las dos cartas. El jugador II no puede ver dicha carta.

Si I recibió el as, está obligado a declararlo. Si, por el contrario, recibió el dos, puede declarar la verdad (dos) o hacer bluff, diciendo que tiene el as. Después de escuchar a I, pero sin ver la carta que éste tiene, el jugador II puede decidir creerle y pagarle 1 peso, o no creerle y subir la apuesta a 2 pesos. En caso de que II haya doblado la apuesta, I debe decidir si acepta la nueva apuesta o no la acepta. En la figura 2.2.8 se ilustra esta historia con los pagos correspondientes. Obsérvese que cuando le toca el as a I, él está obligado a declararlo y no toma decisión alguna, por ello no aparece un vértice en donde I diga que tiene el as y directamente le toca a II decidir si cree o no cree la declaración de I. En ese caso, al oír la declaración de I, el jugador II está confundido entre si I realmente tiene el as o si tiene dos y está haciendo bluff diciendo que su carta es un as.

Ejemplo 2.2.9 (La Industria Contaminadora). Cada vez que M, empresa de productos químicos, echa a andar su proceso productivo, sin tomar ninguna medida para prevenirlo, puede contaminar las aguas de un río. Este río riega las dos parcelas de un campesino (C). Existe un inspector (In) que puede obligar a M a indemnizar a C, en caso de dañar sus tierras. Es época de lluvias y si éstas son fuertes la probabilidad de dañar las tierras será menor, pues la corriente dispersará gran parte de los elementos contaminantes. M y C no saben como serán las lluvias, la experiencia les permite conocer la probabilidad de que sean fuertes o no lo sean. Antes de iniciar su proceso productivo, M debe elegir entre tres opciones: i) adquirir un equipo que evite la contaminación, aún a costa de mermar sus ganancias; ii) no adquirir el equipo, pero intentar sobornar al inspector para evitar que éste la obligue a indemnizar a C, si se llegara a dañar alguna de las cosechas de éste; iii) cambiar sus inversiones hacia otra industria más "limpia", aunque menos redituable. Por su lado, In sabe que independientemente de que el sea corrupto o no, recibirá un premio por cada cosecha de C que no esté contaminada. En cambio, si alguna está contaminada y C no ha sido indemnizado, In tendrá que pagar una multa, pues existe una política de castigo a la corrupción; recuérdese que la historia es ficticia. Cuando M decida irse por el camino "fácil" de la "mordida", In puede aceptar o no el ofrecimiento de M. In tiene que tomar su decisión de aceptar o no la mordida, hasta que la fuerza de las lluvias es ya un hecho. Después de conocer la decisión de In, en cada uno de los dos casos, aceptar o no, M decidirá si echa a andar uno o dos procesos productivos y C deberá tomar la decisión de cuantas parcelas cultivará, una o dos, conociendo la decisión de In, pero no la de M. Cuando M toma medidas contra la contaminación, las tierras no sufren daño, pero los pagos de M tendrán un descuento por los gastos anticontaminantes.

Supongamos que no se han tomado precauciones contra la contaminación, entonces si las lluvias son fuertes, la probabilidad de que cada proceso productivo dañe la cosecha de una de las parcelas es 1/5, de otra manera es de 2/5. Si M trata de sobornar al inspector, no gastará en equipo y cuando In acepta el soborno, esta mordida se descuenta al pago de M. Acepte o no acepte In el soborno, puede haber, para M, multas por daños (dependiendo del azar), los pagos de C dependen de su propia decisión, pero podrán verse o no afectados por daños e indemnizaciones que dependen de las decisiones de M, de In y del azar. Análogamente ocurre con sobornos, premios y multas que afectan el pago de In, pues éstas, también, dependen de las decisiones de todos los jugadores y del azar.

Se deja al lector la construcción del modelo extensivo del conflicto.

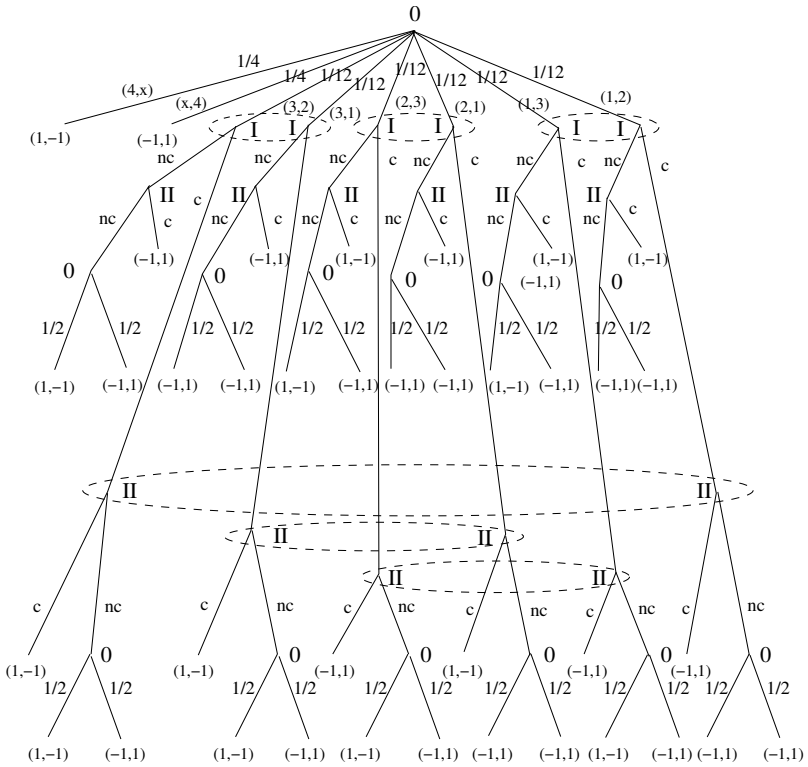

Figura 2.2.9:

Ejemplo 2.2.10 (El juego del Contento). n personas juegan con una baraja española. Cada una de ellas recibe, al azar, una carta cubierta. Los

jugadores comienzan a tomar decisiones en un orden preestablecido, si alguno de ellos recibe una carta con el número más alto posible (rey), declara "BARRERA". El primer jugador que no tiene barrera decidirá si está contento con la carta que le tocó o la intercambia con el segundo si éste no tiene barrera. Este jugador está obligado a aceptar el cambio y, a continuación, realizará una decisión semejante, declararse contento o cambiarle al tercero si éste no tiene barrera. Así continuará el juego hasta llegar al último jugador que en caso de no encontrarse satisfecho con la carta que tiene, después de las decisiones de todos los demás, tomará una del monte, declarando barrera si es un rey. Después de terminada la ronda, todos muestran su carta y el jugador que tiene la carta con el número menor se retira del juego, pagando un peso, mientras los demás reinician el juego. El proceso se repite, hasta que no hay más que un jugador. El que se queda hasta el final gana el dinero acumulado.

En la figura 2.2.9, se ilustra el modelo extensivo para el caso de dos jugadores que juegan con una baraja de cuatro 4 cartas.

Juegos extensivos infinitos

Por supuesto, los juegos extensivos pueden ser infinitos. Algunos juegos infinitos no tienen "partidas" infinitas, es decir, no continúan indefinidamente en el tiempo, sino que la realización de cada enfrentamiento termina después de un número finito de "jugadas". Sin embargo, son infinitos, porque, en uno o varios vértices del juego, existen una infinidad de opciones posibles, para algún jugador o para el azar.

Hay otros juegos, en cambio, que tienen opciones finitas, en cada vértice, pero son infinitos debido a que algunas de las partidas posibles son infinitas. Desde luego, un juego puede ser infinito en ambos sentidos.

Juegos infinitos de información perfecta

Ejemplo 2.2.11 (Demandas triviales, Rasmusen [44] (Amenazas creíbles e increíbles)). Un campesino C, cuyas tierras están siendo contaminadas por una empresa E, puede decidir demandar a la empresa, realizando un pago d por ello, o cruzarse de brazos y no hacer nada. En este último caso, el litigio termina, teniendo los dos rivales un pago de cero. En cambio, si el campesino decidió demandar, pero prefiere, después de esto, tratar de llegar a un acuerdo fuera de los tribunales, escogerá una cantidad de dinero (i) para exigirla como indemnización. Si la empresa acepta pagar i, no procederá la demanda en su contra y no habrá juicio. En cambio, si la

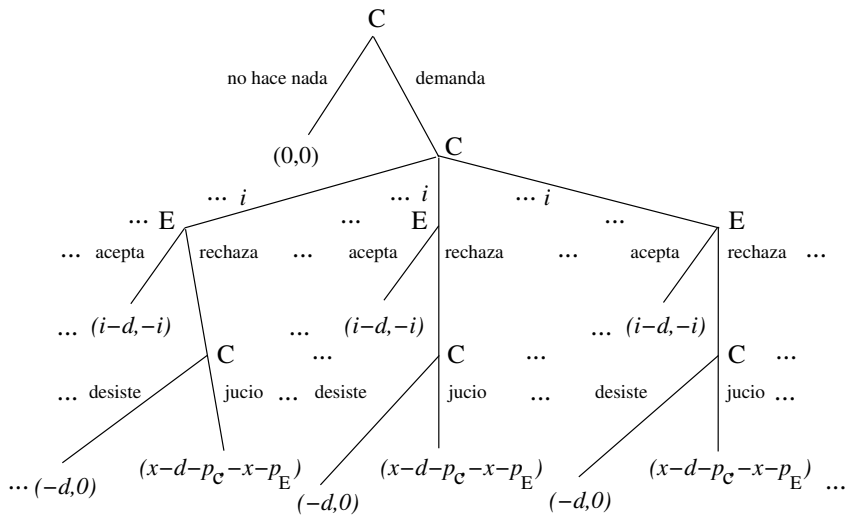

Figura 2.2.10:

empresa rechaza la oferta, C debe decidir si cumple su amenaza de ir a juicio o desiste. En el juicio, C obtendría la cantidad x positiva, pero tendrá que pagar p a un abogado para que lo represente. En caso de juicio, la empresa también tendrá gastos como pago a sus respectivos abogados. C puede escoger cualquier cantidad real positiva, para exigirla como indemnización (i). Esto convierte al juego en infinito, aunque ninguna de sus "partidas" es infinita. La figura 2.2.10 representa el modelo extensivo del problema, el segundo vértice de decisión de C tiene infinitas salidas. Todas las ramas del árbol que inician en los vértices correspondientes a decisiones de E tienen la misma estructura. En la figura sólo aparecen tres de estas ramas.

Ejemplo 2.2.12 (Un juego de negociación). El vendedor de un objeto y un posible comprador negocian, periodo tras periodo. El comprador no está dispuesto a pagar más de p_C, el vendedor no está dispuesto a vender por menos de p_V. Para que sea posible la negociación y tenga cierto interés, se supone que $p_V < p_C$. En el primer periodo, el vendedor hace una oferta de precio p, tomada del intervalo $[p_V, p_C]$. A continuación, el comprador decide, si acepta o rechaza dicho precio. En caso de aceptar, termina el juego; en caso de rechazar, el comprador hace una contraoferta de precio tomado del mismo intervalo. Ahora el vendedor debe decidir si acepta o rechaza, si acepta termina el juego y si rechaza termina el periodo. Cuando un periodo n termina con un rechazo, con probabilidad δ, $0 < \delta < 1$, habrá un nuevo periodo de negociación y con probabilidad $1 - \delta$ terminará el juego. Si, en

algún periodo, los negociantes llegan al acuerdo de compra- venta, al precio p, el comprador gana $p_C - p$ y el vendedor $p - p_V$. En cambio, si el juego termina sin acuerdo los dos ganan cero. Cuando se supone que la negociación tiene un límite en el número de periodos, estaríamos en un caso parecido al anterior, un juego infinito, sin "partidas" infinitas. Pero también podemos considerar que hay un número infinito de periodos (horizonte infinito). Esta suposición no deja de ser realista, aunque quizá parezca lo contrario, ya que, en diversos conflictos, son frecuentes las situaciones en las que algún jugador, al tomar decisiones, no puede saber cuando llegará el fin de un conflicto. El fin de algunos conflictos se ve tan lejano que bien puede considerarse infinito, aunque, en cada periodo, hay una probabilidad positiva de que el juego termine en ese momento. Por supuesto, la probabilidad de que continúe también es positiva. El modelo extensivo del juego es infinito (figura 2.2.11), pero la probabilidad de las partidas infinitas puede ser cero, como suele suceder en los juegos de negociación con horizonte infinito.

Bierman y Fernandez [3] realizan un interesante análisis sobre el desempleo involuntario utilizando una versión infinita del juego que llamamos el riesgo de contratar un holgazán. En este juego, el salario podría ser cualquier real positivo o quizá pertenecer a un intervalo. También, las opciones sobre el esfuerzo que puede realizar el empleado pueden modelarse en un intervalo y no solo como holgazán y trabajador. El ejemplo no tiene partidas infinitas.

Juegos extensivos infinitos, con información no perfecta

Cualquiera de los dos últimos juegos puede servir de base a un juego con información no perfecta. Por ejemplo, el de demandas triviales.

Ejemplo 2.2.13 (Demandas triviales con información no perfecta). Pensemos en el mismo conflicto anterior, con una diferencia. La empresa, al rechazar pagar la indemnización, considera la conveniencia de contratar o no a un abogado, antes de saber si el campesino se lanzará a juicio, pero no le informa a C si lo contrató o no. Entonces, cuando C debe decidir si desiste del juicio o sigue adelante con él, no está informado de si se enfrenta a una empresa que ya está asesorada por un abogado o no. En caso de juicio, C tendrá que pagar a un abogado y la empresa, sino lo ha hecho, también tendrá que hacerlo, ahora. Hay dos resultados posibles en caso de llegar a juicio i) el campesino gana cierta cantidad de dinero; ii) el campesino pierde y tiene que pagarle a la empresa. Cada uno de estos eventos ocurre con

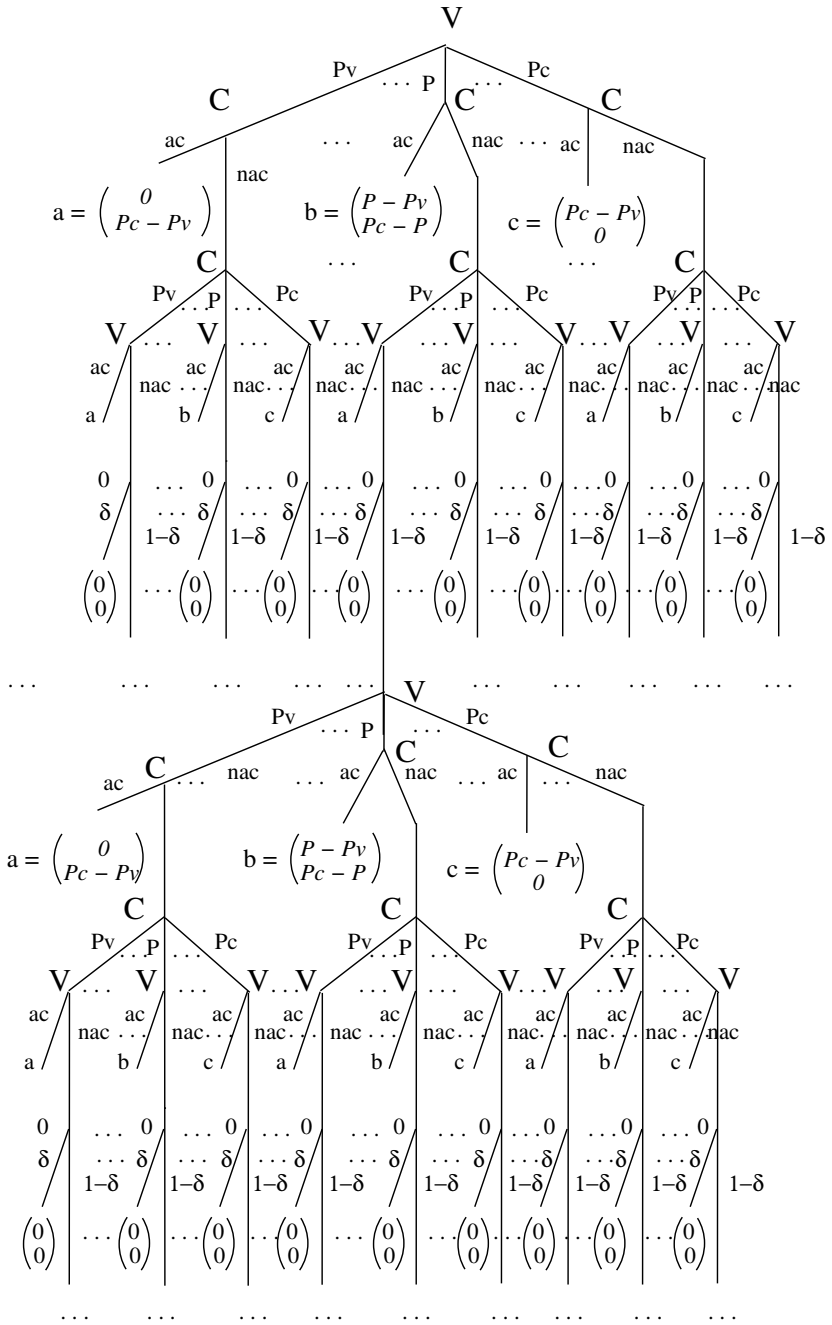

Figura 2.2.11:

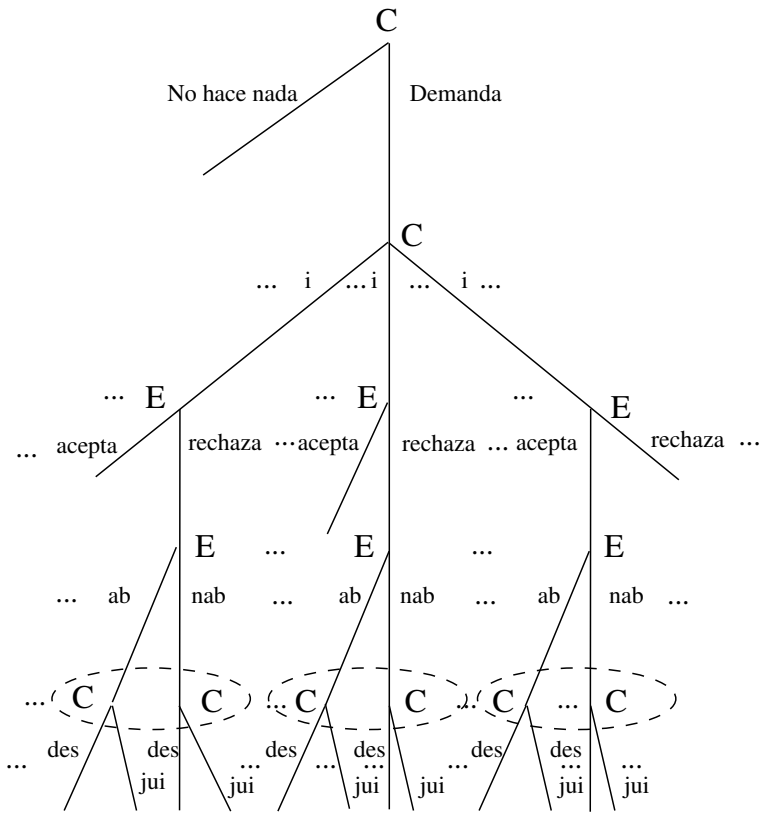

Figura 2.2.12:

cierta probabilidad que depende de que el abogado de la empresa esté o no contratado con anticipación (ver figura 2.2.12).

Un juego puede ser infinito en cuanto al número de jugadores. Esto puede parecer todavía menos realista que el supuesto de que el tiempo sea infinito. Pero es una forma efectiva para modelar, por ejemplo, la situación de los agentes en el mercado de competencia perfecta, ya que en un contexto de teoría de la medida se puede establecer que cada consumidor (y cada empresa) no tiene capacidad, por sí sólo, de afectar los precios. En este texto no abordaremos ese tema.

2.3. Gráficas y juegos extensivos

Algo de gráficas

Para introducir, informalmente, los modelos extensivos en los ejemplos anteriores hemos hecho uso de un tipo especial de gráfica que recibe el nombre de árbol con raíz. Esta gráfica es la parte medular en la definición de estos modelos. En esta sección, se introducen algunos conceptos de Teoría de Gráficas para arribar al concepto de árbol con raíz.

Una *gráfica* es una pareja (V, A), donde V es un conjunto y A es una subcolección de la colección de todos los subconjuntos de dos elementos de V. A V le llamaremos el conjunto de vértices y al conjunto A el de aristas.

Es decir, $A \subseteq \{\{x, y\} \mid x \text{ y } y \text{ están en } V\}$. Si V es un conjunto finito, se dice que la gráfica es finita.

Por ejemplo, en la figura 2.3.1 aparece la gráfica:

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$,

$A = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_3, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}, \{x_5, x_7\}, \{x_6, x_7\}\}$.

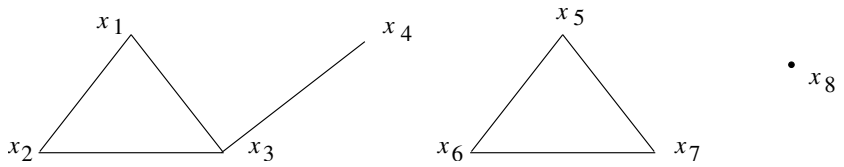

Figura 2.3.1:

Obsérvese que en una arista los vértices no tienen orden, mientras que en el concepto de gráfica dirigida que se define en 2.5.1, en las parejas de vértices hay uno inicial y otro final.

Dada una gráfica (V, A), una pareja (V^*, A^*), con $V^* \subseteq V$ y $A^* \subseteq A$, se dice que es una subgráfica de (V, A).

Una sucesión de vértices $\{v_1, v_2, ...\}$, que puede ser finita o infinita, es una trayectoria de (V, A), si $v_i \neq v_j$ cuando $i \neq j$ y $\{v_i, v_{i+1}\} \in A$ para toda i. Si $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$ es una trayectoria, decimos que ésta une a v_1 con v_s.

En el ejemplo de la figura 2.3.1, algunas trayectorias son:

$\{x_4, x_3, x_1\}$, $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_5, x_6, x_7\}$

Decimos que una gráfica es *conexa*, si para cada dos vértices u y v distintos existe una trayectoria que une a u con v.

La gráfica 2.3.1 no es conexa, ya que, por ejemplo, para los vértices x_3 y x_7 no existe una trayectoria que los una.

En cambio son conexas las gráficas (V', A') y (V'', A''), con
$V' = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $V'' = \{x_5, x_6, x_7\}$,
$A' = \{\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_1\}, \{x_3, x_4\}\}$ y
$A'' = \{\{x_5, x_6\}, \{x_6, x_7\}\}$
Ambas son subgráficas de (V, A).

Decimos que una *gráfica conexa no tiene ciclos*, si para toda pareja de vértices x y z, la trayectoria que los une es única.

Así (V'', A'') no tiene ciclos, mientras que (V', A') tiene ciclos, ya que, en esta última, dos trayectorias distintas, $\{x_1, x_2\}$ y $\{x_1, x_3, x_2\}$, unen a x_1 con x_2.

A una gráfica conexa y sin ciclos la llamamos un *árbol*.

En la figura 2.3.2 se representa el árbol (V, A) del juego del ejemplo 2.2.2.

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$ y

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_5\}, \\ \{v_3, v_7\}, \{v_5, v_8\}, \{v_5, v_9\}, \{v_7, v_{10}\}, \{v_7, v_{11}\} \end{array} \right\}$$

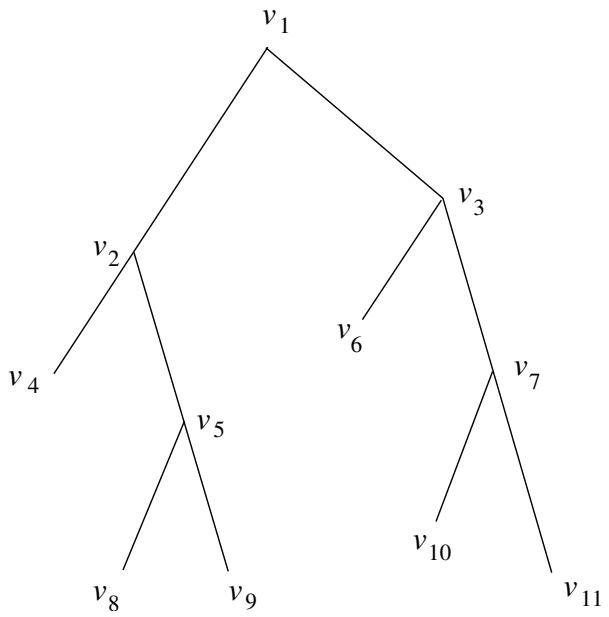

Figura 2.3.2:

El vértice v_1 juega un papel especial dentro del juego, pues representa el inicio de éste.

Un árbol Γ, en el que destacamos U, uno de sus vértices, es un *árbol con raíz* y se le denota como (Γ, U).

En un árbol con raíz U, se induce, en forma natural, un orden parcial entre sus vértices, de la manera siguiente, dado un vértice $v \neq U$, denotamos como $W(v)$ a la trayectoria que une a U con v y entonces decimos que *u es menor o igual* que v, $u \leq v$, si u está en $W(v)$. Claramente $\leq$ es reflexiva y transitiva y se cumple que si $u \leq v$ y $v \leq u$, entonces $u = v$, es decir, es antisimétrica. Por otro lado, dados v_1 y v, dos vértices distintos de un árbol con raíz, no necesariamente son comparables, es decir, puede ocurrir que v_1 no sea menor o igual que v y que tampoco v sea menor o igual que v_1. Por ejemplo, en el árbol de la figura 2.3.2 v_5 y v_{11} no son comparables. Por lo tanto, "$\leq$" es un orden parcial en el conjunto de vértices V.

Decimos que el vértice v_1 es estrictamente menor que el vértice v_2, $v_1 < v_2$, si v_1 está en $W(v_2)$ y $v_1 \neq v_2$.

En (Γ, U), con $\Gamma = (V, A)$ un árbol y U un vértice, el vértice z es una **alternativa** del vértice x, si $x < z$ y $\{x, z\}$ está en A. Denotaremos como $Alt(x)$ al conjunto de alternativas del vértice x. Además, z es un **vértice final** de (Γ, U), si su conjunto de alternativas es vacío. Usamos la letra T para denotar al conjunto de los vértices finales.

En 2.3.2 el conjunto de alternativas de v_5 es $\{v_8, v_9\}$. Mientras que el conjunto de vértices finales es $\{v_4, v_6, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$.

Una **partida** es una trayectoria maximal y, por lo tanto, empieza en la raíz. Una partida puede ser infinita. En un árbol con raíz finito, a cada vértice final z le corresponde una partida que sería $W(z)$ y, recíprocamente, a cada partida le corresponde un vértice final.

Definición de Juego Extensivo

Recordemos el juego de las negociaciones de un sindicato (ejemplo 2.2.7). En la figura 2.3.3, aparece el árbol del juego, (V, A), sin adornos (etiquetas, probabilidades, conjuntos de información, pagos), lo denotamos como Γ.

$V = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{49}, x_{50}, x_{51}\}$ y

$A = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_4\} ..., \{x_{39}, x_{51}\}\}$.

$$T = \left\{ \begin{array}{c} x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{16}, x_{18}, x_{20}, x_{21}, \\ x_{26}, x_{29}, x_{30}, x_{31}, x_{32}, x_{35}, x_{36}, x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, \\ x_{43}, x_{44}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{48}, x_{49}, x_{50}, x_{51} \end{array} \right\}$$

Pero en un modelo extensivo aparecen más elementos que el árbol con raíz. La figura 2.2.7, donde se modela la historia del ejemplo que tiene como árbol el de la figura 2.3.3.

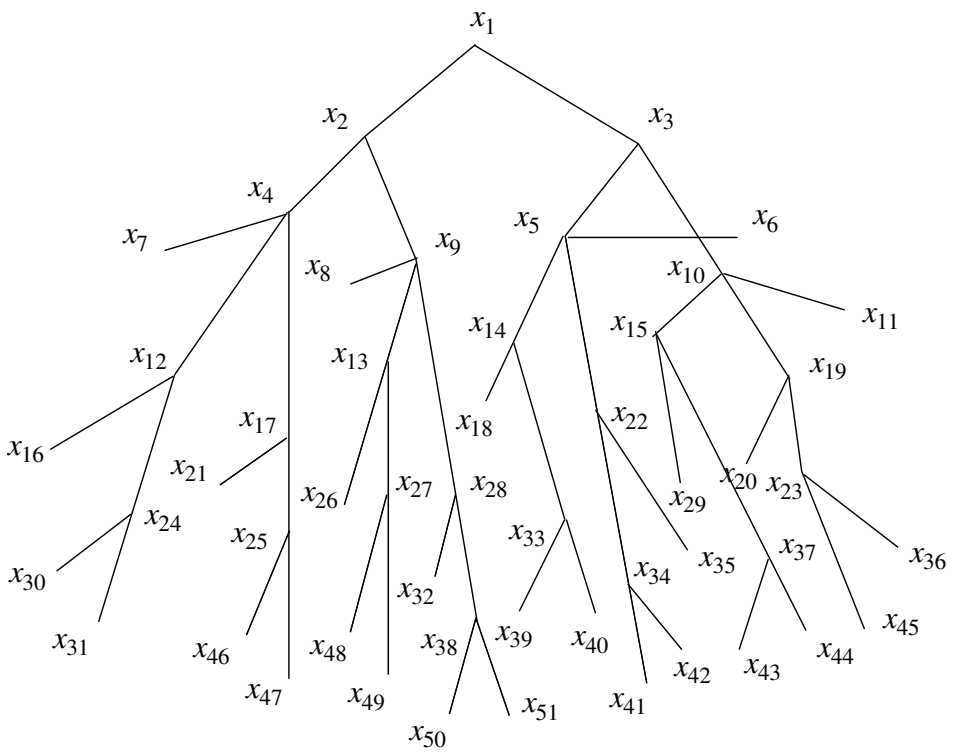

Figura 2.3.3:

Enumeramos los elementos del modelo completo:

♦ Los vértices no finales tienen una etiqueta que especifica si es una jugada de azar (etiqueta 0) ó cual de los jugadores debe decidir (etiqueta con número o nombre del jugador). Por ejemplo, el jugador *SIN* decide en los vértices $x_2, x_3, x_{12}, x_{13}, x_{14}$, $x_{15}, x_{17}, x_{19}, x_{16}$ y x_{28}, mientras que el jugador *EM* decide en x_4, x_5, x_9 y x_{10}. Los vértices de azar son todos los demás vértices no finales.

♦ Dado un vértice de azar, por ejemplo x_{33}, está definida la probabilidad de que el juego pase a cada una de las alternativas de este vértice. $Alt\,(x_{33}) = \{x_{39}, x_{40}\}$. Por ejemplo, la probabilidad de que el juego pase a x_{39}, supuesto que ha llegado a x_{33}, es $\frac{1}{3}$, mientras que la de pasar a x_{40} es $\frac{2}{3}$.

♦ Por otro lado, los jugadores *SIN* y *EM* no siempre reconocen en que situación se encuentran cuando, les toca tomar decisiones. Así, *SIN* no puede distinguir entre x_2 y x_3 y, por eso mismo, confunde entre pedir un salario de 100 pesos diarios cuando está en x_2 con pedir esos 100 pesos estando en x_3. Otros vértices que confunde *SIN* son los de las parejas que están

en cada uno de los conjuntos $\{x_{12}, x_{14}\}$, $\{x_{13}, x_{15}\}$, $\{x_{17}, x_{22}\}$ y $\{x_{19}, x_{28}\}$. En cada una de estas parejas de vértices, SIN no conoce en cuál de ellos está y debe decidirse por uno de los elementos del conjunto de "índices" {aceptar la contraoferta, lanzarse a la huelga}, sin tener esa información. Por su lado, el jugador EM confunde los vértices del conjunto $\{x_4, x_5\}$ y, por otro lado, los de $\{x_9, x_{10}\}$. El primer conjunto representa que E ha recibido una exigencia salarial de 100 pesos diarios y no sabe como están las condiciones en la opinión pública y entonces tiene que escoger alguno de los elementos del conjunto {aceptar la exigencia de 100, ofrecer 40 pesos, ofrecer 50 pesos}. Análogamente, cuando ha recibido una exigencia de 50 pesos estaría en alguno de los vértices de $\{x_9, x_{10}\}$ y tiene que escoger entre los elementos de {aceptar pagar los 50, ofrecer 40 pesos, ofrecer 30 pesos}. Una observación es que el modelo extensivo postula que ningún jugador puede confundir dos vértices que estén en la misma partida.

♦ Por último, en cada vértice final hay un pago para cada jugador, por ejemplo, en el vértice x_7 tenemos un pago de 100 pesos para SIN y cero para EM y en el vértice x_8, 50 pesos para cada jugador.

La definición de juego extensivo que recoge todos estos elementos, se debe a von Neumann, Morgestern [55] y Kuhn [30] y es la siguiente:

Definición 2.3.1. Un juego extensivo con conjunto de jugadores N consta de:

a) Un conjunto N de jugadores.

b) Un árbol con raíz (Γ, U), tal que para cada vértice v, $\mathrm{Alt}(v)$ o tiene más de un elemento o es vacío.

c) Una partición de los vértices no finales en una colección de subconjuntos $S^0, \{S^j\}_{j \in N}$, de tal manera que existe una biyección entre dicha colección de subconjuntos y el conjunto $N \cup \{0\}$, el conjunto S^j es el conjunto de vértices del jugador j en N y S^0 es el conjunto de jugadas de azar.

d) Para cada vértice v de S^0, una distribución de probabilidad positiva definida en $\mathrm{Alt}(v)$, y que la denotamos como $P(\,|\,v)$.

e) Para $j \neq 0$, una partición de S^j en una colección de subconjuntos $\{S_k^j\}$ tales que

   e$_1$) para S_k^j, existe I_k^j y para todo v en S_k^j una biyección $\iota : \mathrm{Alt}(v) \to I_k^j$.

e$_2$) si v y z están en S_k^j, entonces v no es mayor que z y z no es mayor que v.

Dichos subconjuntos S_k^j se llaman los conjuntos de información del jugador j.

f) Para cada $j \in N$, una función de pago π_j definida del conjunto de partidas en R. El conjunto de partidas de Γ, se denota como Υ.

Todos los ejemplos de la sección 2.2 son juegos extensivos.

Decimos que un juego extensivo es **finito**, si V y N son finitos.

Decimos que un juego extensivo es de **información perfecta**, si para cada jugador $j \in N$, cada S_k^j consta de un sólo elemento.

Decimos que un juego extensivo es **sin azar**, si $S_0 = \emptyset$.

Para utilizar los conceptos de probabilidad más elementales, en este texto suponemos que S_0 es finito.

En muchos juegos extensivos, es posible pensar en algunas de las "partes" de estos, las que continúan a un vértice no final, como juegos extensivos. Por ejemplo, en los juegos de información perfecta, cada una de estas partes es a su vez un juego extensivo.

Pensemos en la versión **??** de las demandas triviales. Denotaremos a esta versión del juego como Γ. La figura del juego se puede observar en 2.3.4. Supongamos que los pagos están bien definidos. Pongamos atención en el vértice X. Podemos pensar en el juego extensivo cuyo árbol es $(V_X,\ A_X)$, con $V_X = \{Y \in V \,|Y \geq X\}$, mientras que las aristas son aquellas de Γ que unen vértices de V_X y la raíz es X. Los conjuntos de vértices de los jugadores, los de información, los de azar, con las probabilidades correspondientes y la función de pago se heredan de Γ. Tenemos un juego extensivo en el sentido de la definición 2.3.1 que se denotará como Γ_X. Lo mismo se podría hacer en los vértices Y_i y en los Z_i.

Dado un juego extensivo y un vértice no final X, no siempre se puede hacer lo anterior. Podría suceder que algunos vértices mayores o iguales que X pertenezcan al mismo conjunto de información que vértices que no son mayores o iguales que X. Entonces, no podemos aspirar a que V_X con las herencias del juego original formen un juego extensivo, pues necesitamos de vértices que no pertenecen a V_X para completar la estructura de información. En el ejemplo que hemos estado discutiendo, el juego no se pude cortar en ninguno de los vértices en que C tiene que decidir si se va a juicio o no lo hace.

Precisemos las ideas que acabamos de discutir con las siguientes definiciones.

Definición 2.3.2. Decimos que el juego Γ se descompone o se corta en el vértice no final X, si para toda $Y \geq X$, con $Y \in S_k^j$ y $Z \in S_k^j$, entonces $Z \geq X$.

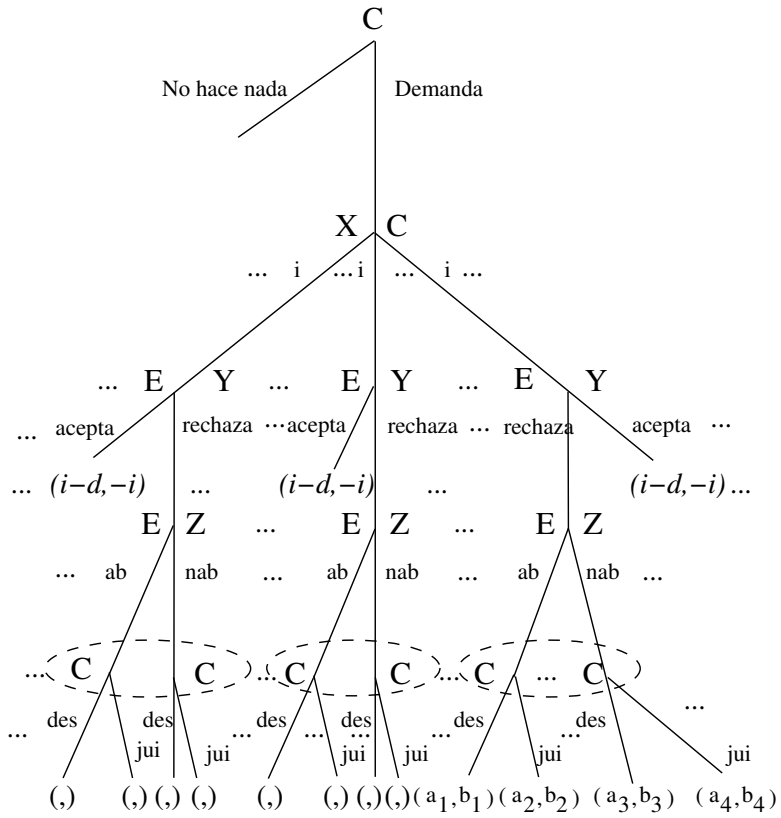

Figura 2.3.4:

Definición 2.3.3. Si Γ se descompone en X, el subjuego de Γ con raíz X es el juego extensivo Γ_X tal que

i) tiene como árbol a (V_X, A_X) y como raíz a X, donde

$$V_X = \{Y \in V \,|Y \geq X\}, \; A_X = \{\{Y, Z\} \in A \,|Y \geq X \text{ y } Z \geq X\};$$

ii) $S_X^0 = \{Y \in S^0 \,|Y \geq X\}$, si $Y \in S_X^0$, para toda $Z \in Alt\,(Y)$, $P_X\,(Z\,|Y\,) = P\,(Z\,|Y\,)$;

iii) para toda $j \in N$, $S_X^j = \{Y \in S^j \,|Y \geq X\}$. Si $S_X^j \neq \emptyset$, $\forall\, S_k^j \in \left\{S_i^j\right\}$, $S_k^j = S_{Xi}^j$ o $S_k^j \cap V_X = \emptyset$;

iv) para cada τ, partida de Γ que contiene a X, consideramos $\tau_X = (\tau - W\,(X)) \cup \{X\}$.

Para cada j: i) Si τ_X es finito y z es el vértice final correspondiente, entonces $\pi_{X_j}\,(z) = \pi_j\,(z)$. ii) Si τ_X es infinita $\pi_{X_j}(\tau_X)$ es $\pi_j(\tau)$ menos el pago acumulado hasta X.

Un interés de los subjuegos se debe a que podremos analizar por partes el juego. Supongamos que el juego del ejemplo **??** está completo (es decir, en los paréntesis vacíos tenemos pagos) y que hemos analizado el subjuego Γ_{Z^*} (figura 2.3.5), ¿cómo continuar el análisis? Pensaremos en el resto del juego, casi como otro juego. Es decir, borramos de Γ todos los vértices mayores que Z^*, conservando para todos los demás vértices de Γ, los elementos del juego en que están involucrados (aristas, conjuntos de jugador y de azar, conjuntos de información, probabilidades, pagos). Tendríamos así casi un tercer juego, excepto porque Z_1 se ha convertido en un vértice final, pero no tiene un pago asignado (figura 2.3.6).

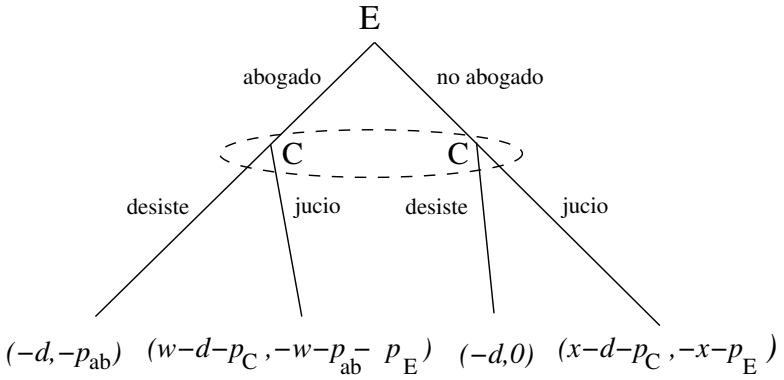

Figura 2.3.5:

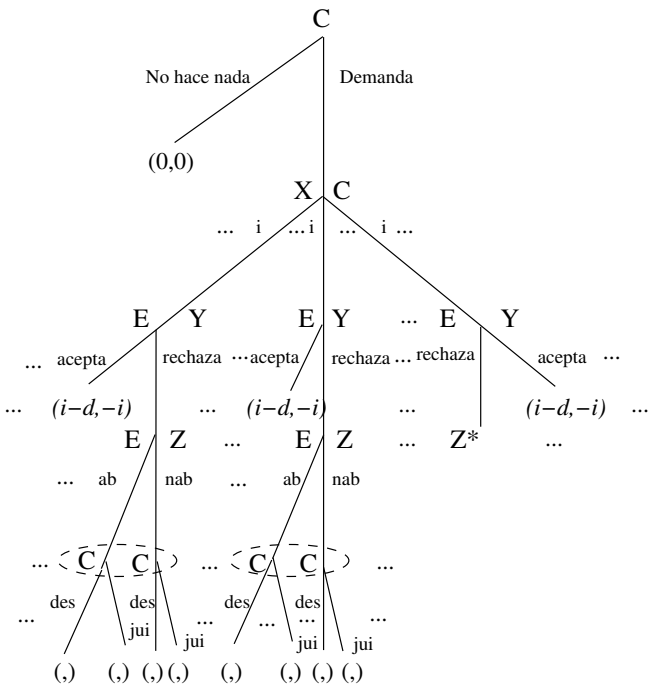

Figura 2.3.6:

Definición 2.3.4. Si Γ se descompone en X y $d \in R^N$ es un vector de pago, $\Gamma\,|X\,(d)$, el juego podado en X con vector de pago d, en dicho vértice, es el juego extensivo tal que,

i) tiene como árbol a $(V\,|X,\ A\,|X\,)$ y como raíz a U,
donde $V\,|X\ = \{Y \in V\,|Y \not> X\,\}$ y
$A\,|X\ = \{\{Y, Z\} \in A\,|Y$ y Z están en $V\,|X\,\}$;

ii) $S\,|X^{\,0} = \left\{Y \in S^0\,|Y \not> X\,\right\}$, si $Y \in S\,|X^{\,0}$;
para toda $Z \in Alt\,(Y)$, $P\,|X\ (Z\,|Y\,) = P\,(Z\,|Y\,)$;

iii) para toda $j \in N$, $S\,\big|X^j\ = \left\{Y \in S^j\,|Y \not> X\,\right\}$. Si $S\,\big|X^j \neq \emptyset$, para todo conjunto S^j_k en $\left\{S^j_i\right\}$, $S^j_k = S\,|X^{\,j}_{\,i}$ o $S^j_k \cap V\,|X\ = \emptyset$;

iv) $\Upsilon\,|X = (\Upsilon - \Upsilon_X) \cup W\,(X)$, donde $\Upsilon_X = \{\tau_X \mid \tau \in \Upsilon$ y $X \in \tau\,\}$.

Además, $\pi\,|X$ es la restricción de π para el conjunto de partidas de $\Gamma\,|X\,(d)$ distintas de $W\,(X)$ y $\pi\,|X\ (W\,(X)) = d$.

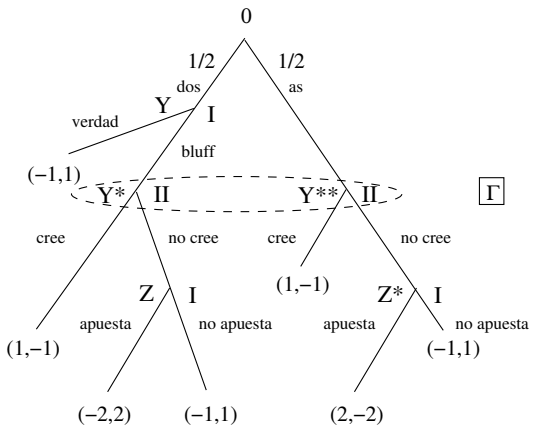

Figura 2.3.7:

Usamos la notación $\Gamma\,|X$ para el árbol de cualquier juego Γ podado en X, es decir, sin importar el vector de pago asignado en X. $\Gamma\,|X\,(d)$ denota el juego Γ podado en X y con el vector de pago d en el vértice final X.

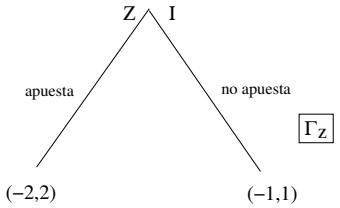

Figura 2.3.8:

Es claro que un juego Γ no se descompone en X, si existe otro Y en su conjunto de información. Un juego de información perfecta se puede cortar en cualquiera de sus vértices no finales.

El subjuego Γ_{Z^*} y el casi juego $\Gamma\,|Z^*$ (del ejemplo 2.2.13 de demandas triviales) se pueden observar en las figura 2.3.5 y 2.3.6.

El juego del póker simplificado (Ejemplo 2.2.8) que se ilustra en la figura 2.3.7 no se puede descomponer en Y ni en Y^* , pero se puede descomponer en Z y en Z^* y, entonces, se pueden construir Γ_Z, $\Gamma\,|Z(d)$, $\Gamma\,|Z(d)_{Z^*}$, $\Gamma\,|Z(d)\,|Z^*(d')$ (figuras 2.3.8–2.3.10).

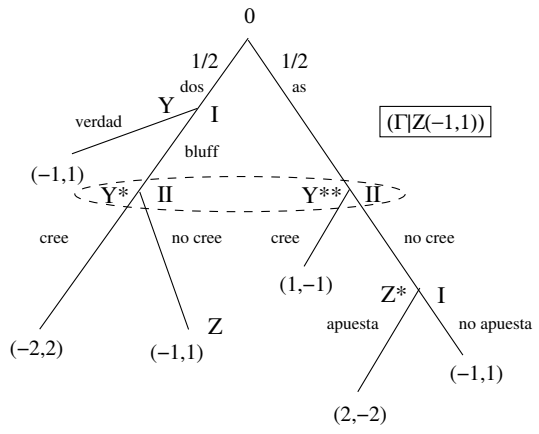

Figura 2.3.9:

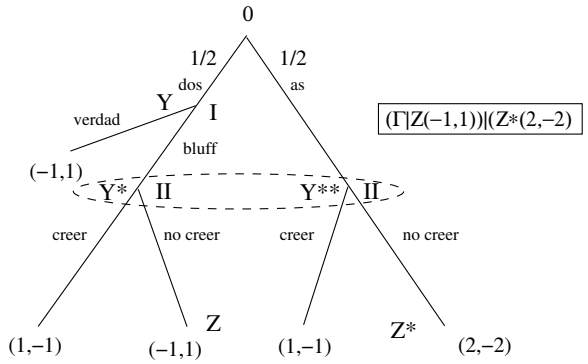

Figura 2.3.10:

2.4. ¿Posición o Historia?

El concepto de juego extensivo que hemos estudiado a lo largo de este capítulo fue introducido por von Neumann y Morgenstern y desarrollado por Kuhn. Como hemos estado insistiendo, este concepto aporta más recursos para el análisis de muchos conflictos reales que otros conceptos como, por ejemplo, el de juego rectangular. Sin embargo, a pesar de ello, desde el punto de vista de una persona que se acerca por primera vez a la Teoría de Juegos, el concepto de juego extensivo está lejos de ser intuitivo.

Uno desearía que, en el modelo extensivo del Ajedrez, una distribución posible de las piezas y el señalamiento del jugador al que le corresponde

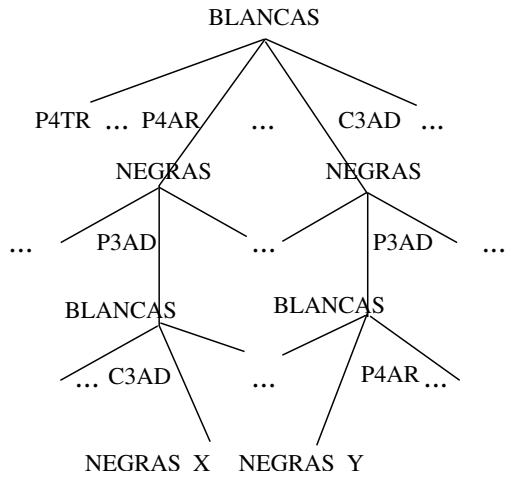

Figura 2.4.1:

"tirar", es decir, lo que podríamos llamar una posición del juego, se representara, en el modelo, por un solo vértice, pero esto no es así. Por ejemplo, imaginemos que se han realizado las tres jugadas siguientes:

BLANCAS	NEGRAS
P4AR	P3AD
C3AD	

El juego habría llegado exactamente a la misma posición que si las jugadas se hubieran desarrollado de esta otra manera:

BLANCAS	NEGRAS
C3AD	P3AD
P4AR	

El modelo extensivo de Kuhn reserva un vértice distinto para cada uno de los dos desarrollos o historias del juego, aunque estos hayan llevado a la misma posición. Otra forma de describir el juego, utilizando otro tipo de gráficas, sería asignar a cada vértice, una distribución de piezas en el tablero junto con el señalamiento del jugador al que le toca "tirar". En las figuras 2.4.1 y 2.4.2 se compara, sólo para las tres "tiradas" anteriores, el modelo extensivo con la nueva gráfica propuesta.

Consideremos las mismas dos formas de describir un juego completo, con un ejemplo mucho más simple que el Ajedrez.

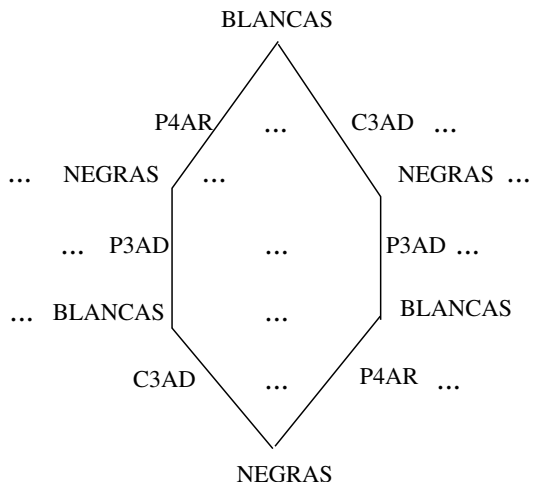

Figura 2.4.2:

Ejemplo 2.4.1 (El juego de los cerillos). Se coloca una hilera de n cerillos y dos jugadores se van turnando para levantar 1, 2 ó 3 cerillos, el que levanta el último pierde.

En las figuras 2.4.3 y 2.4.4 se ilustran las dos formas de describir el juego, cuando $n = 5$. La primera es uno de nuestros juegos extensivos, a la segunda la bautizaremos con el nombre de **Juego de Posiciones**, en esta sección la definiremos en forma precisa.

Los vértices de un juego de posiciones representan las posiciones posibles dentro del juego estudiado. En cambio, en un juego extensivo, los vértices representan las "historias" posibles, desde el inicio del juego, hasta una "posición" dada. Esto hace que el número de vértices de un modelo extensivo para cualquier situación algo complicada sea enorme, inmanejable aún para una computadora. Pero, a pesar de ello, como se observa al comparar las figuras, la segunda gráfica, que es un árbol, es mucho más sencilla y de ahí la mayor atracción teórica del modelo extensivo.

Proponemos, en esta sección, la definición de juego de posiciones que, al apegarse más a la intuición, puede jugar un papel didáctico para aclarar el concepto de juego extensivo. Mostramos, también, que realmente los dos modelos resultan equivalentes. Los Juegos de Posiciones tienen interés en sí mismos y pueden ser un instrumento para construir algoritmos que resuelvan algunos juegos, pero no abordaremos esta última problemática.

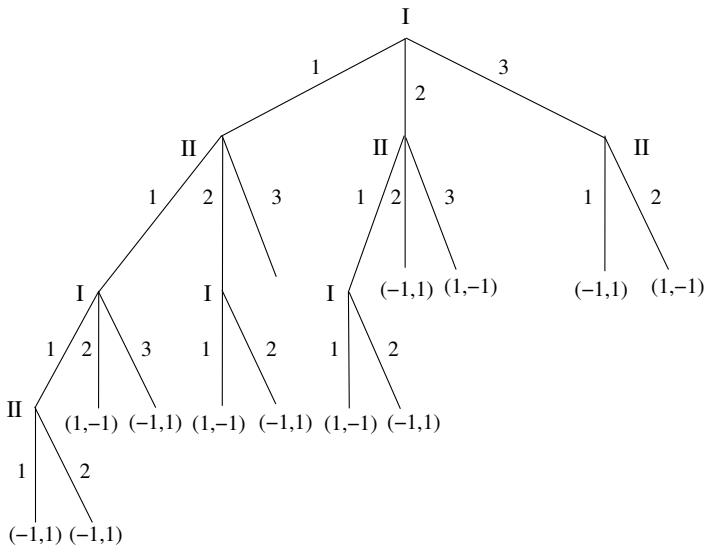

Figura 2.4.3:

Juegos de Posiciones

Empecemos por considerar a los juegos de salón como el Ajedrez, el Póker, el Bridge, el Go, el Dominó, etc.

Cada uno de estos juegos consiste de multitud de posiciones. En algunas de éstas, uno de los jugadores debe tomar una decisión, en otras, entra en acción algún mecanismo de azar, como "tirar unos dados", "revolver las cartas de la baraja", etc., por último, otras posiciones corresponden al final del juego.

Si un juego ha llegado a una posición $\overline{X}$ y puede pasar a otra $\overline{Y}$, ya sea por una decisión de uno de los jugadores o debido al funcionamiento de un mecanismo de azar, diremos que la posición $\overline{Y}$ sucede inmediatamente a la posición $\overline{X}$ y podemos simbolizarla como $\overline{X} \rightsquigarrow \overline{Y}$.

Por ejemplo, en el juego de posiciones para los cerillos ilustrado en la figura 2.4.4, podríamos escribir $\overline{X} \rightsquigarrow \overline{Y}$, donde $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son, respectivamente, las posiciones señaladas como $II(3)$ y $I(2)$. La primera $II(3)$ significa "hay tres cerillos y le toca tirar a II", la segunda $I(2)$ significa "hay dos cerillos y le toca a I". Las reglas del juego permiten pasar de la primera a la segunda. También si $\overline{\overline{Y}} = I(1)$, $\overline{X} \rightsquigarrow \overline{\overline{Y}}$, etc.

Una sucesión finita o infinita de posiciones $\overline{X}_0$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ... es una historia posible a partir de $\overline{X}_0$ o simplemente una historia a partir de $\overline{X}_0$

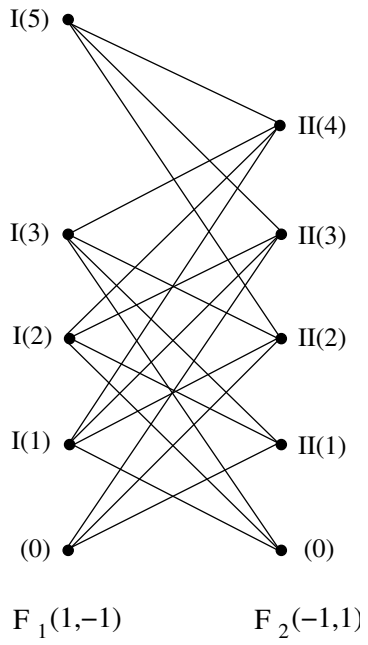

Figura 2.4.4:

si $\overline{X}_{i-1} \rightsquigarrow \overline{X}_i$, para $i = 1, 2, \ldots$ En el juego de los cerillos podemos tomar $\overline{X}_0 = I(5)$, $\overline{X}_1 = II(3)$, $\overline{X}_2 = I(1)$, $\overline{X}_3 = F_2\ (0)$ es un ejemplo de historia posible, desde el inicio del juego, hasta una posición final, una partida.

La posición $\overline{X}$ conduce a $\overline{Y}$ (en símbolos $\overline{X} \leq \overline{Y}$) si existe una historia finita $\overline{X}_0$, $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$, ... , $\overline{X}_r$ con $\overline{X}_0 = \overline{X}$ y $\overline{X}_r = \overline{Y}$.

En la gran mayoría de los juegos de salón existen reglas para impedir que se pase más de una vez por una misma posición. Por ello, admitiremos que si $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{Y} \leq \overline{X}$ entonces $\overline{X} = \overline{Y}$.

Llegamos así a nuestros primeros requerimientos para definir un Juego de Posiciones:

En primer lugar, un Juego de Posiciones J consta de un conjunto P llamado de posiciones, en el cuál, se encuentra definida una relación "$\rightsquigarrow$" (que leeremos "seguida inmediatamente de") tal que se cumplen los siguientes axiomas:

Axioma 2.4.1. Si $\overline{X} \rightsquigarrow \overline{Y}$, entonces $\overline{X} \neq \overline{Y}$.

Axioma 2.4.2. Si $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{Y} \leq \overline{X}$, entonces $\overline{X} = \overline{Y}$ (en donde la relación "$\leq$ " está definida como arriba).

Es fácil demostrar, desde la definición, que la relación " $\leq$ " es reflexiva y transitiva y, por el axioma 2.4.2, es también antisimétrica. Por tanto constituye un orden parcial para P.

Si $\overline{X}$ es una posición del juego, el conjunto de las alternativas correspondientes a esa posición, $\{\overline{Y} \in P \,|\, \overline{X} \rightsquigarrow \overline{Y}\}$, se denotará como $\overline{Alt}(\overline{X})$.

Nos limitaremos al caso en que, para toda posición $\overline{X}$, el conjunto $\overline{Alt}(\overline{X})$ es vacío ó tiene un número de elementos finito y mayor que uno.

Diremos que una posición $\overline{Z}$ es final si $\overline{Alt}\ (\overline{Z})$ es vacío.

Esta condición es equivalente a decir que $\overline{Z}$ es de tal manera que $\overline{Z} \leq \overline{X}$ implica $\overline{X} \leq \overline{Z}$.

El conjunto de todas las posiciones finales será denotado con la letra F.

En el juego de los cerillos, $F = \{F_1(0), F_2(0)\}$.

A las posiciones que no están en F las llamaremos disyuntivas. Al conjunto de disyuntivas lo denotaremos como D. Nótese que $D = P - F$.

Como decíamos antes, al llegar el juego a algunas de las disyuntivas $\overline{X}$, se pone en funcionamiento un mecanismo de azar que determina a cual de las posiciones del conjunto $\overline{Alt}(\overline{X})$ pasará el juego.

Esto nos conduce a nuestro:

Axioma 2.4.3. Existe un subconjunto $R^0 \subset D$, tal que para cada $\overline{X}$ en R^0 se tiene una distribución de probabilidad positiva en $\overline{Alt}(\overline{X})$.

Nuestro socorrido ejemplo de los cerillos es un juego sin azar y de información perfecta. Adelantándonos a la definición de juego de posición, recurramos al juego del contento cuya historia se relata en el ejemplo 2.2.10 y cuya gráfica cómo Juego de Posiciones aparece en la figura 2.4.5 (el modelo extensivo está en la figura 2.2.9). Este juego sí tiene posiciones de azar que son la inicial $\overline{I}$ y, además, $\overline{Z}\,(3,1)$, $\overline{Z}\,(3,2)$, y $\overline{Z}\,(2,3)$. La notación $\overline{Z}\,(i,j)$ significa que la repartición de cartas en ese momento está dada por (i,j) y el jugador dos, como no estaba contento con la carta j, prefirió que hubiera una jugada de azar. Las posiciones $\overline{Z}\,(2,1)$, $\overline{Z}\,(1,2)$ y $\overline{Z}\,(1,3)$ no aparecen, pues al realizarse en ellas la jugada de azar, saldría ganador en ambas posibilidades, el jugador dos y por lo tanto la única posición que sigue a ellas es G_1 y no hay propiamente una jugada de azar.

$\overline{Alt}(\overline{I}) = \{(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(2,3)\,,(3,1)\,,(3,2)\,,G_1,G_2\}$, la probabilidad correspondiente a cada una de las seis primeras es $\frac{1}{12}$ y a cada una de las dos últimas es $\frac{1}{4}$.

$\overline{Alt}\left(\overline{Z}\,(3,1)\right) = \overline{Alt}\left(\overline{Z}\,(3,2)\right) = \overline{Alt}\left(\overline{Z}\,(2,3)\right) = \{G_1,G_2\}$, la probabilidad correspondiente a cada una es $\frac{1}{2}$.

Pasemos, ahora, al problema de las decisiones de los jugadores. Si $\overline{X}$ está en $D - R^0$, $\overline{X}$ es una disyuntiva para algunos de los jugadores.

Axioma 2.4.4. Existe una partición del conjunto $D - R^0$ en n subconjuntos

$$R^1, R^2, ..., R^n.$$

El subconjunto R^j será llamado el conjunto de las disyuntivas del jugador j.

¿Cómo expresar la información que tienen los jugadores?. Al igual que en los juegos extensivos, nos preocupa introducir, en el modelo de posiciones, el hecho de que, en algunos juegos, existen posiciones distintas $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ en R^j tales que, al llegar a alguna de las dos, j no es capaz de distinguir en cual de ellas está, pues los datos que ha recibido del desarrollo del juego no se lo permiten. En este caso escribiremos $\overline{X} \sim \overline{Y}$ y leeremos "j identifica la posición $\overline{X}$ con la $\overline{Y}$". La relación "$\sim$" es claramente una relación de equivalencia. Además, si ocurre que el jugador j identifica $\overline{X}$ con $\overline{Y}$, debe confundir cada alternativa de $\overline{Alt}(\overline{X})$ con alguna de las alternativas de $\overline{Alt}(\overline{Y})$. Es decir, establece una correspondencia entre los elementos de $\overline{Alt}(\overline{X})$ y los de $\overline{Alt}(\overline{Y})$.

En los juegos que hemos estado discutiendo, cada jugador j es un individuo ó un equipo formado por varios individuos. En este último caso, cada clase de R^j se considerará asignada a uno solo de los componentes del equipo. Por esta razón si $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ están en R^j, con $\overline{X} \neq \overline{Y}$, no puede ocurrir simultáneamente que $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y que $\overline{X} \sim \overline{Y}$.

Todas estas consideraciones nos conducen a los siguientes axiomas adicionales.

Axioma 2.4.5. Para cada jugador j, se tiene una relación de equivalencia "$\sim$" en el conjunto R^j. Para cada clase de equivalencia R^j_k correspondiente a dicha relación, se tiene un conjunto I^j_k tal que para cada $\overline{X}$ en R^j_k existe una correspondencia biunívoca que a cada $\overline{Y}$ de $\overline{Alt}(\overline{X})$ le asocia un elemento de I^j_k .

Axioma 2.4.6. Si $\overline{X}$ y $\overline{Y}$ son dos posiciones distintas que están en R^j, no pueden cumplirse simultáneamente las relaciones $\overline{X} \leq \overline{Y}$ y $\overline{X} \sim \overline{Y}$.

Finalmente consideremos la cuestión de los pagos:

Axioma 2.4.7. Se tiene una función de pago $\rho : P \to R^n$ llamada la función de pago.

Para cada $\overline{X}$ en P, la componente j-ésima $\rho^j(\overline{X})$ del vector $\rho(X)$ se llama el pago que recibe el jugador j, si el juego llega a la posición $\overline{X}$.

Un juego de posiciones J tiene un inicio, si se cumple el siguiente axioma adicional.

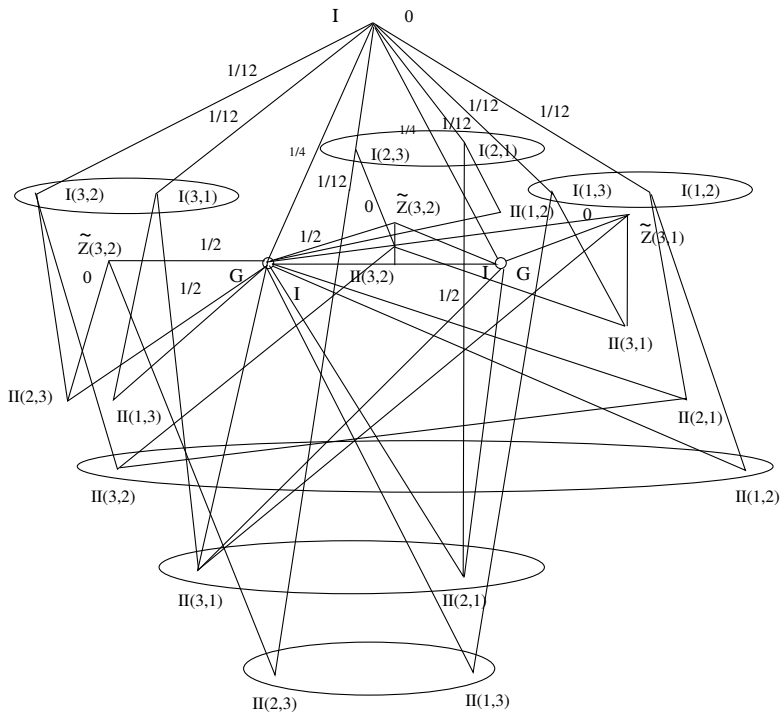

Figura 2.4.5:

Axioma 2.4.8. Existe $\overline{U}$ en P tal que para toda $\overline{X}$ en P, $\overline{U} \leq \overline{X}$.

En este caso, $\overline{U}$ se llamará la posición inicial que, claramente es única. Consideraremos juegos en que $P \neq \{\overline{U}\}$.

En un juego de posiciones se cumplen los axiomas 2.4.1–2.4.8.

En la figura 2.4.5 se representa el juego de posiciones correspondiente al juego del contento.

A las historias posibles desde la posición inicial las llamaremos simplemente historias.

Una historia es una partida si es maximal, en particular, si conduce a una posición final.

En un juego de posiciones está involucrada una gráfica, (P, B), donde $B = \{\{\overline{X}, \overline{Y}\} \,|\, \overline{X}$ y $\overline{Y}$ *están en* P *y* $\overline{X} \rightsquigarrow \overline{Y}$ *o* $\overline{Y} \rightsquigarrow \overline{X}\}$. Esta gráfica no es necesariamente un árbol, aunque a veces puede serlo. Este último caso, ocurre cuando no existen en el juego historias distintas que lleven a la misma posición. Los juegos de posiciones de los ejemplos del contento y del juego de los cerillos, con $n \geq 5$, dan lugar a gráficas que no son árboles.

Los Juegos de Posiciones y los Juegos Extensivos.

Consideremos J un juego de posiciones con inicio $\overline{U}$. Veremos que podemos asociarle un juego extensivo Γ que lo represente.

Lo primero que construiremos será el conjunto de vértices V.

Ya habíamos observado que, en un juego extensivo, los vértices son, en cierto sentido, historias de desarrollo del juego. Basémonos, entonces, en la definición precisa de historia que existe en los Juegos de Posiciones para construir nuestro conjunto de vértices. Diremos que v es un elemento de V, es decir un vértice, si es una historia finita de J.

Entonces, si v está en V, v es una sucesión finita de posiciones

$\{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_l\}$ tal que $\overline{X}_0 = \overline{U}$ y $\overline{X}_i \rightsquigarrow \overline{X}_{i+1}$ para $i = 0, 1, ..., l-1$.

Tenemos, ahora, que hablar de aristas y, como para que una historia esté unida a otra a través de una arista, las dos deben ser casi iguales excepto por el último elemento de una de ellas, diremos que dos vértices u y v forman una arista, $\{u, v\} \in A$, si son tales que

$u = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_l\}$ y $v = \{\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, ..., \overline{Y}_s\}$ con $l = s+1$ ó $s = l+1$ y, además, $\overline{X}_i = \overline{Y}_i$, para $i = 0, 1, ..., d-1$ y $\overline{X}_l \leq \overline{Y}_s$, si $d = s$ ó $\overline{Y}_s \leq \overline{X}_l$, si $d = l$ ($d = \text{máx}\{l, s\}$. Entonces, A denotará nuestro conjunto de aristas.

Es importante, si queremos seguir adelante, que la gráfica (V, A) que hemos construido sea un árbol.

Proposición 2.4.1. (V, A) *es un árbol.*

Demostración. Sean u y v en V. Entonces,

$u = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_l\}$ y

$v = \{\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, ..., \overline{Y}_s\}$. $\overline{U} = \overline{X}_0 = \overline{Y}_0$.

Hacemos $u_0 = \{\overline{X}_0\}$, $u_1 = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1\}$, $u_2 = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2\}$, ...,

$u_l = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_l\} = u$ y

$v_1 = \{\overline{Y}_0, \overline{Y}_1\}$, $v_2 = \{\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2\}$, ...,

$v_s = \{\overline{Y}_0, \overline{Y}_1, ..., \overline{Y}_s\} = v$.

Las $u$es y las $v$es son historias, es decir vértices y son distintas dos a dos. Por la forma que tienen, es evidente que si las ordenamos en una sucesión adecuada, a saber

$$g = \{u_l, u_{l-1}, ..., u_1, u_0, v_1, v_2, ..., v_s\},$$

obtenemos una trayectoria que une a u con v. Por lo que (V, A) es conexa.

Claramente g es la única trayectoria que une a u con v. Es decir (V, A) es un árbol. ∎

Tomamos como raíz del árbol que hemos construido a $U = \{\overline{U}\}$.

Como la raíz induce un orden parcial entre los elementos de V, podemos definir el conjunto de alternativas de un vértice y los vértices finales de Γ. Estos últimos serán aquellos cuyo conjunto de alternativas es vacío y corresponden a las historias que unen el inicio del juego J con uno de los vértices finales de dicho juego.

¿Cómo asignar etiquetas de jugador o de azar a un vértice no final que es una sucesión de posiciones cada una con su etiqueta respectiva? Pues le asignaremos la etiqueta de la última posición de la historia. Dicha posición no es final por lo que J le otorgó una etiqueta. O lo que es lo mismo, para $i = 0, 1, 2, ..., n$, S^i consta de todas las historias que terminan en posiciones de R^i.

Cuando v es un vértice de azar, es decir, cuando su posición final $\overline{X}_m$ está en R_0, sus alternativas son historias con una posición más que $\overline{X}_m$ y dichas posiciones son alternativas de $\overline{X}_m$ en J y, por lo tanto, tienen asignada una probabilidad. En Γ, esta misma probabilidad se asignará a la alternativa que la contiene.

En cuanto a cómo heredar el problema de la información, desde J hasta Γ, podemos proceder de la manera siguiente. Es claro que cada vértice v que pertenece a S^j es una sucesión finita, y la posición final que compone dicha sucesión pertenece a algún R^j_k. Con esta idea, podemos partir a S^j en los conjuntos de información de j, es decir, v está en S^j_k si y sólo si su posición final en v está en R^j_k.

Obviamente $\left\{S^j_k\right\}$ es una partición de S^j, pues la colección $\{R^j_k\}$ parte a R^j y, además, es claro que se cumplen las dos condiciones que el axioma 4 de juegos extensivos impone, pues se heredan de las condiciones de la partición que R^j sufre con los axiomas 2.4.5 y 2.4.6 del Juego de Posiciones. Siendo más explícitos, respecto a la primera condición, la existencia de un conjunto de índices asociado a S^j_k, es natural que nuestro candidato a I^j_k sea el conjunto de índices que corresponde a R^j_k y que con éste quede también inducida, en forma natural, la necesaria correspondencia biunívoca entre I^j_k y las alternativas de cualquier vértice de S^j_k. En cuanto a la segunda condición, es evidente que se desprende del axioma 6 de Juegos de Posiciones.

Por último, nos falta construir la función de pago en Γ. Recordemos que en J tenemos asociado un vector de pago en cada posición. Supongamos que, para cada partida de J, $\{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_m, \ldots\}$, se tiene la propiedad de que la serie $\sum \rho(\overline{X}_i)$ converge. Si τ es una partida de Γ, es decir $\tau = \{v_0, v_1, v_2, ..., v_m, \ldots\}$, donde $v_0 = \left\{\overline{U}\right\}$ y $v_l = \{\overline{X}_0, \overline{X}_1, ..., \overline{X}_l\}$, entonces

podemos definir $\pi(\tau) = \sum \rho(\overline{X}_l)$, con $\overline{X}_l$ el vértice final de v_l.

2.5. Gráficas Dirigidas y Juegos.

En este capítulo, las gráficas han sido el instrumento esencial para expresar o modelar los conflictos. Cuando estas gráficas son dirigidas, nos aportan nuevos elementos para el análisis. En la sección 2.6 y, sobre todo, en el capítulo 8 nos servirán para describir dinámicas de aprendizaje de los jugadores y, con ello, se empezará a poner a prueba el derecho de los equilibrios de Nash a llamarse solución de un juego. Por ahora, introducimos a las gráficas dirigidas y las usamos para describir algunos juegos de manera distinta a los Juegos Extensivos y a los Juegos de Posiciones y esto nos permitirá acercarnos al concepto de solución de un juego, con métodos distintos a los dominantes en este texto. Sólo pretendemos, con esto, mostrar otras direcciones en el camino.

Definición 2.5.1. Una digráfica es una pareja $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, donde V es un conjunto y $\overrightarrow{A} \subseteq V \times V = \{(u, v) \,|u \text{ y } v \text{ en } V\}$.

A los elementos de V se les llama vértices y a los de $\overrightarrow{A}$ flechas.

Es decir, una digráfica es una "gráfica dirigida" en la que hemos convertido a cada arista en una flecha, pues sus elementos tienen orden. Se recordará que en las gráficas que utilizamos para la definición de juego extensivo, página **??**, el orden de los vértices de una arista no importaba. En cambio, ahora, en las flechas, uno de los vértices es inicial y el otro es final. En esta sección y la siguiente se comprenderá la utilidad de este orden entre los vértices.

Ejemplo 2.5.1. Sea la gráfica (V, A), con $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,e\}, \\ \{c,g\}, \{c,f\}, \{d,e\}, \{d.g\}, \{d,f\}, \{f,g\} \end{array} \right\}.$$

Si ahora orientamos cada arista de tal manera que

$$\overrightarrow{A} = \left\{ \begin{array}{c} (b,a), (a,c), (a,d), (a,e), (c,b), (b,d), (e,c), \\ (c,g), (c,f), (d,e), (g,d), (f,d), (g,f) \end{array} \right\},$$

obtenemos la digráfica $(V, \overrightarrow{A})$ que aparece en la figura 2.5.1.

En las digráficas, hablamos de trayectorias dirigidas como una sucesión de vértices, $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_m, \ldots\}$, tales que $(a_i, a_{i+1}) \in \overrightarrow{A}$ para toda i.

En el ejemplo de la figura 2.5.1, $\{b, d, e, c, g, f\}$ es una trayectoria dirigida.

Un ciclo dirigido es una trayectoria dirigida finita $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_m\}$, tal que $a_0 = a_m$.

En el ejemplo mencionado $\{a, e, c, b, a\}$ es un ciclo dirigido.

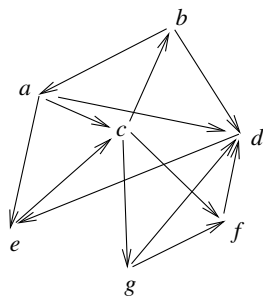

Figura 2.5.1:

Supongamos un juego finito de ganar perder en el que dos personas se turnan para tomar sus decisiones. Cuando una "posición sin considerar al jugador que le toca decidir" se repite, el juego termina. Si construimos una digráfica asociada al juego en el que cada vértice representa una posición posible, no importando a que jugador le toca decidir y (x, y) es una flecha si dichas "posiciones" x y y son tales que se puede pasar de x a y por la decisión de uno de los jugadores, entonces obtendremos una digráfica sin ciclos dirigidos.

Por ejemplo, al juego de los n cerillos, donde los jugadores pueden levantar 1, 2, $\ldots$, m cerillos y el que levanta el último pierde, le podemos asociar una digráfica de la siguiente manera:

El conjunto V tiene n elementos, cada uno representa el número de cerillos que existen cuando le toca decidir a un jugador, es decir $V = \{n, n-1, \ldots, 2, 1\}$. Cada uno de los jugadores puede estar colocado en muchos de estos vértices. El conjunto $\overrightarrow{A}$ es el de parejas ordenadas de V tales que se puede pasar desde el primer elemento de la pareja al segundo con una decisión de uno de los jugadores, levantar 1, 2, $\ldots$, m cerillos.

La figura 2.5.2 ilustra la digráfica, cuando $n = 17$ y $m = 3$.

$$\overrightarrow{A} = \left\{ \begin{array}{c} (17,16)\,,(17,15)\,,(17,14)\,,(16,15)\,,(16,14)\,, \\ (16,13)\,,(15,14)\,,(15,13)\,,(15,12)\,,(14,13)\,, \\ (14,12)\,,(14,11)\,,(13,12)\,,(13,11)\,,(13,10)\,, \\ (12,11)\,,(12,10)\,,(12,9)\,,(11,10)\,,(11,9)\,, \\ (11,8)\,,(10,9)\,,(10,8)\,,(10,7)\,,(9,8)\,,(9,7)\,, \\ (9,6)\,,(8,7)\,,(8,6)\,,(8,5)\,,(7,6)\,,(7,5)\,, \\ (7,4)\,,(6,5)\,,(6,4)\,,(6,3)\,,(5,4)\,,(5,3)\,, \\ (5,2)\,,(4,3)\,,(4,2)\,,(4,1)\,,(3,2)\,,(3,1)\,,(2,1) \end{array} \right\}$$

Para cada uno de estos juegos, nos gustaría caracterizar al conjunto S de posiciones perdedoras. Si hemos logrado caracterizar a S, la "estrategia" ganadora de un jugador que no está en una posición de S, sería llevar al contrario a dicho conjunto.

En el juego de los cerillos, ejemplo 2.4.1,

$$S = \{x \in V \,|x \equiv 1(\textit{módulo } m+1)\,\}.$$

Es decir, S es el conjunto de los naturales menores o iguales que n que al dividirlos entre $m+1$ dejan residuo 1. S es el conjunto de todas las posiciones perdedoras del juego, pues tiene dos propiedades que lo caracterizan y que hacemos explícitas a continuación:

Bauticemos a los dos jugadores con los nombres I y II respectivamente. Si uno de los jugadores, por ejemplo I, está en una posición fuera de S, tiene una "estrategia" ganadora que consiste en llevar a su contrario a algún vértice z de S. Por otro lado, cuando II toma una de las decisiones permitidas en z en S, es decir levantar k cerillos, con k menor o igual que m, entrega a I una posición fuera de S y este jugador puede levantar $m+1-k$ cerillos regresando a II a una posición en el conjunto S. Continuando con esta forma de jugar hasta que II se encuentre irremediablemente frente a un solo cerillo, viéndose obligado a levantarlo y así a perder el juego.

Consideremos cualquier juego de ganar perder, con dos jugadores que se turnan y sin posiciones que se repitan, ¿cómo encontrar un conjunto S? En la teoría de gráficas dirigidas, tenemos el concepto de núcleo que es un subconjunto de vértices que cumple nuestras dos propiedades que se expresan en la siguiente definición.

Definición 2.5.2. Un *núcleo* de una digráfica es un subconjunto S de V que tiene las propiedades siguientes:

i) Para cualquier vértice x que no está en S hay una flecha que inicia en x y llega hasta alguno de los vértices de S.

ii) Si y está en S no hay flechas desde y hasta otro elemento de S, sino sólo hacia algunos de los vértices que están fuera de S.

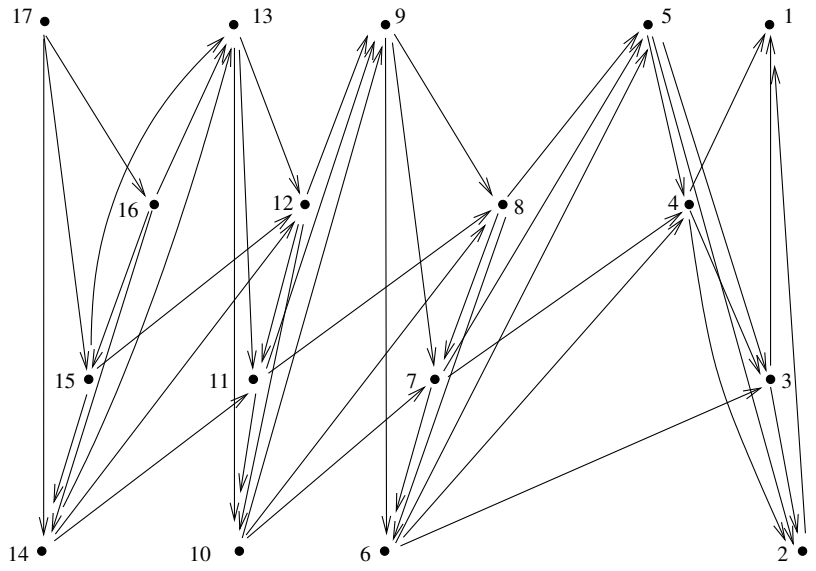

Figura 2.5.2:

En el ejemplo de la figura 2.5.1, un núcleo es $\{c, d\}$.

Una digráfica puede tener varios núcleos; en el mismo ejemplo anterior, también $\{b, e, f\}$ es un núcleo. Pero no todas las digráficas tienen núcleo. No lo tiene, por ejemplo, la digráfica donde el conjunto de vértices es $\{a, b, c\}$ y el de flechas es $\{(a, b), (b, c), (c, a)\}$.

El único núcleo del juego 2.4.1 es $\{x \in V \,|x \equiv 1(\textit{módulo } m + 1)\}$. En particular, si $n = 17$ y $m = 3$, el núcleo es $\{1, 5, 9, 13, 17\}$ (ver figura 2.5.2).

Si cambiamos la regla del juego, de tal manera que el que levanta el último cerillo gana, nos conviene asociarle la digráfica que tiene como conjunto de vértices a $\{0, 1, \ldots, n\}$ y el conjunto de flechas construido con el criterio anterior. En este caso, el conjunto de posiciones perdedoras, es decir el núcleo de la digráfica es $\{x \in V \,|x \equiv 0(\textit{módulo } m + 1)\}$.

Tenemos un teorema debido a von Neumann que dice que toda gráfica dirigida finita y sin ciclos dirigidos tiene núcleo. Traducido a términos de Teoría de Juegos, que es su contexto original, diría que todos los juegos bipersonales de ganar perder, donde los jugadores se turnan y no se permite repetir posiciones, están estrictamente determinados. Es decir, existe un con-

junto de posiciones S tal que, si el jugador que empieza el juego está dentro de S, pierde el juego y si está fuera, lo gana.

La demostración que es constructiva sigue los pasos siguientes:

1- Sea S_0 el conjunto de posiciones en las que un jugador sólo tiene decisiones que terminan el juego perdiendo él mismo. Sea D_1 el conjunto de posiciones en que, para cada una de ellas, existe una decisión con la que se termina el juego ganando o existe una decisión en la que se deja al contrario en S_0, por lo menos uno de esos dos conjuntos es no vacío.

2- Si no existieran posiciones fuera de $S_0 \cup D_1$, $S = S_0$. En cambio, si existen posiciones que no están en ninguno de los dos conjuntos, sea S_1 el conjunto de vértices que solo inician flechas que terminan en D_1.

3- Supongamos que hemos construido (S_1, D_1), (S_2, D_2), $\ldots$, (S_k, D_k), tales que para $j = 1, 2, \ldots, k$, cada vértice de D_j inicia al menos una flecha que termina en S_{j-1} y todas las flechas que empiezan en un vértice de S_j terminan en D_j.

4- Si ya no existen posiciones fuera de los conjuntos construidos, el conjunto S de posiciones perdedoras, o núcleo de la digráfica, es la unión de todos los S_j, si existen posiciones que no estén en alguno de los conjuntos construidos hasta el paso k, llamamos D_{k+1} al conjunto de vértices que inician una flecha que termina en S_k y S_{k+1} al conjunto de vértices que sólo inician flechas que terminan en D_k.

El algoritmo termina en un número finito de pasos.

Si seguimos los pasos de la demostración en el juego de los cerillos con $n = 17$, $m = 3$ y el que levanta el último cerillo pierde.

$S_0 = \{1\}$, $D_1 = \{2, 3, 4\}$, $S_1 = \{5\}$,
$D_2 = \{6, 7, 8\}$, $S_2 = \{9\}$,
$D_3 = \{10, 11, 12\}$, $S_3 = \{13\}$,
$D_4 = \{14, 15, 16\}$, $S_4 = \{17\}$. Entonces $S = \{1, 5, 9, 13, 17\}$.

2.6. Selección de Equilibrios y Gráficas Dirigidas.

Las gráficas dirigidas nos servirán, también, para describir y estudiar diversas dinámicas con las que pueden desenvolverse los juegos. Pensemos en que los patrones de conducta de los individuos que se enfrentan en un juego están expresados en todos los posibles perfiles de estrategias puras. Más adelante podremos expresar estos patrones en formas diversas. Consideremos una dinámica en la que un patrón de comportamiento se cambia por otro, siguiendo el criterio de que si alguno de los jugadores decide utilizar otra estrategia es porque así mejora su pago. Las gráficas dirigidas nos permitirán

formalizar como transitar, de acuerdo con dicha dinámica, de un "patrón" de comportamiento a otro. Además, en estas digráficas se revelarán los "patrones" que tienden a repetirse como algo acostumbrado. En este capítulo, sólo estudiaremos el movimiento entre los perfiles de estrategias puras, en el capítulo 8 desarrollaremos más ampliamente el papel de las digráficas para modelar dinámicas de aprendizaje.

Sea $(N, \{D_j\}, \varphi)$ un juego finito, con l_j el número de estrategias que tiene D_j. Sea z en $D = \prod D_j$, un perfil de estrategias puras. z es uno de los patrones de conducta posible y lo consideraremos un estado posible de las dinámicas que se introducirán.

La coordenada i-ésima de z se interpreta, como en cualquier perfil de estrategias puras, es decir, como la estrategia que escogió el jugador i, en el estado z. Sea V el conjunto de estados posibles ($V = D$).

¿Cómo actuarían los jugadores, si encontrándose en el estado z, ellos pudieran rectificar sus estrategias? Se generarían diversas dinámicas que determinarían el paso de un estado a otro, cuando los jugadores trataran de mejorar su pago. Entenderemos por una dinámica d a una correspondencia que a cada estado z le asocia un conjunto de estados posibles. Dada una dinámica d, construimos $\overrightarrow{A} = \{(z, z') \,|\, z' \in d(z)\}$. La digráfica $(V, \overrightarrow{A})$ representará a esta dinámica en la que se mueven las elecciones de estrategias de los jugadores pasando de un estado a otro.

Estudiemos, primero, una dinámica, a la que llamaremos de mejor respuesta con inercia, porque en cada periodo sólo un jugador cambia su estrategia, mientras los demás permanecen con la escogida anteriormente.

Definición 2.6.1. Dado un juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$, su digráfica de mejor respuesta con inercia es $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, con $V = D$ y $\overrightarrow{A} = \{(v, v')$ tal que existe $k \in N$, con v'^k una mejor respuesta de k a v y $v'^j = v^j \ \forall \ j \neq k\}$.

A diferencia del concepto de núcleo que encerraba a todas las posiciones perdedoras de ciertos juegos. Introducimos, ahora, otros conceptos de las gráficas dirigidas que se relacionan con la solución de un conflicto expresado en un juego rectangular.

Definición 2.6.2. Dada una digráfica cualquiera $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, decimos que V_1, V_2, ...,V_r, subconjuntos no vacíos de V, ajenos dos a dos, son las clases de comunicación recurrente de $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, si se cumplen:

1. Para cada vértice x que no está en $\bigcup_i V_i$, existe una trayectoria dirigida que une a x con un vértice que pertenece a alguno de los subconjuntos V_i.

2. Si dos vértices x y z distintos están en la misma clase V_i, existe una trayectoria dirigida que une a x con z.

3. Dado un vértice x en V_i y un vértice z que no está en V_i, no existe trayectoria dirigida que une a x con z.

Si una clase de comunicación recurrente de la gráfica asociada a una dinámica contiene un solo elemento, diremos que éste es un estado absorbente de la dinámica.

Si la digráfica $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$ representa a una dinámica asociada a un juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$, diremos que los elementos de sus clases de comunicación recurrente son los patrones de conducta aprendidos relativos a esa dinámica.

Por ejemplo, pensemos en el juego de los países petroleros, ejemplo 1.3.3 b, con matriz de pagos

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{reducir} & \textit{no reducir} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{reducir} \\ \textit{no reducir} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

La digráfica de mejor respuesta con inercia, para este juego se ilustra en la figura 2.6.1.

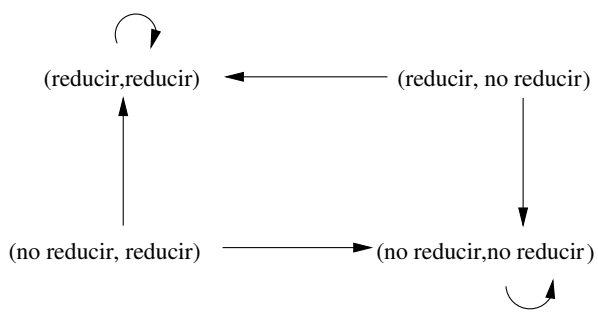

Figura 2.6.1:

Las clases de comunicación recurrentes son $V_1 = \{(\textit{reducir},\ \textit{reducir})\}$ y $V_2 = \{(\textit{no reducir},\ \textit{no reducir})\}$, es decir el ejemplo 1.3.3 b, con la dinámica de mejor respuesta con inercia tiene a los dos equilibrios de Nash (ep) del juego como estados absorbentes. Además, son los únicos equilibrios de Nash (ep) del juego, así que en este ejemplo se cumple que un perfil de estrategias

puras es equilibrio de Nash si y sólo si es un estado absorbente de la dinámica de mejor respuesta con inercia.

Sin embargo, si consideramos el ejemplo 2.6.1 con matriz

$$\begin{pmatrix} (-1,3) & (1,6) \\ (1,1) & (1,2) \end{pmatrix},$$

la digráfica de la dinámica de mejor respuesta con inercia está en la figura 2.6.2

La única clase de comunicación recurrente es $V_1 = \{(1,2),(2,2)\}$ que es un ciclo, la digráfica no tiene estados absorbentes, pero $(1,2)$ y $(2,2)$ son equilibrios de Nash(ep) del juego 2.6.2. Obsérvese que, en este juego, ninguno de los dos equilibrios de Nash es estricto, a diferencia del ejemplo anterior en que los dos equilibrios eran estrictos.

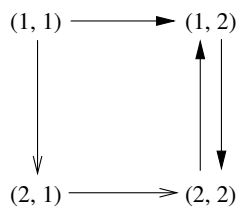

Figura 2.6.2:

Si alteramos un poco la "dinámica de mejor respuesta con inercia" con que se desenvuelve el juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$, pensando que un jugador k no abandonará su estrategia correspondiente a $\sigma \in D$, para cambiar por $\widetilde{\sigma}^j$, si esta última no le reporta un aumento en su ganancia. Es decir, solo si $\widetilde{\sigma}^j$ es una estrategia de mejor respuesta estricta se dará el cambio. Construimos una nueva digráfica, a la que llamaremos digráfica de mejor respuesta estricta con inercia, de la manera siguiente, $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$, con $V = D$ y $\overrightarrow{\overrightarrow{A}}$ de tal manera que $(v, v') \in \overrightarrow{\overrightarrow{A}}$ si y sólo si, existe un jugador k, tal que v'^k es una mejor respuesta estricta de k a v y $v^j = v'^j$, para toda $j \neq k$.

Es claro que $\overrightarrow{\overrightarrow{A}} \subseteq \overrightarrow{A}$.

La digráfica de mejor respuesta estricta, con inercia, para el juego 2.6.1 está representada en la figura 2.6.3 que tiene dos clases de comunicación recurrente, $\{(1,2)\}$ y $\{(2,2)\}$. Ambas son estados absorbentes y están formadas por equilibrios de Nash (ep).

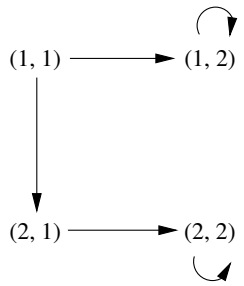

Figura 2.6.3:

También, en la dinámica de mejor respuesta estricta con inercia puede haber clases de comunicación recurrente que constan de más de un elemento, y el juego se moverá en ciclo pasando repetidamente por todos los vértices de la clase. Por ejemplo, en el juego de las empresas la única clase de comunicación recurrente es un ciclo.

$$\begin{array}{c} \\ \textit{muestras} \\ \textit{medios escritos} \\ \textit{radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{entrar} & \textit{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (45,-10) & (55,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

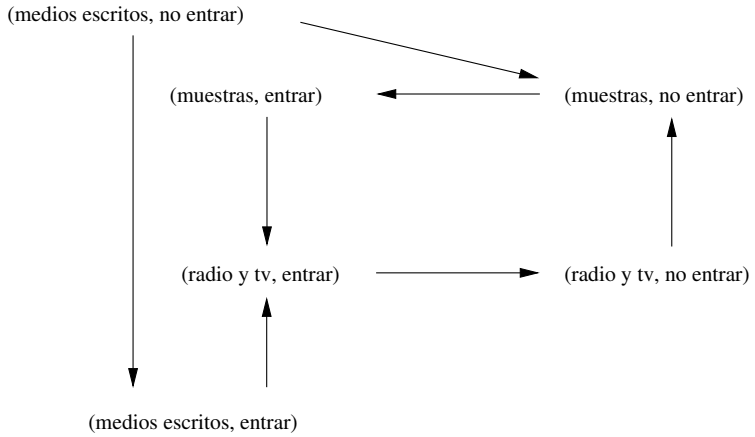

Figura 2.6.4:

La única clase de comunicación recurrente de su gráfica de mejor respuesta estricta, con inercia, como se puede ver en la figura 2.6.4, es el ciclo

$$\{(muestras, no\ entr), (reg,\ entr), (radio\text{-}tv,\ entr), (radio\text{-}tv,\ no\ entr)\}.$$

Recordemos el baile de Shapley (Ejemplo 1.3.4).

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) & (1,2) & (-1,-1) \\ (1,2) & (2,1) & (0,0) & (-1,-1) \\ (0,0) & (1,2) & (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos observar la figura 2.6.5 que es su digráfica de mejor respuesta estricta con inercia, tiene un estado absorbente que es el único equilibrio de Nash (ep) $\{(d,d)\}$ y otra clase de comunicación recurrente que es el ciclo $\{(a,a),(a,c),(c,c),(c,b),(b,b),(b,a)\}$.

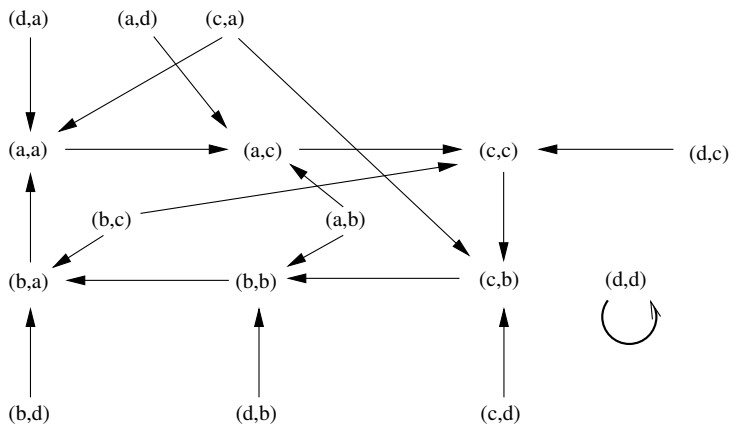

Figura 2.6.5:

Es claro que σ es equilibrio estricto si y sólo si es un vértice tal que, en la digráfica de mejor respuesta con inercia, no existen flechas de la forma $(\sigma, \widehat{\sigma})$, con $\widehat{\sigma}$ distinto de σ. Y que σ es un equilibrio de Nash (ep) si y sólo si σ es un vértice tal que no existen flechas de la forma $(\sigma, \widehat{\sigma})$ en la digráfica de mejor respuesta estricta con inercia y de estas propiedades se desprende la siguiente proposición.

Proposición 2.6.3. *σ es un estado absorbente de la digráfica de mejor respuesta con inercia si y sólo si σ es un equilibrio de Nash (ep) estricto.*

Además, σ es un estado absorbente de la digráfica de mejor respuesta estricta con inercia si y sólo si es un equilibrio de Nash (ep).

Las cosas serían diferentes en una dinámica de mejor respuesta sin inercia, es decir, cuando todos los jugadores reaccionan simultáneamente, con su mejor respuesta.

Por ejemplo, pensemos de nuevo en el baile de Shapley, con la dinámica de mejor respuesta estricta, sin inercia. Su digráfica se representa en la figura 2.6.6. Las clases de comunicación recurrente son:

el estado absorbente $\{(d,d)\}$,

el ciclo $\{(a,b),(b,c),(c,a)\}$ y

el ciclo $\{(a,a),(a,c),(c,c),(c,b),(b,b),(b,a)\}$.

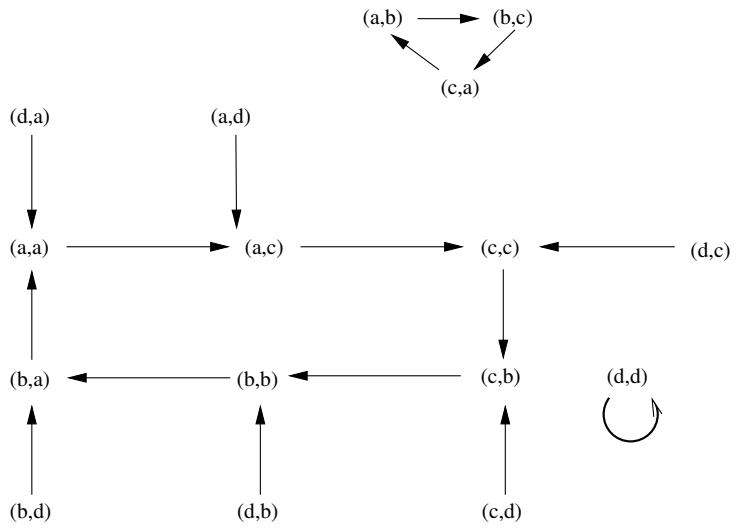

Figura 2.6.6:

Este tipo de digráficas que estamos estudiando, quizá un poco alteradas, pueden permitir encontrar los equilibrios de Nash (ep) en algunos juegos, aunque la gráfica sea muy grande y solo podamos analizar una parte de ella. Pensemos en un juego de ventanillas simétrico, en el que los jugadores pueden ser muchos y el conjunto de estrategias grande. Podemos, entonces, alterar el conjunto de estados posibles considerando que cada vértice no representa

un perfil de estrategias, sino todos los que resultan equivalentes. Es decir, pensemos en que un estado posible z es de tal manera que su coordenada i-ésima se interpreta como el número de jugadores que escogió la estrategia i, en el perfil, no importando quienes son los jugadores que lo hicieron. La suma de las coordenadas de z debe ser n, el número de jugadores que tiene el juego. Sea V el conjunto de estados posibles, y entonces $\overrightarrow{A}$ tendrá el significado análogo a la digráfica de mejor respuesta con inercia.

Supongamos que los jugadores son 10 capitalistas y que cada uno tiene un capital del mismo tamaño. Cada jugador puede invertir su capital en alguna de las 5 firmas E_1, E_2, E_3, E_4, E_5. Las ganancias totales respectivas de cada firma son 50, 40, 30, 20 y 10 millones de pesos. Los capitalistas tienen que escoger alguna de las firmas para invertir y las ganancias se repartirán entre todos los que participen en la firma.

Queremos estudiar la "dinámica" basada en la mejor respuesta de un solo jugador, a un perfil de estrategias dado, mientras los demás jugadores se quedan quietos. Pensemos que el juego de las ventanillas se repite año con año, con los mismos participantes.

El número de perfiles de estrategias puras distintos son 5^{10}. Identifiquemos dichos perfiles de tal manera que solo interese cuantas personas hay en cada ventanilla, sin importar quienes están en ella. Es decir, el conjunto de estados posibles es el de clases de perfiles de estrategias puras que resultan al identificar todos los perfiles que provocan que hay la misma repartición de capitalistas en las firmas, sin importar cuáles de ellos está en cada una de las firmas.

Los estados son vectores de 5 coordenadas enteras menores o iguales que 10 y tales que suman 10. Cada vector $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con esas propiedades representa varios perfiles de estrategias, aquellos en donde x_j capitalistas, sean los que sean, eligen E_j. Así el número de vértices es menor, pero todavía es enorme.

Estudiemos únicamente la parte de la digráfica que empieza en el vértice que representa a que todos los capitalistas escogieron la primera firma y cada uno ganó 5 millones de pesos y, después consideremos todos los vértices que se pueden generar desde allí, con la dinámica de mejor respuesta estricta con inercia. Es claro que el año siguiente no les convendrá seguir todos en la primera firma, pero supongamos que ellos son muy cautos, por lo que el siguiente año, cada uno espera que los demás se muevan; no vaya a ocurrir que todos huyan de la primera firma a la segunda firma y las cosas resulten todavía peor. Sin embargo, uno de ellos decide cambiar, pues está seguro que los demás no lo harán y, entonces, aprovechará la coyuntura cambiándose a

la segunda firma que es la que le daría mayor pago, si los demás permanecen en la primera. Entonces, los que permanecieron en E_1 ganarán 50/9 millones y el que se fue a la segunda ganará 40. Para el tercer año el que está en E_2 se siente contento, pues no podría mejorar con un nuevo cambio, si todos siguen con las mismas decisiones, en cambio, los que se encuentran en E_1 no lo están, pues pueden cambiar para mejorar. Si uno sólo de ellos cambia, será para irse a E_3.

En la figura 2.6.7 se ilustra la "dinámica" con que se mueven los capitalistas hasta llegar a un perfil de estrategias del que ya no saldrán. De hecho, $\{(4,3,2,1,0)\}$ es la única clase de comunicación recurrente de la gráfica de mejor respuesta, con inercia. Como consta de un solo vértice, éste es un estado absorbente. En particular, todos los perfiles representados por $(4,3,2,1,0)$, por ejemplo $(E_1,E_1,E_1,E_1,E_2,E_2,E_2,E_3,E_3,E_4)$, son equilibrios de Nash en estrategias puras. Cuando la "dinámica" llega a $(4,3,2,1,0)$ ningún capitalista mejorará su pago cambiando de estrategia, bajo el supuesto que los demás no cambian la suya.

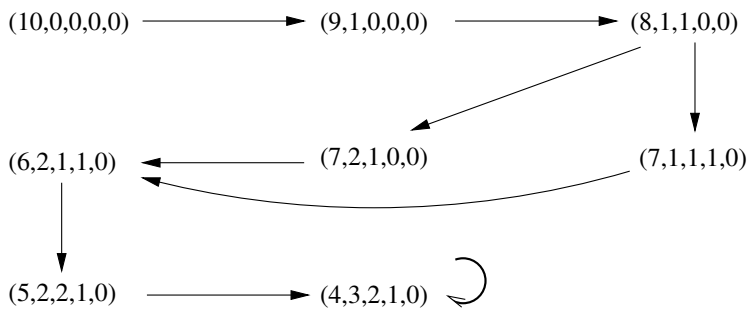

Figura 2.6.7:

Pensemos en una dinámica de mejor respuesta sin inercia (cuando todos los jugadores reaccionan con su mejor respuesta simultáneamente). Si se iniciara en cualquier vértice que no corresponda al equilibrio de Nash (ep), la dinámica terminaría en el ciclo $\{(10,0,0,0,0),(0,10,0,0,0)\}$. Entonces, las clases de comunicación recurrente son dicho ciclo y el estado absorbente $\{(4,3,2,1,0)\}$.

En la figura 2.6.8 se observan algunas trayectorias dirigidas, de la dinámica de mejor réplica, que terminan en el ciclo.

En el capítulo 8, seguiremos desarrollando las digráficas como instrumento para analizar diversas dinámicas de corrección de estrategias. Se generalizará su uso, ya contando con el concepto de estrategia mixta. Podremos,

entonces, relacionar las clases de comunicación recurrente a los equilibrios de Nash, en ambos tipos de estrategias.

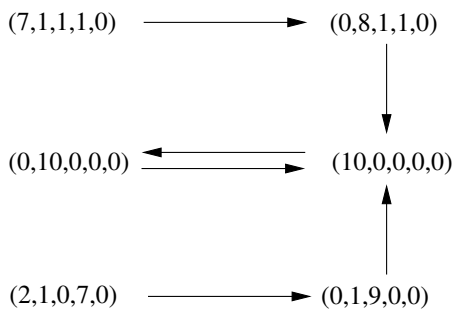

Figura 2.6.8:

2.7. Ejercicios

Ejercicio 2.1. Considere el juego con 23 cerillos (dos jugadores que se turnan levantando 1, 2 o 3 cerillos, el que levanta el último pierde).

a). Si los dos jugadores juegan bien, ¿existe un ganador? ¿Cuál de ellos? ¿Por qué?

b). Si hay n cerillos, ¿para qué valores de n gana la mano? ¿Para qué valores de n gana la tras? ¿Para qué valores de n hay empate? ¿Por qué?

c). ¿Qué ocurre si cambiamos la regla admitiendo que se pueden levantar menor o igual que s cerillos? ¿Puede usted dar una regla general?

d). Las mismas preguntas, para cuando cambiamos a una regla que decreta que el que levanta el último cerillo gana.

Ejercicio 2.2. Considere el juego de los cerillos con n igual a 5 y sólo se pueden levantar 1 o 2 en cada tirada. Construya el modelo extensivo.

Ejercicio 2.3. Considere la digráfica del juego original de los 23 cerillos (el que levanta el último pierde), de la siguiente manera $V = \{23, 22, 21, \ldots, 2, 1\}$, $\overrightarrow{A}$ es el conjunto de parejas ordenadas de V, tal que se puede pasar desde el primer elemento de la pareja al segundo con la decisión de uno de los jugadores. Considere el conjunto de vértices de posiciones perdedoras, es decir, en donde al jugador que le toca jugar perderá el juego, si el otro juega bien. Haga ver que el conjuntos es núcleo de la digráfica.

Ejercicio 2.4 (El Juego del Nim). En cada hilera i, de m existentes, están colocados m_i cerillos, los jugadores se alternan para escoger una hilera k y levantar, en esa hilera, el número de cerillos que quieran, mayor que cero y menor o igual que m_k. El jugador que levante el último gana. Suponiendo que m es 3, $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 1$. Construya el modelo extensivo y el juego de posiciones.

Ejercicio 2.5 (de votaciones y de eventos). Un equipo de trabajo de tres personas tiene que integrar a un nuevo elemento de una lista de cuatro candidatos (A, B, C y D). Para hacerlo, los miembros del equipo (I, II, III) tienen derecho a vetar a uno de los tres candidatos. Se van alternando para decir a quien veta cada uno. Cuando le toca el turno al jugador j, conoce los vetos que se han hecho antes. Cada jugador, en su turno, está forzado a vetar a uno de los que no han sido vetados. Después de que se han dado los vetos de I, II y III, sólo quedará un candidato sin vetar, el cuál será el nuevo miembro del equipo. Suponiendo que los órdenes de preferencia que los actuales miembros tienen para la integración del nuevo miembro son:

para I, A$\succ$ B $\succ$C$\succ$D,

para II, B$\succ$C$\succ$D$\succ$A y

para III, C$\succ$D$\succ$A$\succ$B,

donde x$\succ$y significa que el miembro del equipo en cuestión prefiere al candidato x que al y.

Construya un modelo extensivo que represente al juego.

Ejercicio 2.6 (El juego del gato). Consideremos el conocido juego del gato de tal manera que el juego termina hasta que se llenan todas las casillas. Explique cómo es su modelo extensivo.

Ejercicio 2.7. Para el juego del duelo, cambie la situación de tal manera que, en cada ocasión, se lance una moneda para ver a cuál de los jugadores le toca decidir. ¿Cómo cambia el modelo extensivo?

Ejercicio 2.8 (El juego de Gale [22]). Hay tres ruedas de ruleta, cada una dividida en tres partes iguales, en la primera están escritos los números 9, 2 y 4, en la segunda 8, 1 y 6 y en la tercera 7, 3 y 5. El jugador I escoge una de las tres ruletas, después el jugador II escoge alguna de las otras dos. A continuación, se hace girar la ruleta de I y después en forma independiente la de II, gana el jugador al que le sale el número más alto. Construya el modelo extensivo.

Ejercicio 2.9. Considere el juego 2.2.9 de La Industría Contaminadora, El Campesino y el Inspector y construya el modelo extensivo.

Ejercicio 2.10. Sea $\Gamma = (V, A)$,con

$$V = \left\{ \begin{array}{c} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \\ x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17} \end{array} \right\}$$

$$\overrightarrow{A} = \left\{ \begin{array}{c} (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_4, x_6), \\ (x_4, x_7), (x_5, x_8), (x_5, x_8), (x_5, x_9), (x_5, x_{10}), \\ (x_7, x_{11}), (x_7, x_{12}), (x_9, x_{14}), (x_{14}, x_{15}), \\ (x_{14}, x_{16}), (x_{14}, x_{17}) \end{array} \right\}$$

$S^0 = \{x_1, x_{14}\}$, $S^1 = \{x_2, x_7, x_9, x_{10}\}$, $S^2 = \{x_4, x_5, x_{14}\}$.
$P(x_1 | x_2) = \frac{1}{9}, P(x_1 | x_3) = \frac{8}{9}$.
$P(x_{15} | x_{14}) = \frac{1}{3}, P(x_{16} | x_{14}) = \frac{2}{3}, P(x_{17} | x_{14}) = \frac{2}{3}$
$S_1^1 = \{x_2, x_7\}, S_2^1 = \{x_9, x_{10}\}, S_1^2 \{x_4, x_5\}, S_2^2 = \{x_{14}\}$,
$I_1^1 = I_2^1 = I_1^2 = I_2^2 = \{1, 2\}$.
$\pi(x_3) = (2, 1), \pi(x_6) = (3, 0), \pi(x_8) = (-2, 11)$,
$\pi(x_{11}) = (-1, -1), \pi(x_{12}) = (3), \pi(x_{15}) = (1, 1)$,
$\pi(x_{16}) = (8, -7), \pi(x_{17}) = (4, -4)$.

La anterior descripción no cumple con la definición de juego extensivo, explique todas las violaciones a los axiomas que se han cometido y arréglelas para que la nueva descripción cumpla todos los axiomas.

Ejercicio 2.11 (¿Dónde quedó la cabrita?). En un concurso de televisión hay tres cubículos numerados del 1 al 3, con las puertas cerradas. El concursante (A) elige un número 1, 2 o 3, tratando de adivinar en cuál de los cubículos esconderán la cabrita que le muestra el conductor del programa, eligiendo un número. El conductor del programa elige al azar un cubículo y esconde en éste a la cabra. El conductor sabe el número de cubículo donde está el animalito y el número que eligió A, entonces abrirá la puerta de uno de los cubículos que no contenga a la cabra y que no sea el escogido por el concursante (esto puede ser una jugada obligada o una elección del conductor). Posteriormente el concursante decidirá si continúa apostándole al cubículo que escogió desde el principio o cambia al otro que sigue con la puerta cerrada. Si el cubículo finalmente escogido es el que esconde a la cabra ganará el concursante, si no perderá y el ganador es el programa representado por su conductor. Diseñe un juego extensivo para el juego.

Ejercicio 2.12. Cambie el juego de las negociaciones del sindicato (Ejemplo 2.2.7), pensando que la primera jugada no es de azar, sino que el sindicato decide si construye un fondo de resistencia o por el contrario descuida esto y la dirección se dedica a tratar de reelegirse. Dependiendo de esta primera

acción habrá buenas o malas condiciones para la huelga, pero el sindicato las conoce y el patrón no. Dibuje el juego extensivo.

Ejercicio 2.13 (Fichas de dominó en un tablero). (Juego de información perfecta. K. Binmore [4]) Dos jugadores se van alternando colocando fichas de dominó en un tablero cuadriculado, cada ficha cubre dos cuadrados ya sea en forma vertical u horizontal. El tablero tiene $m \times n$ cuadrados y el primer jugador que ya no puede colocar una ficha pierde y su pago es –1, el otro gana 1.

Para el tablero de $m = 2$ y $n = 3$, haga el modelo extensivo, considerando que los vértices en que al jugador que le toca decidir sólo tiene una opción son vértices finales con los pagos que se obtendrían después de la jugada obligada.

Ejercicio 2.14. Considere un empresario E que tiene en su fábrica tres procesos productivos, P_1, P_2 y P_3. E contrata a tres artesanos para echar andar la producción y tiene que decidir, si les permite elegir a ellos mismos cuál proceso prefieren utilizar o si hace una rifa, para tratar de asegurar que se echarán a andar los tres procesos, para conocer bien el efecto de cada P_i. En caso de que decida rifar, los artesanos tienen que decidir, sin comunicarse unos con otros, si aceptan la rifa o se van a trabajar por su cuenta, cada artesano es capaz de ganar 500 pesos por su cuenta. Si un artesano acepta el trabajo y le toca aplicar el primer proceso ganará 300, al que le toca aplicar el segundo ganará 550 y al que le toca el último 1100. En caso de permitirles la elección voluntaria, se determina un juego de tres artesanos (ventanillas), con tres oficios, en los que $d_{P1} = 300$, $d_{P2} = 550$ y $d_{P3} = 1100$, respectivamente. El empresario obtiene la suma de las ganancias de los artesanos. Construya el juego extensivo.

Ejercicio 2.15. Complete las digráficas de mejor respuesta estricta y no estricta, con y sin inercia, para los ejemplos de dos jugadores del capítulo 1 que no se abordaron en la sección **??**.

Ejercicio 2.16. En forma análoga a como procedimos, al final de la sección **??**, para estudiar un juego de ventanillas, con una digráfica especial (o con parte de ella):

a) estudie la flexibilización del trabajo (ejemplo 1.3.8 a) y

b) el juego del monopolio del ejemplo 1.6.4, pero con los siguientes cambios. El monopolio solo considera los precios 600 y 1000, $c = 500$. Sólo hay dos tipos de consumidores, los 10 primeros con función de pago $650 - p$ y los 5 de función $1100 - p$. No empiece por un vértice que represente un equilibrio de Nash.

Ejercicio 2.17. Construya modelos extensivos de algún conflicto actual, ya sea político o económico, con las siguientes características.

a) Información perfecta y sin azar.

b) Información perfecta y con azar.

c) Información no perfecta y sin azar.

d) Información no perfecta y con azar.

Ejercicio 2.18 (El automovilista y la aseguradora). Una persona (A) tiene un vehículo con el que trabaja y está considerando comprar un seguro contra accidentes. La compañía de seguros (CS) piensa en dos precios posibles por un año de seguro, uno de 500 y otro de 200. En los dos casos, el posible asegurado tiene que decidir, si acepta o rechaza la oferta. Si rechaza la oferta tendrá que ser cuidadoso con su vehículo, para tratar de evitar accidentes, en cambio, si acepta comprar el seguro, tendrá que decidir, entre ser cuidadoso o basarse en que está cubierto por el seguro y arriesgarse más, pudiendo con ello obtener más ingresos en su trabajo. La probabilidad de tener accidentes depende de sí es cuidadoso o no lo es. Construya un modelo extensivo del juego, asignando valores adecuados a todo lo que considere que falta para obtener dicho modelo.

Construya, también, el modelo extensivo de la siguiente variante del mismo problema. Una aseguradora, cada vez que vende un seguro a un automovilista no sabe si se trata de uno cuidadoso o uno arriesgado. Lo único que sabe es el porcentaje de automovilistas cuidadosos que hay en el país. Por su lado, el automovilista no sabe si en caso de accidente la aseguradora cumplirá lo prometido o usará argucias legales para disminuir su pago. El automovilista piensa, debido a diversos comentarios que ha obtenido que la aseguradora cumplirá lo pactado con cierta probabilidad. Lo demás transcurre como se explicó antes, excepto en los pagos que se transforman por las nuevas condiciones.

Ejercicio 2.19. Construya los modelos extensivos de los juegos siguientes:

a) En el juego de la cadena de supermercado de Selten del ejemplo 2.2.2, suponga que el jugador M está formado por un equipo de dos personas y cuando la segunda de ellas debe decidir si cumple o no su amenaza de bajar los precios, no sabe si su compañero de equipo hizo o no una inversión. Dejar todo lo demás igual.

b) El juego de la ruleta rusa. Dos oficiales del ejército del zar, que compiten por el amor de una doncella, acuerdan que sea una ruleta especial la que decida quién continuará en el cortejo y quién abandonará el campo. Al

azar se coloca una bala en una de las seis recámaras de un revólver. Los dos jugadores se van alternando y, en cada turno, sin saber donde está la bala, deciden si se ponen el revólver en la sien y disparan, pudiendo morir, o se retiran, por aquello de que más vale aquí corrió. Si uno de los jugadores muere, obtendrá el peor resultado posible. Si se acobarda, tendrá que dejar que el otro trate de conquistar a la muchacha y esperar a que ella lo rechace, por lo que tiene aún esperanzas. Y, si el otro muere, estará en la mejor situación posible, pues ya no tendrá rival.

Capítulo 3

Estrategias y Forma Normal

3.1. Planteamiento del Problema

Los planes globales de un jugador en un juego extensivo son sus estrategias. Este es el concepto central del capítulo y lo introduciremos en la sección 3.2. Pero ¿cuál perfil de estos planes globales puede ser llamado una solución del juego?

En los juegos de información perfecta finitos es posible encontrar "buenos planes" para cada jugador j. Procediendo como los ajedrecistas, es decir, haciendo un análisis del juego desde las posibles finales, se localizan cuáles de éstas le convendrían a j y se estudia si, con algunas de sus estrategias, es posible que él logre que dichas finales se alcancen. Desarrollaremos estas ideas en la sección 3.3. Sin embargo, aunque posteriormente extenderemos este análisis a los juegos que no son de información perfecta, por el momento esto no será posible.

En la sección 3.4, partiendo del concepto de estrategia dentro de un modelo extensivo finito Γ, podremos construir un juego rectangular "equivalente" a Γ, al que llamaremos su forma normal. Definiremos los equilibrios de Nash de Γ como los equilibrios de su forma normal. Después, se puede extender el concepto a algunos juegos infinitos.

Sin embargo, existen dos problemas. En primer lugar, surge la pregunta de si tenemos que conformarnos con solucionar a los juegos de información perfecta de una manera y a los demás de otra. En la sección 3.5, demostraremos que el análisis que copiamos a los ajedrecistas construye, en los juegos finitos de información perfecta, un equilibrio de Nash de su forma normal. No todos los equilibrios de un juego de información perfecta pueden construirse con un análisis hacia atrás. Los equilibrios que pueden constru-

irse en dicha forma son especiales, garantizan que los jugadores eligen bien en cada una de las situaciones en las que tienen que tomar decisiones. Por lo que se busca extender este tipo de análisis a cualquier juego finito. Desgraciadamente, en estrategias puras, dicho algoritmo no siempre tiene éxito y habrá que esperar a introducir las estrategias mixtas en el capítulo 5. El otro problema que se presentará con la forma normal de un juego extensivo es que frecuentemente resulta demasiado grande. Por lo que, en lugar de trabajar con la forma normal, será conveniente no perder de vista el modelo extensivo y trabajar con sus partes si esto es posible.

Los dos tipos de ideas, con las que trabajamos en este capítulo para encontrar buenas estrategias de un juego extensivo tendrán también importancia en el contexto de las estrategias mixtas. La primera es la de un análisis del juego extensivo en sí mismo, al estilo, como dijimos antes, de los métodos utilizados por los ajedrecistas que localizan posiciones ganadoras dentro de las posibles finales del juego, para luego tratar de conducir el juego hacia dichas posiciones. La segunda consiste en construir el juego rectangular "equivalente" al juego extensivo finito dado y basarse en los equilibrios de Nash de dicho juego para obtener los del juego extensivo. Desde luego, en estrategias mixtas, existe la misma relación, entre ambas ideas que la que surge en este capítulo. Con el primer análisis, se construirán los equilibrios especiales a los que llamaremos de perfecto en subjuegos y con el segundo se tendría el conjunto completo de equilibrios de Nash.

3.2. Estrategias en Juegos Extensivos

¿Cómo podemos pensar en los planes de acción que tienen los jugadores en un juego extensivo? ¿Cómo saber cuáles de estos planes son buenos y cuáles son malos?

En el ejemplo 2.2.1, cada uno de los jugadores tiene que decidir, en una sola ocasión, representada por un vértice y, entonces, los dos únicos planes posibles para la empresa C son E (entrar al mercado a competir con la empresa M, previamente establecida) y NE (abstenerse de competir con M). Por su lado, la empresa M también tiene dos planes BP (bajar precios para arruinar a C) y NBP (no bajar precios). Este ejemplo es semejante a un juego rectangular. Los planes para actuar en 2.2.1 constan de tomar una sola decisión, como ocurre en dichos modelos.

El ejemplo 2.2.2 es más complicado, la empresa C tiene que decidir si entra a la competencia o no entra, para dos situaciones distintas (dos vértices), una de ellas, cuando la empresa M decidió invertir, otra si ésta

ha decidido no invertir; tiene entonces cuatro planes para el juego completo: a) entrar en ambas situaciones; b) entrar si M invierte y no entrar si M no invierte; c) no entrar si M invierte y entrar si no invierte y, por último, d) no entrar en ninguna de las dos situaciones. Mientras que la empresa M tendrá que decidir en tres vértices. En el primero, debe escoger si invierte o no lo hace y, después, en caso de invertir y que la empresa C decida competir contra ella, tendrá que decidir si baja los precios o no los baja. Análogamente, en caso de no invertir, bajo el mismo supuesto de que C está en la competencia, debe decidir si baja los precios o no los baja. En total tendrá ocho planes posibles. A estos planes se les llamará estrategias. De la misma forma, es decir, diciendo lo que harán el patrón y el trabajador, en cada uno de los vértices del juego, en los que les toca decidir, se pueden describir sus respectivos planes de acción global o estrategias. Lo análogo para los duelistas del juego 2.2.4.

Hasta ahora, hemos hablado de los planes de acción de los jugadores en juegos de información perfecta, en los que los conjuntos de información de un jugador coinciden con los vértices en los que le toca decidir. En juegos que no son de información perfecta, los participantes pueden confundir varios de los vértices en los que les toca decidir y, cuando ocurre esto, también confunden las alternativas que tienen en cada uno de ellos. Entonces, para hacer sus planes, cualquier jugador tiene que escoger, en cada conjunto de información, uno de los elementos del conjunto de índices asociado al conjunto de información.

Para cualquier juego extensivo Γ, precisemos el concepto de este tipo de planes para un jugador j, sus estrategias.

Definición 3.2.1. Una estrategia para el jugador j en el juego Γ es una función σ^j que a cada conjunto de información S_k^j le asocia un elemento de I_k^j.

Al conjunto de estrategias del jugador j en el juego Γ, lo denotaremos como Σ_j y al conjunto de perfiles como Σ. Es decir, $\Sigma = \prod \Sigma_j$.

Observación 3.2.1. Se podría argumentar, polemizando con la definición de estrategia de un jugador, que en el juego 2.2.2, por ejemplo, si la empresa M no piensa invertir, ya no sería necesario tomar previsiones para el tercer vértice, pues para alcanzar éste es necesario que M hubiera elegido invertir, en el primer vértice. El mismo cuestionamiento será válido en un enorme número de juegos ¿Por qué la teoría obliga a pensar en las decisiones que tomaría un jugador en situaciones que, como consecuencia de decisiones anteriores de él mismo, no se podrán alcanzar? Es claro que, debido a esta

exigencia, el número de estrategias que tienen los jugadores crece en forma considerable, lo que es un problema serio para encontrar la solución de un juego. Sin embargo, en aras de la mayor sencillez en el manejo formal y, también, debido a otros problemas que se discutirán posteriormente, la definición de estrategia se establece en la forma en que se ha procedido en 3.2.1.

Examinemos las estrategias que tiene cada jugador en algunos de los juegos que aparecen en la sección 2.2.

En el ejemplo 2.2.3, tenemos dos jugadores, un patrón (P) y un empleado (E). P tiene dos estrategias, pues sólo tiene un conjunto de información, con dos alternativas, ofrecer un salario de 100 o uno de 200. Denotemos como σ_1^P y σ_2^P a dichas estrategias. Entonces,

$\sigma_1^P\left(S_1^P\right) = 100$, $\sigma_2^P\left(S_1^P\right) = 200$

E, por su lado, tiene cuatro conjuntos de información. S_1^E corresponde al vértice en el que P le ha ofrecido cien pesos y él debe decidir si acepta o no acepta el empleo, es decir $I_1^E = \{ac, nac\}$. S_2^E consta del vértice análogo al anterior, cuando le han ofrecido 200, entonces $I_2^E = \{ac, nac\}$. S_3^E consta del vértice correspondiente a la situación en la que E ha aceptado un salario de 100 y debe decidir entre comportarse como un holgazán o trabajar a conciencia, es decir $I_3^E = \{holg, tr\}$. Por último, S_4^E es semejante a S_3^E, pero respecto al salario de 200 e $I_4^E = I_3^E$. Entonces, E tiene 2^4 estrategias. Por dar un ejemplo cualquiera, pensemos en $\widehat{\sigma}^E$, tal que $\widehat{\sigma}^E\left(S_1^E\right) = nac$, $\widehat{\sigma}^E\left(S_2^E\right) = ac$, $\widehat{\sigma}^E\left(S_3^E\right) = holg$, $\widehat{\sigma}^E\left(S_4^E\right) = tr$.

En los juegos finitos, a cada estrategia σ^j del jugador j le podemos asociar un elemento de ${I_1}^j \times {I_2}^j \times ... \times I_{r_j}^j$, cuya k-ésima coordenada es $\sigma^j\left(S_k^j\right)$, y donde r_j es el número de conjuntos de información del jugador j. Esta forma de expresar a las estrategias, a través de sus imágenes, resulta muy cómoda.

Entonces, en el caso de juegos finitos, identificamos Σ con ${I_1}^j \times {I_2}^j \times ... \times I_{r_j}^j$.

En el ejemplo 2.2.3 tendríamos, respecto a las estrategias de P que (100) correspondería a σ_1^P y (200) a σ_2^P, mientras que a $\widehat{\sigma}^E$ le correspondería $(nac, ac, holg, tr)$.

En los ejemplos 2.2.5 y 2.2.6 cada jugador tiene un solo conjunto de información. Estos ejemplos son como juegos rectangulares, donde las estrategias son las alternativas en los conjuntos de información respectivos. En el ejemplo 2.2.5 el tiempo juega un papel para describir la situación concreta, pues es importante el orden en que el padre entrevista a los hijos. En cambio,

en 2.2.6 no está involucrado el tiempo, las acciones son simultáneas, dicho juego es, en sentido estricto, un juego rectangular.

En el ejemplo 2.2.7, el jugador SIN tiene cinco conjuntos de información y, en cada uno de ellos, tiene asociado un conjunto de índices con dos elementos, por lo que tiene 2^5 estrategias y, por su lado, el jugador EM tiene dos conjuntos de información cada uno con un conjunto de índices de tres elementos, por lo que tiene 3^2 estrategias. Un perfil de estrategias en este juego es, por ejemplo, $((100, ac, h, ac, h), (50, ac))$.

Sabemos, ahora, cuántas estrategias tiene cada jugador en un juego extensivo finito, pero ¿cómo saber cuál es la estrategia que le conviene usar en cada uno de ellos?

Para desarrollar las primeras ideas, resultan claves los conceptos de subjuego y de juego podado que aparecieron en la sección 2.3 (capítulo 2). Y, junto con ellos, las ideas de construir una estrategia de un jugador para un juego extensivo, si se tienen estrategias, de dicho jugador, para un subjuego y para el juego podado correspondiente. Además, es importante la operación recíproca a la que acabamos de describir, es decir, la de descomponer la estrategia de un jugador, en el juego completo, en una estrategia para el subjuego y otra para el juego podado.

Definición 3.2.2. Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en un vértice A y sea σ^j una estrategia de j en el juego Γ. Podemos considerar la descomposición de σ^j en σ^j_A y $\sigma^j|A$, donde σ^j_A es la restricción de σ^j a la colección de conjuntos de información de j que pertenecen a Γ_A y $\sigma^j|A$ es la restricción de σ^j a la colección de conjuntos de información de j que pertenecen a $\Gamma|A$.

Definición 3.2.3. Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en un vértice A y sea $\widehat{\sigma}^j$ una estrategia de j en el juego Γ_A y $\widehat{\widehat{\sigma}}^j$ una estrategia de j en el juego $\Gamma|A$. Podemos considerar la composición de $\widehat{\sigma}^j$ y $\widehat{\widehat{\sigma}}^j$, para construir $\left(\widehat{\sigma}^j, \widehat{\widehat{\sigma}}^j\right)$ una estrategia del jugador j , para Γ, definida como

$$\left(\widehat{\sigma}^j, \widehat{\widehat{\sigma}}^j\right)\left(S_i^j\right) = \begin{cases} \widehat{\sigma}^j\left(S_i^j\right) & \text{si } S_i^j \text{ pertenece a } \Gamma_A \\ \widehat{\widehat{\sigma}}^j\left(S_i^j\right) & \text{si } S_i^j \text{ pertenece a } \Gamma|A \end{cases}$$

Consideremos el juego de las demandas triviales, en la versión de la sección 2.3 con pagos adecuados que la completan (figura 2.3.4). El juego se puede cortar en el vértice X, en los vértices Y y en los Z. Si cortamos en $Y_{(i')}$, se obtienen $\Gamma_{Y_{(i')}}$ y $\Gamma\left|Y_{(i')}\right.$. Sea la estrategia $\widetilde{\sigma}^E$para E descrita como sigue:

si a E se le exige una indemnización mayor o igual que $\widehat{i}$, E rechaza pagar y después contrata a un abogado; si a E se le exige una indemnización menor que $\widehat{i}$, E acepta pagarla y no contrata abogado, en caso de rechazar el pago. Sea $i' > \widehat{i}$, $\widetilde{\sigma}^E_{Y_{(i')}}$ es tal que en $Y_{(i')}$ rechaza pagar la indemnización i' y en $Z_{(i')}$ contrata un abogado. Mientras que $\widetilde{\sigma}^E \left| Y_{(i')} \right.$ es de tal manera que si, a E, se le exige una indemnización mayor o igual que $\widehat{i}$, E rechaza pagar y después contrata a un abogado y si a E se le exige una indemnización menor que $\widehat{i}$, E acepta pagarla y no contrataría un abogado, cuando rechazara pagar dicha indemnización.

Ahora, supongamos que E tiene la estrategia $\overline{\sigma}^E$ para $\Gamma_{Y_{(i')}}$ tal que si estuviera en el vértice $Y_{(i')}$ aceptaría pagar i' y en caso de estar en el vértice $Z_{(i')}$ no contrataría ningún abogado. Supongamos que $\overline{\overline{\sigma}}^E$ es la estrategia para $\Gamma \left| Y_{(i')} \right.$ que rechaza pagar indemnizaciones mayores que i' y acepta pagar las menores o iguales que i'. Además, $\overline{\overline{\sigma}}^E$ es de tal manera que no contrata un abogado, a menos que tenga que ir a juicio. Entonces, $\left(\overline{\sigma}^E, \overline{\overline{\sigma}}^E\right)$ es una estrategia para j, en el juego Γ y, con ella, j acepta pagar indemnizaciones menores o iguales que i' y rechaza pagar las mayores y nunca contrata un abogado, a menos de que C vaya a juicio, pero no antes.

La composición de estrategias está definida como una operación binaria entre una estrategia para el subjuego con raíz en un vértice, en el que el juego se puede cortar, y otra estrategia para el juego podado en dicho vértice. Por inducción, se puede extender la composición de estrategias que provienen de más de un "corte de Γ".

Observación 3.2.2. Es necesario notar que en alguno de los subjuegos o de los juegos podados puede no jugar el jugador j, en cuyo caso no tendría sentido hablar de estrategia de j para dicho subjuego (juego podado) y no aparecería en la composición.

Observación 3.2.3. Estas composiciones de estrategias serán muy útiles para construir el algoritmo de inducción hacia atrás de un juego extensivo Γ que encuentra "buenas" estrategias para cada jugador en Γ. Comencemos a discutir este tipo de análisis con los juegos de información perfecta finitos que es en los que siempre logra éxito.

3.3. Buenas Estrategias en Información Perfecta

Veamos que, en los juegos de información perfecta finitos y en algunos infinitos, los jugadores pueden, a la manera de los ajedrecistas, analizar el

juego desde el final hacia el inicio, buscando "jugar bien" cada parte que se analiza, para después "componer estrategias" y tener un plan global. Quien dió forma a esta idea, precisamente analizando el juego del ajedrez, fue el matemático Zermelo [60] quién a principios del siglo XX fue uno de los pioneros de la teoría de los juegos. Por ello, además de llamar a este método el algoritmo de inducción hacia atrás, también se le llama algoritmo de Zermelo.

Consideremos el ejemplo 2.2.1, el supermercado de Selten, donde una empresa M monopoliza un producto y tiene un competidor potencial C. Observemos la figura 3.3.1 y supongamos que el juego ha llegado hasta el vértice X. Bastará, entonces, con que M tome su decisión para que el juego termine con un pago para cada jugador. X representa una situación en la que C, sin hacer caso de las amenazas de M de bajar el precio, ha entrado a la competencia. Es claro que, puesta en X, a la empresa M le conviene no cumplir su amenaza y escoger NBP (no bajar los precios) para ganar 2, pues si cumpliera su amenaza y escogiera BP no ganaría nada.

Entonces, al hacer nuestro análisis desde la única "jugada" final que tiene este juego, concluimos que M escogerá NBP y determinará el vector de pagos $(2, 2)$. Hemos estudiado el subjuego Γ_X, a continuación podemos construir un nuevo juego que permitirá continuar el análisis. Para ello, en el juego original, borramos los vértices siguientes a X, a éste lo convertimos en un vértice final y le asociamos, como vector de pago, a $(2, 2)$. Este nuevo juego, se denota como $\Gamma \left| X_{(2,2)} \right.$ (ver figura 3.3.1). Ahora, podemos repetir el proceso dentro de $\Gamma \left| X_{(2,2)} \right.$. Allí, el único que toma decisiones es C, a él le convendrá entrar a competir, es decir, elegir E (entrar) para ganar 2, en vez de no entrar, NE, y obtener sólo un pago de 1. Por lo que podemos decir que las "estrategias solución" del juego original son (E) para C y (NBP) para M.

Con esta idea, podemos estudiar cualquier juego de información perfecta finito, con azar o sin azar, aunque, si el juego es "muy grande", el "podemos estudiar" se quedará en el ámbito de la teoría.

Analicemos, ahora, un juego con azar, como el del riesgo de contratar a un holgazán, ejemplo 2.2.3. Recordemos que en los vectores de pago, la primera coordenada corresponde a E y la segunda a P. X_1, X_2, X_3 y X_4 (figura 3.3.2) son los vértices que tienen alternativas finales y todos ellos son vértices de azar. Cada uno de ellos se puede convertir en vértice final, asignándole el vector de pagos esperados.

Así, vamos construyendo
$\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right.$, $\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)}$, $\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)} \left| X_{3(115,10)} \right.$,

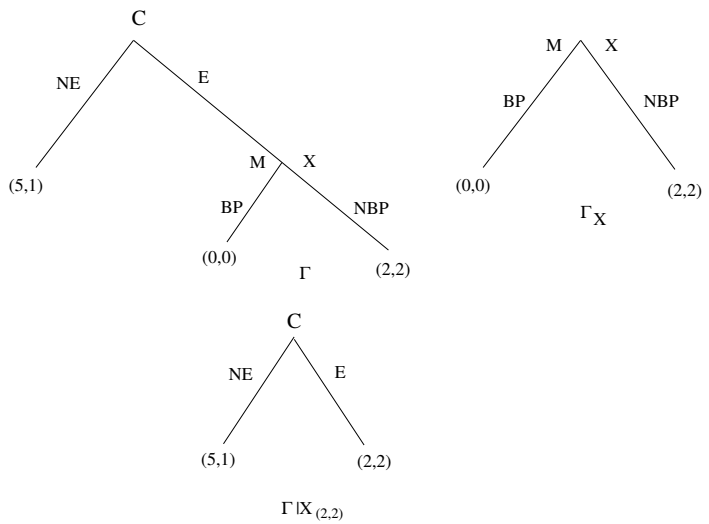

Figura 3.3.1:

$\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)} \left| X_{3(115,10)} \right| X_{4(190,180)}$.

En $\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)} \left| X_{3(115,10)} \right| X_{4(190,180)}$ (figura 3.3.3), se puede continuar el análisis, considerando los vértices X_5 y X_6, ambos del jugador E. En X_5, E ha sido contratado con 100 pesos de salario y le convendrá elegir ser holgazán (*holg*) y, entonces, llegaremos a

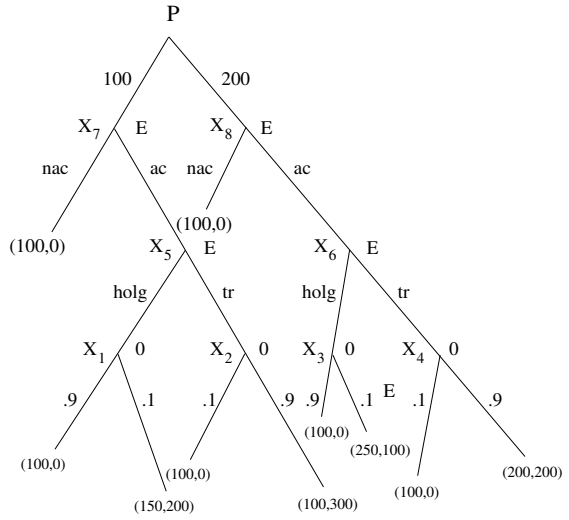

Figura 3.3.2:

$\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)} \left| X_{3(115,10)} \right| X_{4(190,180)} \left| X_{5(105,20)} \right.$.

En cambio, en X_6, a E lo contrataron con un salario de 200, y le convendrá ser trabajador (tr) y se llegaría a

$\Gamma \left| X_{1(105,20)} \right| X_{2(100,270)} \left| X_{3(115,10)} \right| X_{4(190,180)} \left| X_{5(105,20)} \right| X_{6(190,180)}$.

Si llamamos $\overline{\Gamma}$ a dicho juego, de nuevo, en éste, habría dos vértices del jugador E con alternativas que son vértices finales y, en los dos, le convendría aceptar el empleo que le ofrecen ya sea con salario de 100 o de 200 y en estos dos pasos construiríamos, en primer lugar $\overline{\Gamma} \left| X_{7(105,20)} \right.$, y $\overline{\Gamma} \left| X_{7(105,20)} \right| X_{8(190,180)}$.

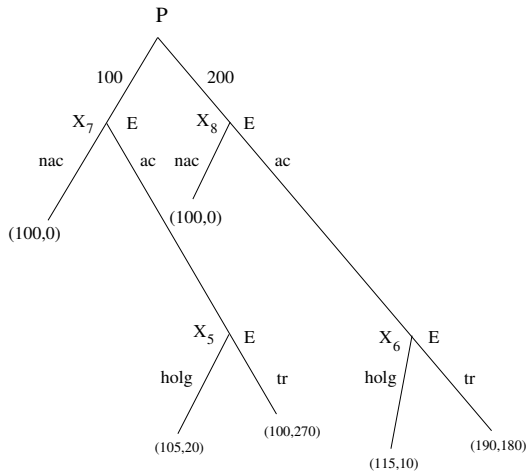

Figura 3.3.3:

Este último juego podado ya sólo consta del vértice del jugador P y de sus alternativas que son vértices finales. A P le conviene ofrecer un salario de 200, para obtener una ganancia de 180, en lugar de los 20 que obtendría, si ofrece un salario de 100.

Entonces, las "estrategias solución" serían (200) para P y $(ac, ac, holg, tr)$ para E. Con el perfil construido, P ganará 180 y E, 190.

A continuación, formalizaremos el procedimiento empleado en los ejemplos anteriores como un algoritmo que construye una estrategia para cada jugador, en los juegos finitos de información perfecta.

Algoritmo 1 (Inducción hacia atrás (Algoritmo de Zermelo)). *Sea* Γ *un juego extensivo de información perfecta finito, con árbol* $((V, A))$*, raíz* U *y conjunto de jugadores* N *no vacío.*

Primer paso: *Llamamos* Γ^0 *a* Γ, V_0 *a* V, A_0 *a* A *y* T_0 *a* T. *Ya que* V_0 *tiene más de un elemento, existe* $X_1 \in V_0$ *tal que* $\mathrm{Alt}(X_1) \subset T_0$. *Luego,* $\Gamma^0_{X_1}$ *es un juego cuyo árbol es*

$$(\{X_1\} \cup \mathrm{Alt}(X_1), \{\{X_1, Y\} | Y \in \mathrm{Alt}(X_1)\}),$$

y tenemos dos casos:

a) $\{X_1\} = S^{j_0}_{l_0}$, *para algún jugador* j_0, *entonces consideramos* F_0 *tal que* $\pi_{j_0}(F_0) = \max_{F \in Alt(X)} \pi_{j_0}(F)$ *y definimos* $\sigma^{j_0}_X\left(S^{j_0}_{l_0}\right) = \iota(F_0)$ *(índice de* F_0*).*

   Si $V - V_{X_1} = \theta$, *el algoritmo terminó habiendo construido* $\sigma^* = \left(\sigma^{j_0}_{X_1}\right)$.

   Si $V - V_{X_1} \neq \theta$, *definimos* $\Gamma^1 = \Gamma^0 \left| X_{1(\pi(F_0))}\right.$.

b) $X_1 \in S_0$, *definimos*

$$\Gamma^1 = \Gamma^0 \left| X_{1\left(\sum_{F \in Alt(X_1)} P(F|X_1)\pi(F)\right)}\right..$$

   Consideramos que este juego no se reduce a un vértice, pues sino Γ *sería un juego de azar.*

Segundo Paso: *Hipótesis de inducción*

Consideremos construidos los juegos $\Gamma^0, \Gamma^1, ..., \Gamma^{k-1}, \Gamma^k$, *los vértices* X_1,..., X_{k+1} *y las estrategias* $\sigma^{j_1}_{X_{m_1}}$, $\sigma^{j_2}_{X_{m_2}}$,..., $\sigma^{j_r}_{X_{m_r}}$ *tales que:*

a) $\Gamma^0, \Gamma^1, ..., \Gamma^{k-1}$ *son juegos de información perfecta, con raíz* U *y para* $i = 1, .., k$, $\Gamma^i = \Gamma^{i-1}\left|X_{i(d)}\right.$, *con*

$$d = \begin{cases} \pi(F_i) \ \text{ si } X_i \in S^{j_i}_{m_i} \text{ y } \pi_{j_i}(F_i) = \max_{F \in Alt(X_i)} \pi_{j_i}(F), \\ \sum_{F \in Alt(X_1)} P(F|X_1)\pi(F) \ \text{ si } X_i \in S^0. \end{cases}$$

   Cada Γ^i *se puede cortar en* X_{i+1}.

b) $Alt(X_i) \subset T_{i0}$ *y los subjuegos* $\Gamma^{i-1}_{X_i}$ *tienen un árbol de la forma*

$$(\{X_i\} \cup Alt(X_i), \{(X_i, Y) | Y \in Alt(X_i)\}).$$

c) *Además, para cada* X_{m_1} *que está en algún* $S_m^{j_i}$, $\sigma_{X_{m_1}}^{j_i}\left(S_m^{j_i}\right) = \epsilon\left(F_i\right)$, *donde* F_i *es tal que* $\pi_{j_i}\left(F_i\right) = \max\limits_{F \in Alt(X_i)} \pi_{j_i}\left(F\right)$.

Tercer Paso: *Paso general:*

a) *No existe* X_{k+1} *donde se corte* Γ^k *de tal manera que* $\mathrm{Alt}\left(X_{k+1}\right) \subset T_0^k$. *Si el único vértice no final de* Γ^k *pertenece a* $S_{m'}^{j_{r+1}}$, *constuimos* $\sigma^{j_{r+1}}$ *tal que* $\sigma^{j_{r+1}}\left(S_{m'}^{j_{r+1}}\right) = \iota\left(F_{i'}\right)$, *donde* X *es tal que* $\pi_{j_i}\left(X\right) = \max\limits_{X \in \mathrm{Alt}(U)} \pi_{j_i}\left(X\right)$.

El algoritmo termina con la composición, para cada $j \in N$, *de las estrategias* $\left\{\sigma^{j_i}\right\}$ *construidas tales que* $j_i = j$.

b) *Existe* X_{k+1} *donde se corta* Γ^k. *Consideramos* $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k \left| X_{k+1}\left(d\right)\right.$, *con*

$$d = \begin{cases} \pi\left(F_i\right) \ \ si\ X_{k+1} \in S_m^{j_i}\ y\ \pi_{j_i}\left(F_i\right) = \max\limits_{F \in Alt(X_{k+1})} \pi_{j_i}\left(F\right), \\ \sum\limits_{F \in Alt(X_1)} P\left(F\left|X_1\right.\right)\pi\left(F\right) \ \ si\ X_{k+1} \in S^0. \end{cases}$$

y σ^{j_i} *tal que* $\sigma^{j_i}\left(S_m^{j_i}\right) = \iota\left(F_i\right)$.

Se pasa al cuarto paso;

Cuarto Paso: *Se aplica el paso general a* Γ^{k+1}.

Teorema 3.3.1. *El algoritmo de Zermelo o de inducción hacia atrás, para juegos finitos de información perfecta, termina en un número finito de pasos construyendo una estrategia* σ^{*j} *para cada* $j \in N$.

Demostración. Todos los pasos son realizables, no hay repeticiones y el número de vértices es finito. Además, para todo Y vértice no final de Γ, en algún momento $X = Y$, por lo que las estrategias de los jugadores quedarán completas. ∎

Observación 3.3.1. Es claro que las estrategias construidas por el algoritmo no son únicas, pues en algunos pasos puede existir más de una solución al problema $\max\limits_{F \in \mathrm{Alt}(X)} \pi_j^k\left(F\right)$.

3.4. Forma Normal y Equilibrio de Nash

La tarea en esta sección consiste en construir, para cada juego extensivo finito Γ, un juego rectangular que sea equivalente, en cierto sentido, a Γ. Se considerarán los equilibrios de Nash de dicho juego rectangular como las soluciones de Γ.

¿Qué pasa en un juego extensivo finito, cuando cada jugador ha elegido una de sus estrategias? Examinémoslo para algunos de los ejemplos de la sección 2.2.

Si en "La cadena de supermercados de Selten" (ejemplo 2.2.2, figura 2.2.2), el jugador M escogiera (inv, bp, bp) y el jugador C escogiera (e, e), entonces el juego terminaría en el vértice final con vector de pago $(1, 0)$. En este juego, dado cualquier perfil o pareja de estrategias $\left(\sigma^M, \sigma^C\right)$, encontramos el vector de pagos correspondiente al único vértice final al que nos conducen las estrategias dadas.

Podemos construir, entonces, un juego rectangular que obtiene los mismos resultados (pagos) para cada pareja de estrategias que los que se obtienen en el juego extensivo. La matriz de pago de dicho juego rectangular es la siguiente:

$$\begin{array}{l} \\ (INV, BP, BP) \\ (INV, BP, NBP) \\ (INV, NBP, BP) \\ (INV, NBP, NBP) \\ (NINV, BP, BP) \\ (NINV, BP, NBP) \\ (NINV, NBP, BP) \\ (NINV, NBP, NBP) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (E,E) & (E,NE) & (NE,E) & (NE,NE) \end{array} \\ \begin{pmatrix} (1,0) & (1,0) & (3,1) & (3,1) \\ (1,0) & (1,0) & (3,1) & (3,1) \\ (0,2) & (0,2) & (3,1) & (3,1) \\ (0,2) & (0,2) & (3,1) & (3,1) \\ (0,0) & (5,1) & (0,0) & (5,1) \\ (2,2) & (5,1) & (2,2) & (5,1) \\ (0,0) & (5,1) & (0,0) & (5,1) \\ (2,2) & (5,1) & (2,2) & (5,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos buscar, entonces, los equilibrios de Nash (ep) de tal juego rec-

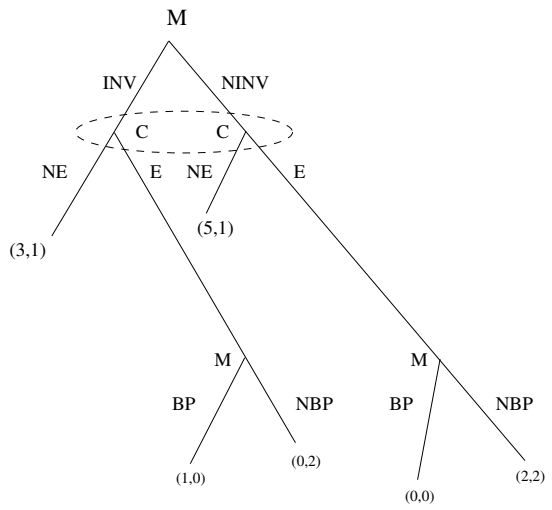

Figura 3.4.1:

tangular. Estos son:

$$
\begin{aligned}
&((NINV, BP, NBP), (E, E)),\\
&((NINV, NBP, NBP), (E, E)),\\
&((NINV, BP, BP), (E, NE)),\\
&((NINV, NBP, BP), (E, EN)),\\
&((INV, BP, BP), (NE, E)),\\
&((INV, BP, NBP), (NE, E))*,\\
&((NINV, BP, BP), (NE, NE)),\\
&((NINV, NBP, BP)), (NE, NE)).
\end{aligned}
$$

Observemos que el equilibrio que tiene asterisco corresponde al perfil obtenido con el algoritmo de Zermelo de la sección anterior.

Examinemos un nuevo ejemplo.

Ejemplo 3.4.1. Supongamos que la empresa C del ejemplo 2.2.2, cuando tiene que decidir si entra o no a competir, no sabe si M realizó alguna inversión, la que le daría la plena posibilidad de cumplir la amenaza de bajar los precios, sin castigarse a sí mismo, o si no ha hecho tal inversión y está haciendo una amenaza que es un bluff (figura 3.4.1).

Con este cambio, C no tiene información perfecta. Sin embargo, sigue

ocurriendo que al escoger, M y C, una estrategia cada uno, queda determinado un solo vértice final y un solo vector de pago.

Nuevamente podemos construir un juego rectangular asociado al juego 3.4.1

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} E & NE \end{array} \\ \begin{array}{l} (INV, BP, BP) \\ (INV, BP, NBP) \\ (INV, NBP, BP) \\ (INV, NBP, NBP) \\ (NINV, BP, BP) \\ (NINV, BP, NBP) \\ (NINV, NBP, BP) \\ (NINV, NBP, NBP) \end{array} & \begin{pmatrix} (1,0) & (3,1) \\ (1,0) & (3,1) \\ (0,2) & (3,1) \\ (0,2) & (3,1) \\ (0,0) & (5,1) \\ (2,2) & (5,1) \\ (0,0) & (5,1) \\ (2,2) & (5,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Los equilibrios de Nash (ep) de este juego son

$$\begin{aligned} &((Ninv, bp, Nbp), (E)), \\ &((Ninv, Nbp, Nbp), (E)), \\ &((Ninv, bp, bp), (EN)), \\ &((Ninv, Nbp, bp), (EN)). \end{aligned}$$

Los dos juegos extensivos finitos que hemos examinado no tienen jugadas de azar y, para ellos, hemos construido juegos rectangulares, donde el vector de pago que corresponde a un perfil de estrategias es el mismo que el que corresponde a la partida del juego extensivo determinada por dicho perfil. El resultado puede establecerse para cualquier juego extensivo finito sin azar.

Teorema 3.4.1. *Sea Γ un juego extensivo de n personas, tal que $S_0 = \emptyset$ y $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right) \in \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times ... \times \Sigma_n$. Entonces existe una partida única*

$$t_\sigma = \{A_0 = U, A_1, ..., A_l\}$$

tal que si $A_m \in t_\sigma$ y $A_m \in S_k^j$, se tiene que $\sigma^j\left(S_k^j\right) = \iota\left(A_{m+1}\right)$.

Demostración. Sea $A_0 = U$. Consideramos $S_i^{j_0}$ tal que $A_0 \in S_i^{j_0}$, denotamos como A_1 al vértice de $Alt(A_0)$ tal que $\iota\left(A_1\right) = \sigma^{j_0}\left(S_k^{j_0}\right)$y construimos la trayectoria $t_1 = \{A_0 = U, A_1\}$.

Supongamos construida la trayectoria $t_r = \{A_0 = U, A_1, ..., A_r\}$, tal que para todo m menor que r, si $A_m \in S_k^j$, entonces $\sigma^j\left(S_k^j\right) = \iota\left(A_{m+1}\right)$. Si A_r es un vértice final, $t_\sigma = t_r$.

Si A_r no es un vértice final, consideramos $S_i^{j_r}$ tal que $A_r \in S_i^{j_r}$. Entonces consideramos $t_{r+1} = \{A_0 = U, A_1, ..., A_r, A_{r+1}\}$, donde $\iota\left(A_{r+1}\right) = \sigma^{j_r}\left(S_i^{j_r}\right)$. La trayectoria t_{r+1} tiene las mismas propiedades que t_r.

De nuevo nos preguntamos si A_{r+1} es un vértice final. Si lo es, entonces $t_\sigma = t_{r+1}$; si no lo es, construimos A_{r+2}, de la misma forma en que se procedió con A_{r+1}. Si no existen trayectorias infinitas en Γ, el procedimiento termina en un número finito de pasos construyendo la partida t_σ, con las propiedades requeridas, es claro que ésta es única. Si existen trayectorias infinitas, la partida t_σ que se construye con ese procedimiento puede ser finita o infinita. ∎

Podemos asociar, entonces, a cualquier juego extensivo finito, sin vértices de azar, el juego rectangular $(N, \{\Sigma_j\}, \varphi)$ con $\varphi(\sigma) = \pi(F)$, si F es el vértice final de la partida t_σ. A dicho juego rectangular le llamamos la forma normal de Γ.

La forma normal de juegos con azar

Cuando en un juego interviene el azar, las cosas no serán iguales. Consideremos el ejemplo 2.2.2, pero transformemos ahora la cadena de Selten de tal manera que en el vértice inicial, el azar, en vez de M, es quien decide a cuál de los vértices del conjunto de información de C se va a llegar. Supongamos, por ejemplo, que con dos tercios de probabilidad llegaremos al vértice izquierdo X y con un tercio al derecho Y (figura 3.4.2). Entonces al escoger cada jugador una estrategia, no queda determinado un sólo vértice final. Si, por ejemplo, M escoge su estrategia (bp, bp) y C su estrategia (NE), entonces con probabilidad dos tercios podemos llegar a F_1 y con probabilidad un tercio podemos llegar a F_2.

En forma general, dado un perfil de estrategias puras, podemos construir la probabilidad de que el juego llegue a un vértice Z, si está en un vértice X, donde Z es mayor o igual que X.

1. Sea σ un perfil de estrategias, X un vértice y Z una alternativa de X,

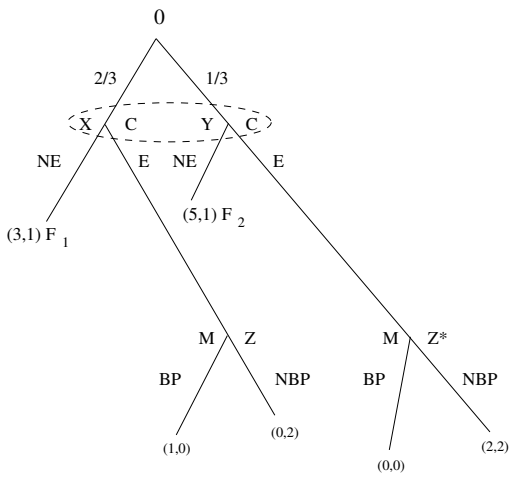

Figura 3.4.2:

definimos:

$$P_\sigma\left(Z\,|X\right) = \begin{cases} P\left(Z\,|X\right) & \text{si } X \in S_0 \\ 1 & \text{si } X \in S_k^j \text{ y } \sigma^j\left(S_k^j\right) = \iota\left(Z\right) \\ 0 & \text{si } X \in S_k^j \text{ y } \sigma^j\left(S_k^j\right) \neq \iota\left(Z\right) \end{cases}$$

2. Para $X \in V$, definimos $P_\sigma\left(X\,|X\right) = 1$.

3. Para X y Z tales que $X < Z$, consideramos la trayectoria $\{X_0 = X, X_1, ..., X_m = Z\}$ (trayectoria única que une a X con Z) y definimos

$$P_\sigma\left(Z\,|X\right) = P_\sigma\left(X_1\,|X_0\right) P_\sigma\left(X_2\,|X_1\right) ... P_\sigma\left(X_m\,|X_{m-1}\right).$$

Para cualquier vértice X, denotamos como $P_\sigma\left(X\right)$ a $P_\sigma\left(X\,|U\right)$. Sea t tal que $t = W\left(F\right)$; entonces tendrán el mismo significado $P_\sigma\left(t\right)$ y $P_\sigma\left(F\right)$.

Dado un vértice arbitrario X, denotaremos como $\langle X\rangle$ al conjunto de vértices finales mayores que X y como $long(X)$ a la longitud de la trayectoria más larga que une al vértice X con alguno de los vértices de $\langle X\rangle$.

Proposición 3.4.2. *Si X es un vértice, $\sigma \in \Sigma$ y $F \in \langle X\rangle$, entonces $P_\sigma(F\,|X)$ es no negativo y $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X) = 1$.*

Demostración. Claramente $P_\sigma(F\,|X\,) \geq 0$, pues por definición es un producto de números no negativos. La demostración de $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = 1$ se hará por inducción sobre $long(X)$.

Si $long(X) = 1$, tenemos que $Alt(X) = \langle X\rangle$.

Entonces, si X es un vértice de azar, $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = \sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P(F\,|X\,) = 1$ y si $X \in S_k^j$, $\sigma^j\left(S_k^j\right) = \epsilon\left(\widehat{F}\right)$, para un sólo vértice $\widehat{F}$ de $\langle X\rangle$, entonces $P_\sigma(\widehat{F}\,|X\,) = 1$. Mientras que $P_\sigma(F\,|X\,) = 0$, para todo $F \in \langle X\rangle$, $F \neq \widehat{F}$. Entonces, $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = 1$.

Supongamos, por hipótesis de inducción que si X es tal que $long(X) < k$, entonces $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = 1$.

Veamos que ocurre si X es tal que $long(X) = k$.

$\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = \sum\limits_{Y\in Alt(X)} \sum\limits_{F\in\langle Y\rangle} P_\sigma\,(Y\,|X\,)\,P_\sigma(F\,|Y\,) =$
$\sum\limits_{Y\in Alt(X)} P_\sigma\,(Y\,|X\,) \sum\limits_{F\in\langle Y\rangle} P_\sigma(F\,|Y\,)$.

Como $long(Y) < k$, $\sum\limits_{F\in\langle Y\rangle} P_\sigma(F\,|Y\,) = 1$.

Entonces, $\sum\limits_{F\in\langle X\rangle} P_\sigma(F\,|X\,) = \sum\limits_{Y\in Alt(X)} P_\sigma\,(Y\,|X\,) = 1$. ∎

Al considerar el caso en que el vértice X es U, el vértice de inicio del juego, obtenemos, como corolario, el resultado de que cualquier perfil de estrategias determina una distribución de probabilidad entre los vértices finales del juego.

Corolario 3.4.3. *En un juego extensivo finito, cualquier perfil de estrategias σ induce una distribución de probabilidad entre los vértices finales.*

Demostración. Todo vértice final está en $\langle U\rangle$, así que $P_\sigma(F\,|U\,) \geq 0$ y $\sum\limits_{F\in T} P_\sigma(F) = \sum\limits_{F\in\langle U\rangle} P_\sigma(F\,|U\,) = 1$. ∎

Con base en ese resultado, podemos asociar un juego rectangular a cada juego extensivo finito Γ. A ese juego le llamaremos la forma normal de Γ.

Definición 3.4.4. Dado un juego extensivo finito arbitrario Γ, con el conjunto de jugadores N, la función de pago π y los conjuntos de estrategias puras Σ_j, el juego $(N, \{\Sigma_j\}, \varphi)$ es la forma normal de Γ, si $\varphi : \Sigma \to R^n$ está definida como $\varphi\,(\sigma) = \sum\limits_{F\in T} P_\sigma\,(F)\,\pi\,(F)$.

Observación 3.4.1. En un juego extensivo Γ, sin azar, cada vez que los jugadores escogen un perfil de estrategias puras obtienen el mismo pago con la forma normal de Γ que el obtenido en Γ, por lo que podríamos decir que la forma normal representa cabalmente a Γ. En cambio, en la forma normal de un juego extensivo con azar, un perfil de estrategias tiene que usarse un número enorme de veces para dar el mismo pago medio en ambas formas del juego, extensiva y normal. Es decir, la forma normal representa a Γ en el largo plazo. En ambos casos, los equilibrios de Nash de la forma normal se considerarán los equilibrios de Nash del juego extensivo.

Definición 3.4.5. Un perfil de estrategias σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras del juego extensivo finito Γ, si es un equilibrio de Nash en estrategias puras de la forma normal de Γ.

Construyamos la forma normal de otros juegos extensivos finitos para encontrar sus equilibrios de Nash (ep). Empecemos con el ejemplo de la figura 3.4.2.

$$\begin{array}{l} \\ (BP,BP) \\ (BP,NBP) \\ (NBP,BP) \\ (NBP,NBP) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} E & NE \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2/3,0) & (11/3,1) \\ (4/3,2/3) & (11/3,1) \\ (0,4/3) & (11/3,1) \\ (2/3,2) & (11/3,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Los equilibrios de Nash (ep) de este juego son:

$$((BP,BP),(NE)) \text{ y}$$
$$((BP,NBP),(NE)).$$

La forma normal del juego del riesgo moral (Ejemplo 2.2.3) es la matriz siguiente, en la que el jugador I es el empleado E.

$$
\begin{array}{l}
 \\
(ac, ac, ho\lg, ho\lg) \\
(ac, ac, ho\lg, tr) \\
(ac, ac, tr, ho\lg) \\
(ac, ac, tr, tr) \\
(ac, nac, ho\lg, ho\lg) \\
(ac, nac, ho\lg, tr) \\
(ac, nac, tr, ho\lg) \\
(ac, nac, tr, tr) \\
(nac, ac, ho\lg, ho\lg) \\
(nac, ac, ho\lg, tr) \\
(nac, ac, tr, ho\lg) \\
(nac, ac, tr, tr) \\
(nac, nac, ho\lg, ho\lg) \\
(nac, nac, ho\lg, tr) \\
(nac, nac, tr, ho\lg) \\
(nac, nac, tr, tr)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} 100 & 200 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
(105, 20) & (115, 10) \\
(105, 20) & (190, 180) \\
(100, 270) & (115, 10) \\
(100, 270) & (190, 180) \\
(105, 20) & (100, 0) \\
(105, 20) & (100, 0) \\
(100, 270) & (100, 0) \\
(100, 270) & (100, 0) \\
(100, 0) & (115, 10) \\
(100, 0) & (190, 180) \\
(100, 0) & (115, 10) \\
(100, 0) & (190, 180) \\
(100, 0) & (100, 0) \\
(100, 0) & (100, 0) \\
(100, 0) & (100, 0) \\
(100, 0) & (100, 0)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Los equilibrios de Nash (ep) del juego de riesgo moral son:

$$
\begin{aligned}
&((ac, ac, ho\lg, ho\lg), (100)), \\
&((ac, nac, ho\lg, ho\lg), (100)), \\
&((ac, nac, ho\lg, tr), 100), \\
&((ac, ac, ho\lg, tr), (200))*, \\
&((nac, ac, ho\lg, tr), (200)) \text{ y} \\
&((nac, ac, tr, tr), (200)).
\end{aligned}
$$

El equilibrio que tiene asterisco es la solución obtenida con el algoritmo de Zermelo.

En la matriz siguiente se representa la forma normal del juego del duelo (ejemplo 2.2.4) cuando los duelistas están separados 5 pasos, tienen ambos la misma habilidad para disparar y la probabilidad de matar al contrario depende del número de pasos a que se encuentran, cuando se efectúa el disparo, de la siguiente manera: $p(5) = .2$, $p(4) = .4$, $p(3) = .6$, $p(2) = .8$, $p(1) = .9$, $p(0) = 1$

$$
\begin{array}{c}
 \\ (d,d,d) \\ (d,d,e) \\ (d,e,d) \\ (d,e,e) \\ (e,d,d) \\ (e,d,e) \\ (e,e,d) \\ (e,e,e)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} (d,d) & (d,e) & (e,d) & (e,e) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
(-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) \\
(-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) \\
(-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) \\
(-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) & (-.6,.6) \\
(.2,-.2) & (.2,-.2) & (.2,-.2) & (.2,-.2) \\
(.2,-.2) & (.2,-.2) & (.2,-.2) & (.2,-.2) \\
(.2,-.2) & (.2,-.2) & (-.6,.6) & (.8,-.8) \\
(.2,-.2) & (.2,-.2) & (-.6,.6) & (-1,\ \ 1)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Los equilibrios de Nash (ep) del juego son:

$$
\begin{aligned}
&((esperar, disparar, disparar), (disparar, disparar))*,\\
&((esperar, disparar, disparar), (disparar, esperar)),\\
&((esperar, disparar, disparar), (esperar, disparar))*,\\
&((esperar, disparar, esperar), (disparar, disparar)),\\
&((esperar, disparar, esperar), (disparar, esperar)),\\
&((esperar, disparar, esperar), (esperar, disparar)).
\end{aligned}
$$

Las soluciones de Zermelo están marcadas con asterisco.
El juego del póker simplificado (Ejemplo 2.2.8) tiene como forma normal:

$$
\begin{array}{c}
 \\ (ver, ap, ap) \\ (ver, ap, nap) \\ (ver, nap, ap) \\ (ver, nap,\ \ nap) \\ (bl, ap, ap) \\ (bl, ap, nap) \\ (bl, nap, ap) \\ (bl, nap,\ \ nap)
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} creer & no\ creer \end{array} \\
\begin{pmatrix}
(0,0) & (1/2,-1/2) \\
(0,0) & (-1,1) \\
(0,0) & (1/2,-1/2) \\
(0,0) & (-1,1) \\
(1,-1) & (0,0) \\
(1,-1) & (-3/2,3/2) \\
(1,-1) & (1/2,-1/2) \\
(1,-1) & (-1,1)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

El único equilibrio del juego es
$((bluff,\ no\ apostar,\ apostar), (no\ creer))$.
Aún no podemos hablar de solución de Zermelo para este juego.

Tenemos, entonces, el concepto de equilibrio de Nash (ep) para los juegos extensivos finitos. Sin embargo, es claro que no todos los juegos extensivos finitos tendrán equilibrio de Nash (ep), pues basta observar que para cualquier juego rectangular hay por lo menos un juego extensivo del que es forma normal y sabemos que en los juegos rectangulares no siempre existen equilibrios de Nash en estrategias puras.

Otro problema, que a estas alturas será evidente para todos, es que la forma normal de un juego es frecuentemente tan grande que resulta inmanejable o imposible de construir. Un ejemplo ilustrativo en esa dirección es el del juego del "gato". Juego tan sencillo que cualquier niño puede descubrir su solución, pero que tiene una forma normal enorme. Contar el número de estrategias de cada jugador en el gato es un ejercicio común en los textos de teoría de juegos. Su forma extensiva tiene muchas simetrías y no es difícil construir la solución de Zermelo para ese juego, pero esa es otra historia.

En los ejemplos de información perfecta mostrados ha ocurrido que siempre tienen soluciones de Zermelo y que son equilibrios de Nash, demostraremos en la sección siguiente que éstos son resultados generales. En cambio, no es cierto, como también muestran los ejemplos, que cada equilibrio de Nash se pueda construir con la inducción hacia atrás. Este tipo de procedimiento constituye un procedimiento para seleccionar equilibrios, en los que los contendientes eligen bien en cada parte de un juego extensivo. Además, provocan que la forma normal de los juegos de información perfecta finitos sólo tenga una importancia teórica y no tenga sentido práctico para encontrar un equilibrio de Nash.

Por la importancia que tiene la inducción hacia atrás (o algoritmo de Zermelo), tanto en el sentido práctico, cómo en cuanto a su papel en la selección de equilibrios, se buscará generalizarla en varios contextos. Por lo pronto, en la siguiente sección estudiaremos sus posibilidades para los juegos de información no perfecta.

3.5. Equilibrios Perfectos en Subjuegos

Podremos generalizar el algoritmo de inducción hacia atrás para juegos extensivos finitos, aunque no sean de información perfecta, pero que puedan cortarse en alguno de sus vértices y cuyos subjuegos tengan equilibrios de Nash (ep). La idea consiste en cortar un juego Γ en los subjuegos "finales" más pequeños posibles, para analizarlos en busca de equilibrios de Nash (ep) y, en caso de que existan, seleccionar alguno de ellos. Posteriormente se supondría que si el juego hubiese llegado al inicio X de uno de dichos

subjuegos, denotémoslo como Γ_X, los jugadores se comportarían de acuerdo al equilibrio seleccionado y, entonces, se puede considerar que X es un vértice final de un juego que resulta de Γ después de borrar a Γ_X excepto X mismo. Además, a X se le asigna como vector de pago el que corresponde al mencionado equilibrio. En el algoritmo definido y ejemplificado en la sección 2.3, es eso exactamente lo que se hace, con la particularidad de que todos los subjuegos encontrados allí son de longitud 1 y siempre tienen equilibrios de Nash (ep), cosa que en general no sucede.

Antes de formalizar el nuevo algoritmo, veamos su funcionamiento en algunos ejemplos.

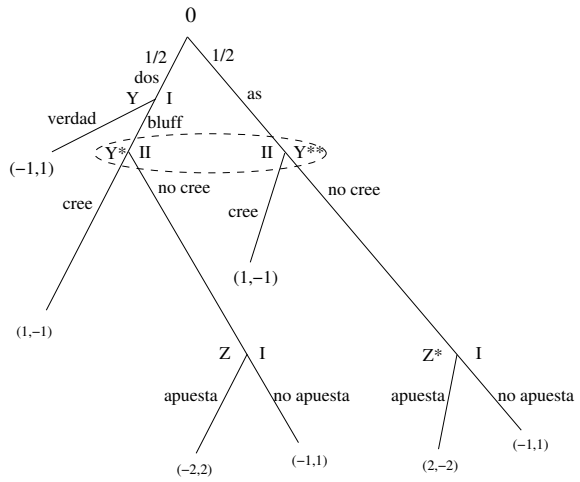

Figura 3.5.1:

Pensemos en el póker simplificado (ejemplo 2.2.8). La representación de su modelo extensivo se repite en la figura 3.5.1. Desde luego que el juego no se puede cortar en vértices pertenecientes a un conjunto de información que tiene más de un vértice, por ejemplo en Y^* y en Y^{**}, tampoco en vértices cuyo conjunto de información sólo está formado por ellos mismos, como Y, o son de azar, pero en los que algún vértice mayor que Y comparte conjunto de información con vértices que no son mayores que Y. En el juego, existen dos vértices en donde el juego sí se puede cortar, Z y Z^*. Los subjuegos correspondientes son Γ_Z y Γ_{Z^*}. Consideremos la forma normal de Γ_Z en busca de equilibrios.

FORMA NORMAL DE Γ_Z

$$\begin{array}{c} \textit{apostar} \\ \textit{no apostar} \end{array} \begin{pmatrix} (-2,2) \\ (-1,1) \end{pmatrix}$$

Se podrían poner únicamente los pagos del jugador I, pues II no toma decisiones en este juego.

El único equilibrio de Nash(ep) de Γ_Z es (*no apostar*), entonces obtenemos el juego podado $\Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right.$ que se representa en la figura 3.5.2. El único vértice en el que se puede cortar este juego es en Z^*. Obtenemos el juego $\Gamma \left| Z_{(-1,1)\ Z^*} \right.$ cuya forma normal es la siguiente:

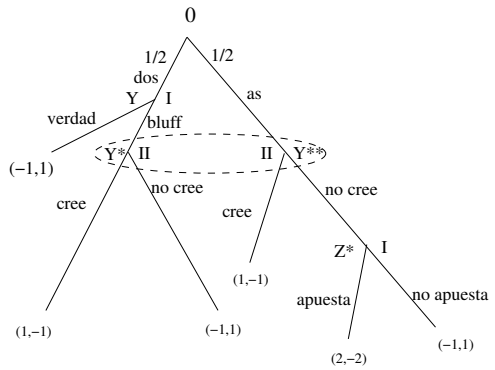

Figura 3.5.2:

FORMA NORMAL DE $\Gamma \left| Z_{(-1,1)\ Z^*} \right.$

$$\begin{array}{c} \textit{apostar} \\ \textit{no apostar} \end{array} \begin{pmatrix} (2,-2) \\ (-1,1) \end{pmatrix}$$

El único equilibrio de $\Gamma \left| Z_{(-1,1)\ Z^*} \right.$ es (*apostar*). Entonces, obtenemos el juego podado $\Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right| Z^*_{(2,-2)}$ que se representa en la figura 3.5.2. Este juego ya no se puede cortar, por lo que necesitamos su forma normal.

FORMA NORMAL DE $\Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right| Z^*_{(2,-2)}$

$$\begin{array}{c} \\ \textit{verdad} \\ \textit{bluff} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{creer} & \textit{no creer} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,0) & (1/2,-1/2) \\ (1,-1) & (1/2,-1/2) \end{pmatrix} \end{array}$$

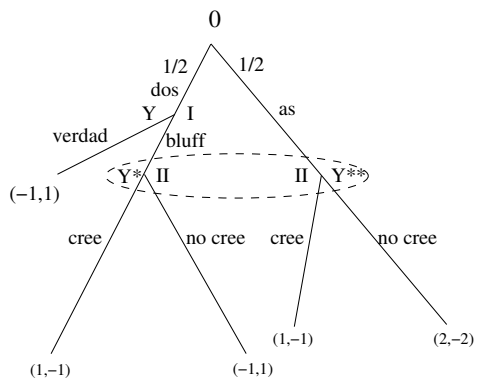

Figura 3.5.3:

El único equilibrio de Nash (ep) del juego $\Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right| Z^*_{(2,-2)}$ es

$$((\textit{bluff}), (\textit{no creer})) .$$

Podemos componer los equilibrios de los juegos

$$\Gamma_Z, \Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right._{Z^*} \quad \text{y} \quad \Gamma \left| Z_{(-1,1)} \right| Z^*_{(2,-2)}$$

y obtenemos el perfil de estrategias

$$((\textit{bluff,no apostar,apostar}),(\textit{no creer})).$$

Este es el único equilibrio del juego original como estudiamos en la sección 3.4. Pero, ahora, es claro que este equilibrio se puede obtener con un algoritmo que hace un análisis de inducción hacia atrás.

Hemos compuesto los equilibrios de dos subjuegos con el del juego dos veces podado y encontrado un equilibrio de la forma normal del juego completo. Este procedimiento al que podemos referirnos como "la composición de equilibrios" siempre obtendrá un equilibrio del juego completo. Para demostrar la validez de este hecho, probemos antes un lema que muestra que el juego podado concentra, en cierto sentido, al juego original.

Dado un juego Γ que se puede descomponer en un vértice X, si denotamos como φ a la función de pago en la forma normal de Γ, denotaremos como φ_X a la función de pago en la forma normal de Γ_X y como $\varphi \left| X_{(d)} \right.$ a la función de pago en la forma normal de $\Gamma \left| X_{(d)} \right.$.

Lema 3.5.1. *Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en el vértice X. Para todo perfil de estrategias $\sigma \in \Sigma$,*

$$\varphi(\sigma) = \varphi \left| X_{(\varphi_X(\sigma_X))} \right. (\sigma \left| X \right.) .$$

Demostración. Toda $\sigma \in \Sigma$ se puede considerar como la composición $(\sigma_X, \sigma|X)$. Además,

$$\varphi(\sigma) = \sum_{F\in T, F>X} P_\sigma(F)\,\pi(F) + \sum_{F\in T, F\not>X} P_\sigma(F)\,\pi(F) =$$
$$\sum_{F\in T, F>X} P_\sigma(X)\,P_\sigma(F|X)\,\pi(F) + \sum_{F\in T, F\not>X} P_\sigma(F)\,\pi(F) =$$
$$P_\sigma(X) \sum_{F\in T, F>X} P_\sigma(F|X)\,\pi(F) + \sum_{F\in T, F\not>X} P_\sigma(F)\,\pi(F) =$$
$$P_\sigma(X)\,\varphi_X(\sigma_X) + \sum_{F\in T, F\not>X} P_{\sigma|X}(F)\,\pi(F) =$$
$$\sum_{F\in T|X} P_{\sigma|X}(F)\,\pi(F) = \varphi\left|X_{(\varphi_X(\sigma_X))}(\sigma|X)\right. . \blacksquare$$

Teorema 3.5.2. *Sea Γ un juego finito que se puede descomponer en X, $\widehat{\sigma}$ un equilibrio de Nash (ep) de Γ_X y $\widehat{\widehat{\sigma}}$ un equilibrio de Nash (ep) de $\Gamma\left|X_{(\varphi_X(\widehat{\sigma}))}\right.$. Entonces $(\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})$ es un equilibrio de Nash (ep) de Γ.*

Demostración. Si $j \in N$ y $\sigma^j \in \Sigma_j$, tenemos que

$$\varphi_j\left((\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})\left|\sigma^j\right.\right) =$$
$$P_{\left(\widehat{\widehat{\sigma}}|\sigma^j_X\right)}(X)\,\varphi_{jX}\left(\widehat{\sigma}\left|\sigma^j_X\right.\right) + \sum_{F\in T|X} P_{\left(\widehat{\widehat{\sigma}}|\sigma^j\right)}(F)\,\pi_j(F).$$

Como $\widehat{\sigma}$ es equilibrio de Γ_X, $\varphi_{jX}\left(\widehat{\sigma}\left|\sigma^j_X\right.\right) \le \varphi_{jX}(\widehat{\sigma})$.

Es decir, $\varphi_j\left((\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})\left|\sigma^j\right.\right) \le$

$$P_{\left(\widehat{\widehat{\sigma}}|\sigma^j_X\right)}(X)\,\varphi_{jX}(\widehat{\sigma}) + \sum_{F\in T|X} P_{\left(\widehat{\widehat{\sigma}}|\sigma^j|X\right)}(F)\,\pi_j(F) = \varphi_j\left|X_{\varphi_X(\widehat{\sigma})}\left(\widehat{\widehat{\sigma}}\left|\sigma^j\right.\right)\right. .$$

Pero, $\widehat{\widehat{\sigma}}$ es un equilibrio de Nash (ep) de $\Gamma\left|X_{(\varphi_X(\widehat{\sigma}))}\right.$, por lo que

$$\varphi_j\left|X_{\varphi_X(\widehat{\sigma})}\left(\widehat{\widehat{\sigma}}\left|\sigma^j\right.\right)\right. \le \varphi_j\left|X_{\varphi_X(\widehat{\sigma})}\left(\widehat{\widehat{\sigma}}\right)\right. .$$

Por el lema 3.5.1, tenemos

$\varphi_j\left|X_{\varphi_X(\widehat{\sigma})}\left(\widehat{\widehat{\sigma}}\right)\right. = \varphi_j\left((\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})\right)$.

Uniendo estos resultados obtenemos, finalmente, que

$\varphi_j\left((\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})\left|\sigma^j\right.\right) \le \varphi_j\left((\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})\right)$, para todo jugador j y para toda $\sigma^j \in \Sigma_j$.

Es decir, $(\widehat{\sigma}, \widehat{\widehat{\sigma}})$ es un equilibrio de Nash (ep) de Γ. $\blacksquare$

El teorema recíproco no es cierto. Es decir, si un juego Γ se puede cortar en el vértice X y σ^* es un equilibrio de Nash (ep) de Γ, no necesariamente σ^*_X y $\sigma^*|X$ son equilibrios de Γ_X y de $\Gamma|X$, respectivamente. En el ejemplo

de la figura 3.4.2, $((BP, BP); (NE))$ es un equilibrio de Nash en estrategias puras de ese juego, pero su restricción al subjuego que empieza en Z^* no es equilibrio de dicho subjuego. Cuando los jugadores usan la pareja de estrategias $((BP, BP); (NE))$, la probabilidad de que el juego llegue a Z^* es cero, por lo que es intranscendente como pensaba actuar el jugador M en este subjuego. Es decir, el hecho de jugar "mal" en un vértice al que no se llegará, no quita a un perfil su carácter de equilibrio de Nash.

Es natural, por el contrario, esperar que si un equilibrio determina una probabilidad positiva de llegar a un vértice X, en donde el juego se puede descomponer, entonces la restricción del equilibrio al subjuego que empieza en X sea a su vez equilibrio del subjuego; este resultado se prueba en el teorema 3.5.3.

Teorema 3.5.3. *Si Γ se descompone en X y σ^* es un equilibrio de Nash (ep) tal que $P_{\sigma^*}(X)$ es positivo, entonces σ^*_X y $\sigma^*|X$ son equilibrios de Nash (ep) de Γ_X y $\Gamma\left|X_{\varphi_X(\sigma^*_X)}\right.$, respectivamente.*

Demostración. Sea Γ un juego que se descompone en X y σ^* un equilibrio de Nash (ep) tal que $P_{\sigma^*}(X) > 0$. Para un jugador j arbitrario, supongamos una estrategia $\overline{\sigma}^j \in \Sigma_j|X$. Ahora, consideremos $\sigma^j \in \Sigma_j$ tal que $\sigma^j_X = \sigma^{j*}_X$ y $\sigma^j\left|X = \overline{\sigma}^j\right.$.

Es claro, por el lema 3.5.1 y porque σ^* es un equilibrio de Nash (ep) de Γ que las siguientes relaciones son ciertas para j:

$$\varphi_j\left|X_{\varphi_X(\sigma^*_X)}\right.(\sigma^*|X) = \varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^*\left|\sigma^j\right.\right) =$$
$$\varphi_j\left|X_{\varphi_X(\sigma^*_X)}\right.\left(\sigma^*\left|\sigma^j\right.|X\right).$$

Pero, entonces, $\sigma^*|X$ es un equilibrio de Nash de $\Gamma\left|X_{\varphi_X(\sigma^*_X)}\right.$. Observemos que esto no depende del signo de $P_{\sigma^*}(X)$.

Supongamos que σ^*_X no es un equilibrio de Nash de Γ_X. Entonces, existe un jugador $\widehat{j}$ tal que, para alguna $\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}} \in \Sigma_{\widehat{j}X}$, $\varphi_{\widehat{j}X}(\sigma^*_X) < \varphi_{\widehat{j}X}\left(\sigma^*_X\left|\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}\right.\right)$.

Consideremos $\sigma^{\widehat{j}} \in \Sigma_{\widehat{j}}$ tal que $\sigma^{\widehat{j}}_X = \widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}$ y $\sigma^{\widehat{j}}|X = \sigma^{\widehat{j}*}|X$, es decir,

$$\varphi_{\widehat{j}}|X_{(\varphi_X(\sigma^*_X))}(\sigma^*|X) = \varphi_{\widehat{j}}\left|X_{(\varphi_X(\sigma^*_X))}\right.\left(\sigma^*|X\left|\sigma^{\widehat{j}}|X\right.\right).$$

Desarrollemos explícitamente el primer lado de la igualdad:

$$\varphi_{\widehat{j}}|X_{(\varphi_X(\sigma^*_X))}(\sigma^*|X) =$$
$$P_{\sigma^*|X}(X)\,\varphi_{\widehat{j}X}(\sigma^*_X) + \sum_{F\in T|X} P_{\sigma^*|X}(F)\,\pi_{\widehat{j}}(F) <$$
$$P_{\sigma^*|X}(X)\,\varphi_{jX}\left(\sigma^*_X\left|\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}\right.\right) + \sum_{F\in T|X} P_{\sigma^*|X}(F)\,\pi_{\widehat{j}}(F) =$$

$$P_{\left(\sigma^*|X\left|\widehat{\sigma^j}|X\right.\right)}(X)\,\varphi_{\widehat{j}X}\left(\sigma_X^*\left|\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}\right.\right)+\sum_{F\in T|X}P_{\left(\sigma^*|X\,|\widehat{\sigma^j}|X\,\right)}(F)\,\pi_{\widehat{j}}(F)=$$

$$\sum_{F\in TX}P_{\left(\sigma^*\left|\widehat{\sigma^j}\right.\right)}(F)\,\pi_{\widehat{j}}(F)+\sum_{F\in T|X}P_{\left(\sigma^*\left|\widehat{\sigma^j}\right.\right)}(F)\,\pi_{\widehat{j}}(F)=\varphi_{\widehat{j}}\left(\sigma^*\left|\widehat{\sigma^j}\right.\right).$$

Pero $\varphi_{\widehat{j}}\,|X_{\left(\varphi_X(\sigma_X^*)\right)}(\sigma^*\,|X\,)=\varphi_{\widehat{j}}\,(\sigma^*)$.

Es decir, existe $\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}\in\Sigma_j$ tal que $\varphi_{\widehat{j}}\,(\sigma^*)<\varphi_{\widehat{j}}\left(\sigma^*\left|\widetilde{\sigma}^{\widehat{j}}\right.\right)$. O lo que es lo mismo σ^* no es equilibrio de Nash de Γ, contrario a la hipótesis. Luego σ_X^* es equilibrio de Nash (ep) de Γ_X. ∎

Definición 3.5.4. Se dice que σ^* es un equilibrio perfecto en subjuegos de Γ, si σ_X^* es un equilibrio de Nash (ep) del subjuego Γ_X para todo vértice X en el que Γ se puede cortar.

La definición es válida tanto para juegos finitos como infinitos.

Podríamos decir que un equilibrio perfecto en subjuegos previene a los jugadores contra errores, tanto suyos como de los demás jugadores, y contra algunas perturbaciones del juego. Un criterio de selección de los equilibrios del juego nos aconsejaría preferir los equilibrios perfectos en subjuegos a los que no lo son. El equilibrio $((\textit{bluff}, \textit{no apostar}, \textit{apostar}), (\textit{no creer}))$, en el ejemplo del póker simplificado, es perfecto en subjuegos.

El análisis de inducción hacia atrás o algoritmo de Zermelo construye un perfil de estrategias en los que todos los jugadores se comportan bien en todos los subjuegos, independientemente de si la probabilidad de llegar a algunos de los subjuegos que determina dicho perfil sea cero. Con base en el teorema 3.5.2 podemos demostrar que dicho procedimiento construye equilibrios perfectos en subjuegos para los juegos finitos de información perfecta. Además, podremos generalizar el algoritmo para cualquier juego extensivo finito. Claro que, como era de esperar, el algoritmo aplicado en juegos de información no perfecta, fracasa frecuentemente, pues muchos juegos no tienen equilibrios de Nash (ep) o no los tienen algunos de sus subjuegos. Pero cuando tiene éxito construye equilibrios perfectos en subjuegos.

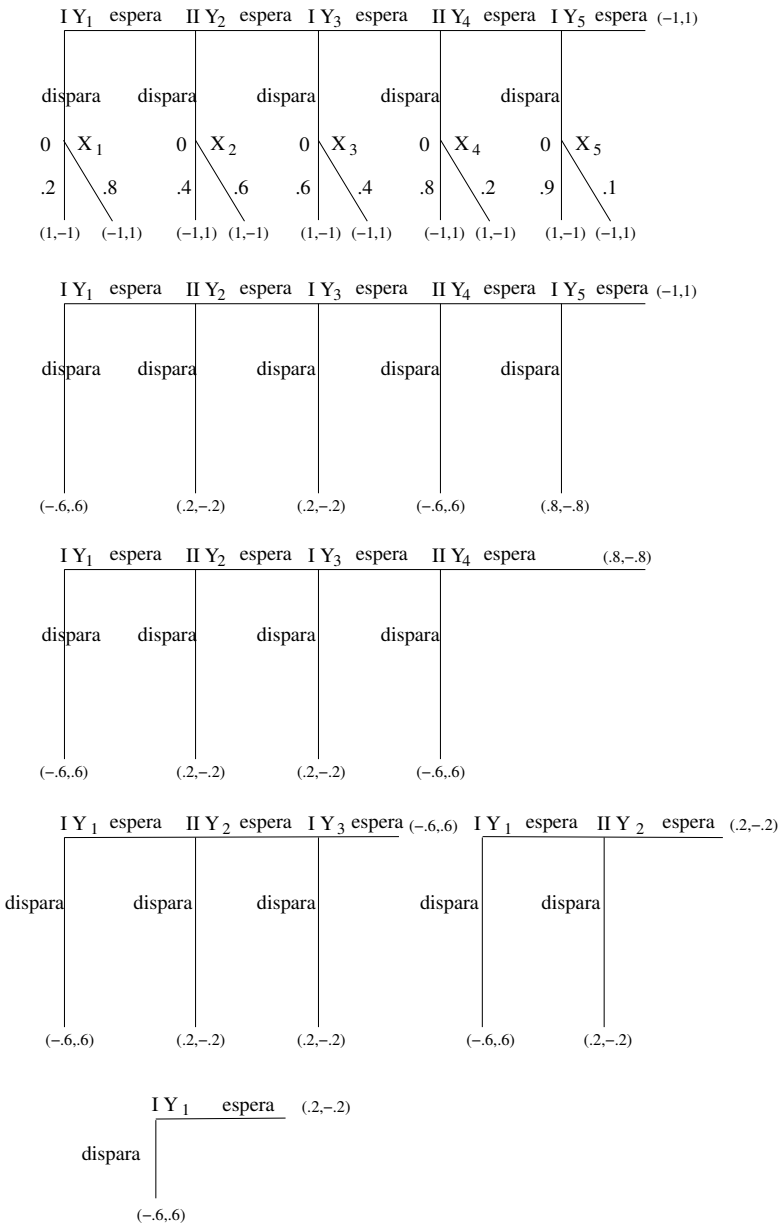
I Y1 espera II Y2 espera I Y3 espera II Y4 espera I Y5 espera (−1,1)
dispara dispara dispara dispara dispara
0 X1 0 X2 0 X3 0 X4 0 X5
.2 .8 .4 .6 .6 .4 .8 .2 .9 .1
(1,−1) (−1,1) (−1,1) (1,−1) (1,−1) (−1,1) (−1,1) (1,−1) (1,−1) (−1,1)
I Y1 espera II Y2 espera I Y3 espera II Y4 espera I Y5 espera (−1,1)
dispara dispara dispara dispara dispara
(−.6,.6) (.2,−.2) (.2,−.2) (−.6,.6) (.8,−.8)
I Y1 espera II Y2 espera I Y3 espera II Y4 espera (.8,−.8)
dispara dispara dispara dispara
(−.6,.6) (.2,−.2) (.2,−.2) (−.6,.6)
I Y1 espera II Y2 espera I Y3 espera (−.6,.6)
dispara dispara dispara
(−.6,.6) (.2,−.2) (.2,−.2)
I Y1 espera II Y2 espera (.2,−.2)
dispara dispara
(−.6,.6) (.2,−.2)
I Y1 espera (.2,−.2)
dispara
(−.6,.6)

Figura 3.5.4:

Algoritmo 2 (Generalización del algoritmo de Zermelo (Inducción hacia atrás)). *Sea Γ un juego extensivo finito, con árbol (V, A) y raíz U, $N \neq \theta$.*

Primer paso: Llamamos Γ^0 a Γ, V_0 a V, A_0 a A y T_0 a T.

Tenemos tres casos:

a) Γ^0 no se puede descomponer y su forma normal no tiene equilibrios de Nash (ep); entonces el algoritmo termina con un fracaso.

b) Γ^0 no se puede descomponer, su forma normal tiene equilibrios de Nash (ep), el algoritmo termina con σ^*, uno de los equilibrio de Nash (ep) de Γ.

c) Γ^0 se puede descomponer en al menos un vértice; buscamos un vértice X_1 tal que el subjuego $\Gamma^0_{X_1}$ no se pueda descomponer (siempre existe pues Γ es finito). Tenemos dos subcasos:

c_1) La forma normal de $\Gamma^0_{X_1}$ no tiene equilibrios de Nash (ep); el algoritmo termina con un fracaso.

c_2) La forma normal de $\Gamma^0_{X_1}$ tiene equilibrios de Nash (ep); se elige uno de ellos, llamémosle $\sigma^*_{X_1}$ y definamos Γ^1 como $\Gamma^0 \Big|_{X_1\left(\varphi_{X_1}\left(\sigma^*_{X_1}\right)\right)}$.

Hipótesis de Inducción: Consideremos que se han dado k pasos y se han construido los juegos $\Gamma^0, \Gamma^1, ..., \Gamma^{k-1}$, Γ^k(Γ^i con árbol (V_i, A_i) y raíz U), vértices X_1, X_2, ..., X_k y perfiles $\sigma^*_{X_1}$, $\sigma^*_{X_2}$, ..., $\sigma^*_{X_k}$ para los juegos $\Gamma^0_{X_1}, \Gamma^1_{X_2}, ..., \Gamma^{k-1}_{X_k}$ tales que:

a) Para $i = 0, 1, ..., k-1$, Γ^i se puede cortar en X_{i+1}.

b) Para $i = 1, 2, ..., k$, $\Gamma^i = \Gamma^{i-1} \Big|_{X_i\left(\varphi_{X_i}\left(\sigma^*_{X_i}\right)\right)}$ y

c) $\sigma^*_{X_i}$ es uno de los equilibrios de Nash (ep) del subjuego $\Gamma^{i-1}_{X_i}$.

Paso general: Tenemos dos casos:

a) Γ^k no se puede cortar, entonces tenemos dos subcasos:

a_1) Γ^k no tiene equilibrio de Nash (ep); entonces el algoritmo termina con un fracaso.

a_2) Γ^k tiene al menos un equilibrio de Nash. Elegimos uno de ellos y lo denotamos como σ^*_k.

Componemos $\sigma^*_{X_1}$, $\sigma^*_{X_2}$, ..., $\sigma^*_{X_k}$ y σ^*_k. El algoritmo termina con el perfil que resulta de esta composición.

b) Γ^k *se puede cortar en algún vértice. Consideramos* X_{k+1}*, uno de esos vértices, de tal manera que el subjuego* $\Gamma^k_{X_{k+1}}$ *no se pueda cortar.*

Hay dos subcasos

b_1*)* $\Gamma^k_{X_{k+1}}$ *no tiene equilibrio de Nash; el algoritmo termina con un fracaso.*

b_2*)* $\Gamma^k_{X_{k+1}}$ *tiene al menos un equilibrio de Nash. Elegimos uno y lo denotamos como* $\sigma^*_{X_{k+1}}$.

Definimos $\Gamma^{k+1} = \Gamma^k \Big|_{X_{k+1}\left(\varphi^*_{X_{k+1}}\left(\sigma^*_{X_{k+1}}\right)\right)}$

y aplicamos el paso general a Γ^{k+1}.

Teorema 3.5.5. *Si el algoritmo general de Zermelo aplicado a un juego extensivo finito* Γ *no fracasa, entonces en un número finito de pasos construye un equilibrio de Nash (ep) de* Γ *que es un equilibrio perfecto en subjuegos.*

La demostración de que se ha construido un equilibrio se puede hacer por inducción, aplicando repetidamente el teorema 3.5.2 que garantiza que la composición de equilibrios es un equilibrio. Como la restricción del perfil construido a cualquier subjuego es uno de los equilibrios encontrados, o la composición de algunos de ellos, será equilibrio de dicho subjuego. Es decir, en caso de éxito el algoritmo construye un equilibrio perfecto en subjuegos.

Teorema 3.5.6. *Todo juego de información perfecta tiene un equilibrio perfecto en subjuegos.*

Demostración. En los juegos de información perfecta el algoritmo de inducción hacia atrás siempre tiene éxito. ∎

Construyamos todos los equilibrios perfectos en subjuegos del juego de los duelistas (ejemplo 2.2.4) cuando estos están separados 5 pasos (Figura 3.5.3).

Aplicamos el algoritmo de Zermelo empezando por los vértices de azar y obtenemos el juego $\Gamma' = \Gamma \left|X_{1((-.6,.6))}\right. \left|X_{2(.2,-.2)}\right. \left|X_{3(.2,-.2)}\right. \left|X_{4(-.6,.6)}\right.$

Sólo hay un vértice X_5 en el que se puede cortar el juego Γ'. Al analizar ese único subjuego que ya no se puede cortar, es claro que I elegirá *disparar* que es el único equilibrio del subjuego Γ'_{X_5} y pasamos al juego podado $\Gamma' \left|Y_{(.8,-.8)}\right.$

Continuamos el algoritmo y los dos jugadores se van alternando para tomar decisiones. Así II elegirá *disparar* cuando están separados dos pasos,

I decidirá *disparar* cuando la distancia es de tres pasos, cuando los separan cuatro pasos a II le es indiferente escoger *disparar* o *esperar*. En ese momento, II puede escoger cualquiera de los dos, para continuar el análisis escogemos uno de ellos, por ejemplo *disparar* y llegamos a un juego podado que consta sólo del vértice inicial y las dos alternativas de éste que son vértices finales, entonces, I escoge *esperar* y termina el algoritmo con $((esperar, disparar, disparar), (disparar, disparar))$, que es un equilibrio de subjuego perfecto. El otro equilibrio de subjuego perfecto se obtiene cuando para el primer conjunto de información de II se elige *esperar*. Es decir, se trata de $((esperar, disparar, disparar), (esperar, disparar))$.

3.6. Inducción hacia atrás en el caso infinito

Juegos infinitos, sin partidas infinitas

Pensemos, ahora, en los juegos extensivos de información perfecta infinitos. En ellos, habrá problemas para aplicar el algoritmo de Zermelo. En primer lugar, es claro que podríamos encontrar juegos infinitos, sin partidas infinitas, tales que, en algún paso del algoritmo, la función de pago del jugador que tiene que tomar decisiones no tenga máximo y, entonces, habría que buscar otro método distinto de la inducción desde atrás para encontrar una "buena estrategia", si es que el juego la tiene, porque quizá no la tenga.

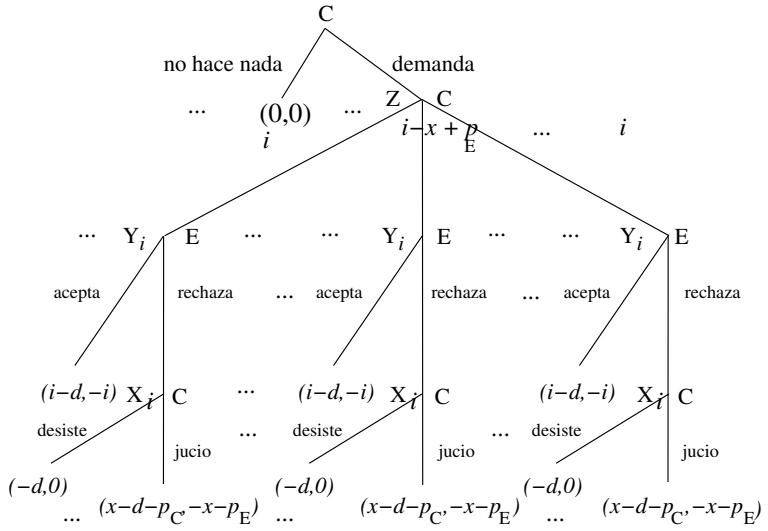

Figura 3.6.1:

Sin embargo, para algunos juegos infinitos, sin partidas infinitas, es posible aplicar el algoritmo. Veamos el ejemplo 2.2.11 de las demandas triviales.

En este juego, con solo demandar, el campesino C tiene que pagar d. Además, la cantidad que puede obtener C, si realiza juicio, es x y p_C es el pago que tendría que pagar al abogado encargado de representarlo en el juicio. Suponemos que $x > p_C$. Por otro lado, p_E es el pago al abogado de E.

En la figura 3.6.2, se repite el modelo extensivo del ejemplo 2.2.11, señalando los vértices en los que el juego se puede cortar, a saber, $Z, \{X_i\}, \{Y_i\}$. El algoritmo de Zermelo se puede aplicar, sin problemas, en los vértices X_i y, después, en los Y_i.

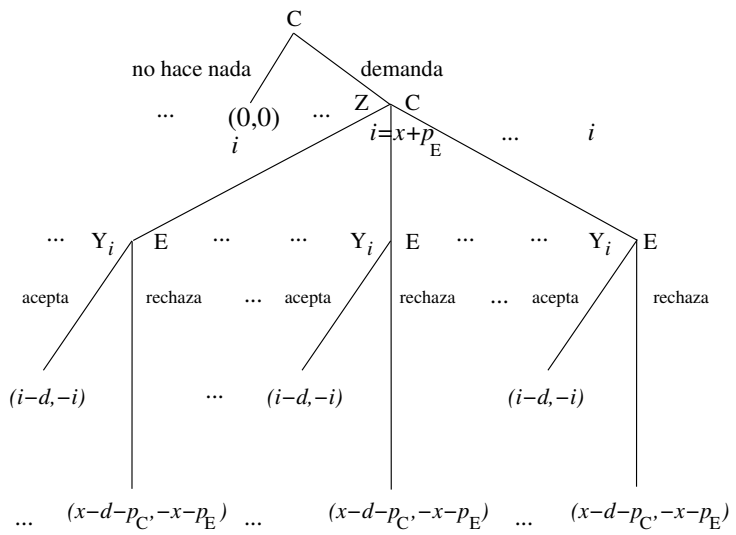

Figura 3.6.2:

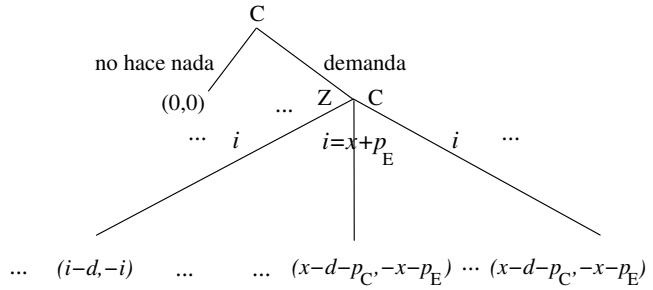

Figura 3.6.3:

Si el juego llega a uno de los vértices X_i, C debe tomar una decisión sobre ir o no a juicio. En todos ellos, le conviene ir a juicio y, entonces, ganaría $-d + x - p_C$, mientras que E ganaría $-x - p_E$. Después de cortar en todos los vértices X_i, tendríamos el juego podado en todos esos vértices y con el pago $(-d + x - p_C, -x - p_E)$ en cada uno de ellos, cuando se han convertido en vértices finales (figura 3.6.3). Ahora analizamos los vértices Y_i en dicho juego podado. Quien decide en estos vértices es E y depende de la indemnización i que se le ha exigido, si le conviene aceptar o rechazar la proposición de pagarla. Si resulta que $i < x + p_E$, E aceptará pagar, mientras que si $i > x + p_E$, E rechazará hacerlo. La decisión, en el caso $i = x + p_E$, es arbitraria, podemos inclinarnos por el rechazo o por la aceptación, no tenemos argumentos contundentes para decidirlo. Podríamos alegar un principio de inercia, es decir, E trataría de evitar el juicio, pues lo conduciría a pagar lo mismo, con o sin juicio. Pero, además, si suponemos que E rechaza surgirán nuevos problemas, como veremos más adelante. Por lo pronto, continuemos con el análisis, bajo el supuesto de que E acepta pagar $x + p_E$ como indemnización.

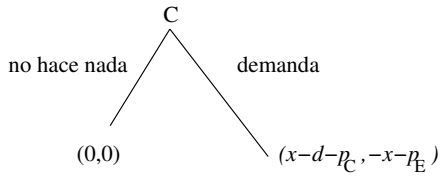

Figura 3.6.4:

Al cortar el juego en los vértices Y_i y considerar a estos como vértices finales, se les asociarán diversos vectores de pago, dependiendo de la relación entre i y $x + p_E$. En el caso de que $i \leq x + p_E$, $(i - d, -i)$ será el vector de pago; en el caso de que i sea mayor, será $(-d + x - p_C, -x - p_E)$.

Se puede, entonces, analizar el juego que se corta en Z. En éste le toca decidir a C que tiene, en ese momento, infinitas alternativas para elegir i. Sin embargo, existe una sola i, en donde se maximiza el pago de C y ésta es $i = x + p_E$. Por fin, nos restaría un juego que ya no se puede cortar más, en el que sólo participa el jugador C. Si $x + p_E > d$, C demandará a la empresa; por el contrario, si $x + p_E < d$, C se quedará cruzado de brazos. Otra vez, en caso de igualdad, podemos elegir cualquiera de las dos cosas.

En la figuras 3.6.1–3.6.4, se ilustran los diversos juegos podados que se van obteniendo, en el proceso de la inducción hacia atrás.

Pensemos en el caso donde la empresa E decidiese rechazar el pago de una indemnización $x + p_E$. Entonces no existiría una indemnización óptima,

entre las que acepta E y cualquier indemnización mayor o igual que $x+p_E$, es decir cualquiera que rechazase E, sería una elección buena para el campesino, pues tendrían que llegar a juicio, y conseguiría $x + p_E - d$, mientras que E ganaría $-x - p_E$.

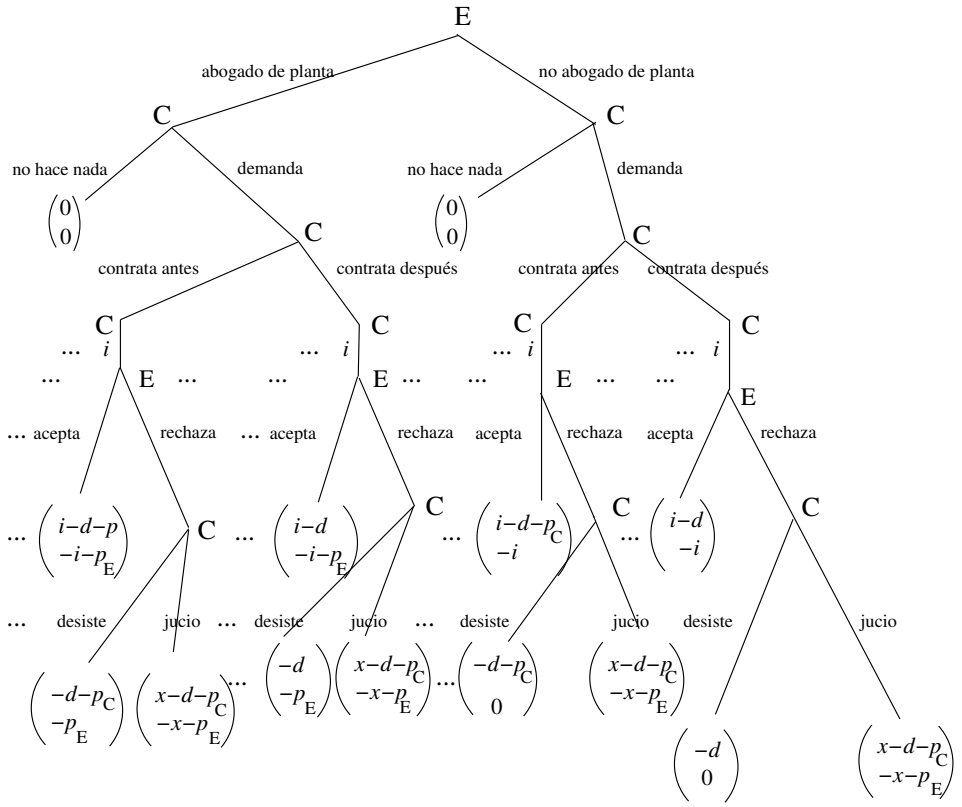

Figura 3.6.5:

Si hubiéramos partido del supuesto de que $x < p_C$, el campesino desistirá del juicio, E rechazaría cualquier indemnización positiva y el campesino se quedaría cruzado de brazos, pues cualquier gasto en demandar sería dinero tirado a la calle.

Podemos, todavía, sacarle más jugo al problema de las llamadas demandas triviales ($x > p_C$) y preguntarnos, ¿por qué es común, en este tipo de conflictos, en los que la mejor manera de comportarse es no llegar a tribunales, encontrarse que tanto la parte demandante, como la demandada, contratan abogados, antes de saber si llegarán o no a juicio? Frecuentemente ese tipo de personal no realiza ninguna labor y, sin embargo, recibe

un pago por sus "servicios". ¿Cómo altera el problema, la disyuntiva de contratar, previamente, a un abogado? Analicemos, primero, el problema para el campesino, considerando que si decide demandar, se planteará si es conveniente contratar un abogado de antemano o es mejor esperar hasta que sea claro que se llegará a los tribunales. La figura 3.6.5 representa al modelo extensivo con dicha modificación.

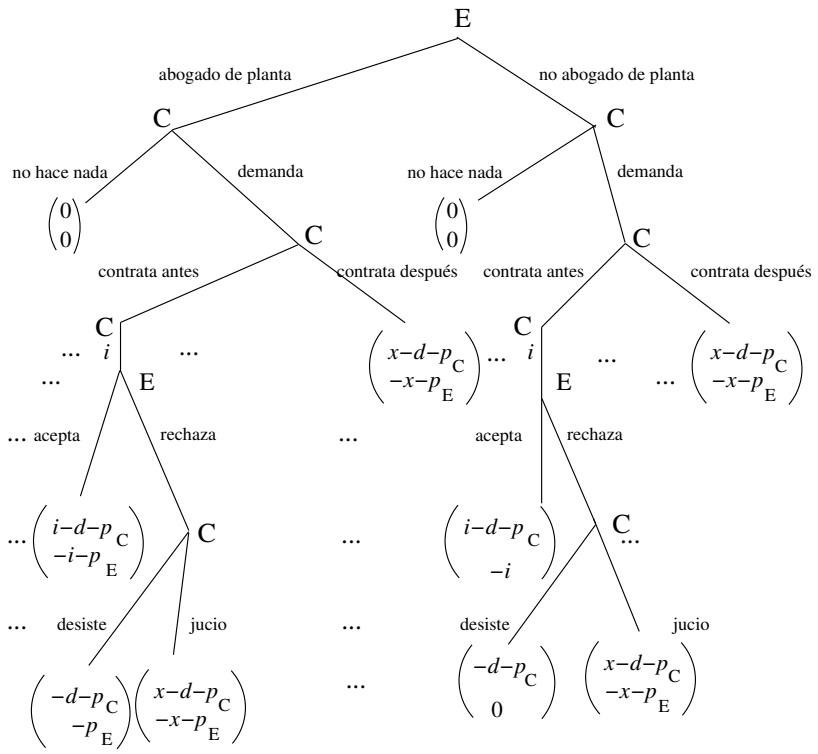

Figura 3.6.6:

Partamos de la rama en que el campesino decide no contratar a ningún abogado hasta no estar seguro de que lo necesitará para el juicio. Tenemos exactamente el juego que examinamos anteriormente, por lo que se llega al juego podado de la figura 3.6.6. Llevando a cabo el análisis de la rama que se forma cuando el campesino contrata de antemano a su abogado, tenemos que no importando si lo que espera ganar es menor, mayor o igual que el pago a su abogado, el campesino irá a juicio, en caso de que haya presentado una demanda, exigido una indemnización y E no haya aceptado su propuesta. La empresa aceptará pagar la indemnización si, y sólo si, la exigencia de C es menor o igual que $x + p_E$. Del algoritmo de Zermelo se desprende que: El

campesino contrataría posteriormente al juicio en caso de que $p_E < p_c - x$. Si, por el contrario, $p_E > p_c - x$, contrataría al abogado inmediatamente después de demandar. Por ultimo, el campesino demandaría sólo en caso de que $x + p_E > d + p_C$, de otra forma se quedaría quieto.

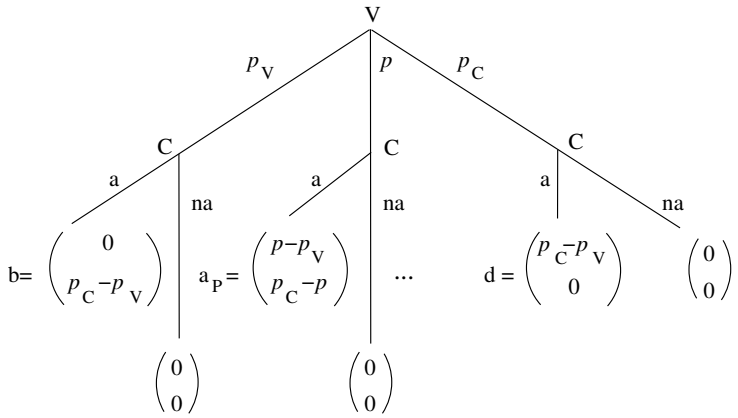

Figura 3.6.7:

Nos preguntamos si la empresa contratará o no a un abogado permanente para todas las posibles demandas que se le vengan encima, figura 3.6.7. Dejamos la respuesta como ejercicio.

El algoritmo de Zermelo pudo construir una estrategia para cada jugador en estos ejemplos de juegos infinitos. El perfil construido por el algoritmo es un equilibrio perfecto en subjuegos ya que al restringirlo a cada subjuego se obtiene un equilibrio de dicho subjuego.

Juegos infinitos, con partidas infinitas.

Otro juego infinito de información perfecta que aparece en la sección 2.2 es el de negociación (ejemplo 2.2.12). Sin embargo, en este caso, nos encontramos con partidas infinitas.

¿Qué ocurre en los juegos de información perfecta que tienen partidas infinitas? En principio, no se puede aplicar el algoritmo de inducción hacia atrás. Sin embargo, en algunas ocasiones, es posible considerar juegos finitos cada vez más "grandes" y más parecidos al juego infinito que se pretende analizar. Entonces, se pueden encontrar las soluciones para cada uno de estos juegos finitos, con el algoritmo de Zermelo, y estudiar si tiene sentido hablar de un límite de dichas soluciones. Este límite es un prospecto de solución del juego de negociación con horizonte infinito.

Estudiemos el conflicto de compraventa de una casa, un juego de negociación semejante al del ejemplo 2.2.12.

El juego de negociación de un solo periodo se puede llamar el juego estado ya que se repetirá, periodo tras periodo, aunque con algunas modificaciones en cada ocasión.

El juego estado.

El juego estado consiste en que el vendedor (V) hace una propuesta al comprador (C) de que pague un precio de p millones por la casa, de tal manera que $p_V \leq p \leq p_C$. El precio mínimo al que vendería V es de p_V millones de pesos y el máximo precio que estaría dispuesto a pagar C es de p_C millones. El precio p que propone V implica una forma de repartirse el excedente de $p_C - p_V$ pesos. C puede aceptar o rechazar la oferta p. Si la acepta el juego termina con los pagos $p_C - p$ y $p - p_V$ para C y V, respectivamente; si no la acepta el juego termina, sin acuerdo, es decir, con el vector de pago de desacuerdo d que suponemos que es $(0, 0)$. Tendríamos una negociación de lo toma o lo deja, que es como funciona normalmente una tienda establecida. La forma extensiva del juego estado se puede observar en la figura 3.6.7.

En el juego de un solo periodo, V juega una sola vez, sus estrategias son de la forma (p). Por otro lado, una estrategia de C, quién también juega una sola vez, le debe permitir responder a si aceptaría o no cada posible precio.

Una estrategia posible $\widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}$ para el comprador consiste en fijar un precio de reserva $\widehat{p}$, tal que $\widehat{p} \in [p_V, p_C]$ y

$$\widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}(p) = \begin{cases} \textit{acepta} & \text{si } p \leq \widehat{p}\,, \\ \textit{no acepta} & \text{si } p > \widehat{p}\,. \end{cases}$$

Si C elige una estrategia $\widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}$ con un precio de reserva $\widehat{p}$ y el vendedor elige un precio p, las ganancias de comprador y vendedor son como siguen

$$\varphi_E\left(p, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}\right) = \begin{cases} p - p_V & \text{si } p \leq \widehat{p}\,, \\ 0 & \text{si } p > \widehat{p}\,, \end{cases}$$

$$\varphi_C\left(p, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}\right) = \begin{cases} p_C - p & \text{si } p \leq \widehat{p}\,, \\ 0 & \text{si } p > \widehat{p}\,. \end{cases}$$

Los perfiles del conjunto $\left\{\left(\widehat{p}, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^{C}\right)\right\}$ son equilibrios de Nash, ya que para toda $p \in [p_V, p_C]$,

$$\varphi_E\left(p, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^C\right) = \begin{cases} p - p_V < \widehat{p} - p_V & \text{si } p < \widehat{p}\,, \\ 0 \leq \widehat{p} - p_V & \text{si } p > \widehat{p}\,, \\ \widehat{p} - p_V & \text{si } p = \widehat{p} \end{cases}$$

y

$$\varphi_C\left(\widehat{p}, \sigma_p^C\right) = \begin{cases} p_C - \widehat{p} & \text{si } \widehat{p} \leq p\,, \\ 0 \leq p_C - \widehat{p} & \widehat{p} > p\,. \end{cases}$$

Consideremos el equilibrio $\left(\widehat{p}, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^C\right)$, con $\widehat{p} < p_C$. En este equilibrio, C no compraría si V le exige $\acute{p}$ tal que $\widehat{p} < \acute{p} < p_C$, pero es intuitivamente claro que C no está jugando bien el subjuego correspondiente a la oferta $\acute{p}$. Es decir, $\left(\widehat{p}, \widehat{\sigma}_{\widehat{p}}^C\right)$, con $\widehat{p} < p_C$, no es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Al hacer el análisis hacia atrás, se obtiene que aceptar cualquier precio p menor que p_C es un equilibrio en el subjuego en el que C debe decidir si acepta o no dicho precio (denotémoslo como Γ_p). Si $p = p_C$, aceptarlo y no aceptarlo son, ambos, equilibrios del subjuego Γ_{p_C}. Supongamos que en el subjuego correspondiente a $p = p_C$, C elige comprar y seguimos el proceso de Zermelo, construyendo el juego podado, en donde V debe elegir el precio. El único equilibrio de este juego podado consiste en que V elija p_C que es donde se maximiza $p_V - p$. En cambio, si en Γ_{p_C}, C elige no aceptarlo, el juego podado no tiene equilibrio.

Pensemos, ahora, en un juego finito "parecido" al juego original, pero las estrategias de V consisten en hacer una oferta escogida de un conjunto finito de precios posibles, por ejemplo de p_V millones a p_C aumentando de cien mil en cien mil pesos. En este juego, tenemos dos equilibrios perfectos en subjuegos, en uno C acepta cualquier oferta y V pide el precio de p_C millones. En este equilibrio V gana $p_C - p_V$ y C gana cero. En el segundo C acepta todas las ofertas menores que p_C millones y rechaza sólo la de p_C millones y V pide $p_C - 100,000$. Entonces V gana $900,000$ y C gana $100,000$. Si las opciones de V son precios que van de p_V millones a p_C, aumentando de 10000 en 10000 pesos. Los dos equilibrios son los análogos y en el primero los pagos son los mismos y, en el segundo, V elige $p_C - 10,000$ y gana $990,000$ y C gana diez mil. Si el conjunto de precios a elegir por V es $\{p_V, p_V + 1000, p_V + 2000, ..., p_C - 1000, p_C\}$, en el segundo equilibrio, V elige $p_C - 1000$ y gana $999,000$ y C gana 1000, etc. A medida de que las opciones son más y más cercanas, tendiendo a infinito el número de opciones, el precio del segundo equilibrio converge a p_C, la ganancia de V a $p_C - p_V$ y la de C a 0. Con una definición de que un "buen equilibrio" del juego infinito debe ser límite de equilibrios de juegos finitos que "tienden" al juego infinito. El único equilibrio perfecto en subjuegos del juego infinito, en el sentido de los precios que puede pedir V, que es aquel en el que V elige el precio de p_C

millones y C compra a cualquier precio en $[p_V, p_C]$, es límite de equilibrios de los juegos finitos. Dicho equilibrio, por cierto, es el único que es límite de ese tipo de equilibrios.

3.6.1. Un principio de equilibrio.

En el equilibrio del juego infinito de un solo periodo, se está cumpliendo el siguiente principio: "V ofrece un precio para el que C es indiferente entre aceptar o rechazar y C acepta si y sólo si el precio es menor o igual que el que le exige V". Este principio es válido en muchas situaciones de negociación.

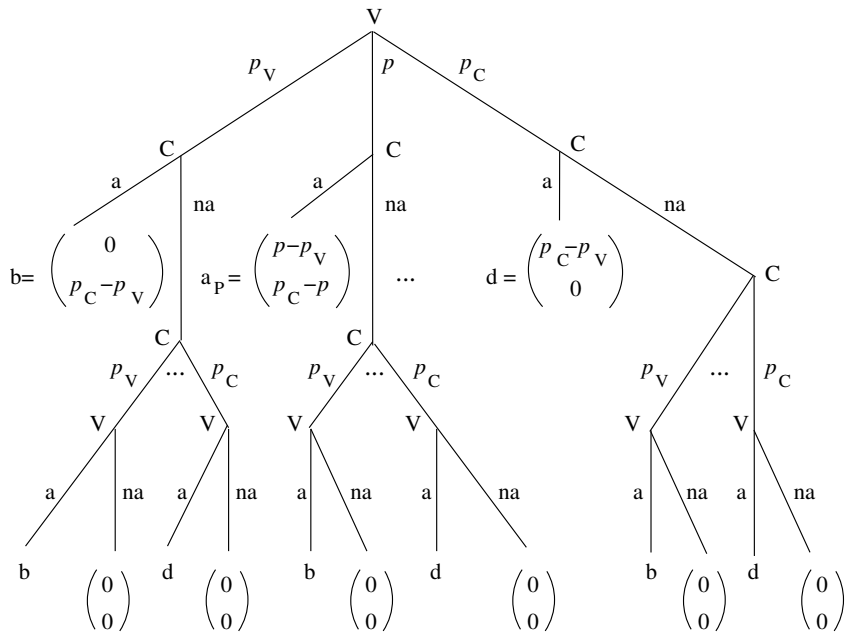

Figura 3.6.8:

No siempre una negociación tendrá la forma de la gran tienda establecida, también puede tomar la forma usual que se establece en los mercados, en el sentido familiar del término, entre los "marchantes" (comprador y vendedor). Las cosas, entonces, no funcionan con un "lo toma o lo deja", sino que se llenan de regateo, un hacer ofertas y contraofertas.

Un regateo de dos etapas. Pensemos en una negociación que dura más de un periodo. Empecemos el análisis con dos periodos. Es decir, si el comprador no está de acuerdo con el precio que le pide el vendedor puede hacer una contraoferta y, en ese caso, el vendedor debe decidir si acepta o no dicha

contraoferta.

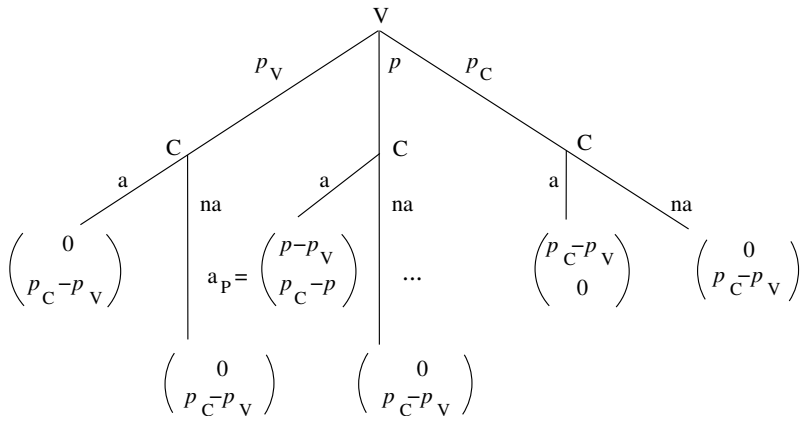

Figura 3.6.9:

Supongamos, de momento, que para los jugadores es lo mismo llegar a un acuerdo en un periodo que en el siguiente. Examinemos el juego extensivo de dos periodos de la figura 3.6.8 y consideremos los vértices que empiezan en alguno de los vértices, en los que V tiene que decidir si acepta o no el precio p que C ha ofrecido. En cada uno de ellos, la mejor decisión del vendedor V es aceptar todos los precios mayores o iguales que p_V (justificando la aceptación de p_V, en la forma anterior).

Podemos, entonces, considerar el juego podado, en donde todos los vértices en que antes decidía V sobre la contraoferta se han vuelto finales con vector de pago $\begin{pmatrix} p - p_V \\ p_C - p \end{pmatrix}$. El pago de C se maximiza al elegir p_V. En la figura 3.6.6 se observa el juego de dos periodos, después de podarlo al terminar el primer periodo.

Si analizamos dicho juego podado, empezaríamos en los vértices en los que C tiene que decidir si acepta o no el primer precio p pedido por V. Si $p = p_V$, C acepta en dicho primer periodo, si $p > p_V$, C lo rechaza. Lo que sabemos, por el análisis del segundo periodo que conduce a que C hace la contraoferta de comprar al precio igual a p_V y a que V lo aceptará. En el juego podado en que V debe decidir que precio pedir al inicio. Sus alternativas son vértices finales todas con el vector de pago $\begin{pmatrix} 0 \\ p_C - p_V \end{pmatrix}$. Entonces, ahora es C el que obtiene todo el excedente.

En forma análoga, se puede establecer para un número finito m de periodos, el negociador que se lleva todo es el último en hacer la oferta. Es decir,

si m es par el excedente se lo lleva el comprador, si m es impar corresponde al vendedor.

Volvamos, de nuevo, a la situación de dos periodos, pero ahora supongamos que no estamos ante un comprador y su marchante, en donde las ofertas y contraofertas transcurren tan rápidamente que el tiempo no importa. Pensemos que hay un lapso de tiempo considerable entre dos periodos consecutivos. Entonces, habrá que cambiar los pagos recibidos por cada negociador, pues no será lo mismo conseguir el objeto (o el dinero) en el primer periodo que en el segundo. Para modelar este hecho, multiplicamos por factores de descuento δ_V y δ_C a los pagos del segundo periodo de V y C, respectivamente. δ_i es una "medida de paciencia", cuanto más paciente es i, más cercano a 1 será su factor de descuento. Supondremos que $\delta_C = e^{-\rho_C}$ y $\delta_V = e^{-\rho_V}$.

Cuando no hay descuento de un periodo a otro y estamos en el primer periodo, a C le conviene aceptar la oferta de p_V en dicho periodo y rechazar cualquier otro y a V le da lo mismo ofrecer cualquier precio. Las cosas cambian cuando hay un factor de descuento. Para encontrar un equilibrio de subjuego perfecto, empecemos por los vértices en los que V tiene que decidir si acepta o no la contraoferta de C. Se llega a que V aceptaría siempre.

Entonces, en todos los vértices en los que C debe elegir un precio de contraoferta, escogería p_V. Supongamos que V ha elegido, en el primer periodo, la oferta de $p = x$. Para saber si a C le conviene aceptar la compra al precio x, en el primer periodo, o si es preferible que rechace y haga la contraoferta de p_V, aunque se tenga que esperar hasta el segundo periodo para obtener el objeto, hay que comparar las ganancias de $p_C - x$, pago de aceptación en el primer periodo, con $\delta_C (p_C - p_V)$ pago para C, si rechaza x en el primer periodo y hace la contraoferta de p_V en el segundo periodo. Resulta que si x es menor o igual que $\delta_C p_V + (1 - \delta_C) p_C$, C acepta el precio x en el primer periodo y si es mayor hará la contraoferta de p_V. Entonces, a V le conviene pedir en el primer periodo un precio igual a $\delta_C p_V + (1 - \delta_C) p_C$ y C lo tendrá que aceptar. La ganancia de V sería igual a $\delta_C p_V + (1 - \delta_C) p_C - p_V = (1 - \delta_C)(p_C - p_V)$ y la de C igual a $p_C - \delta_C p_V - (1 - \delta_C) p_C = \delta_C (p_C - p_V)$. Es claro que, para esta negociación de dos periodos, a C le convendría ser lo más indiferente posible al periodo en que compra y así se llevaría casi todo el excedente, en cambio a V le conviene que C sea muy impaciente, pero no suponemos que el "grado de impaciencia" sea una elección al alcance de un jugador, sino parte de su personalidad, su posición en el regateo, etc.

Podemos observar que, en este caso, el de dos periodos, no interesa si V

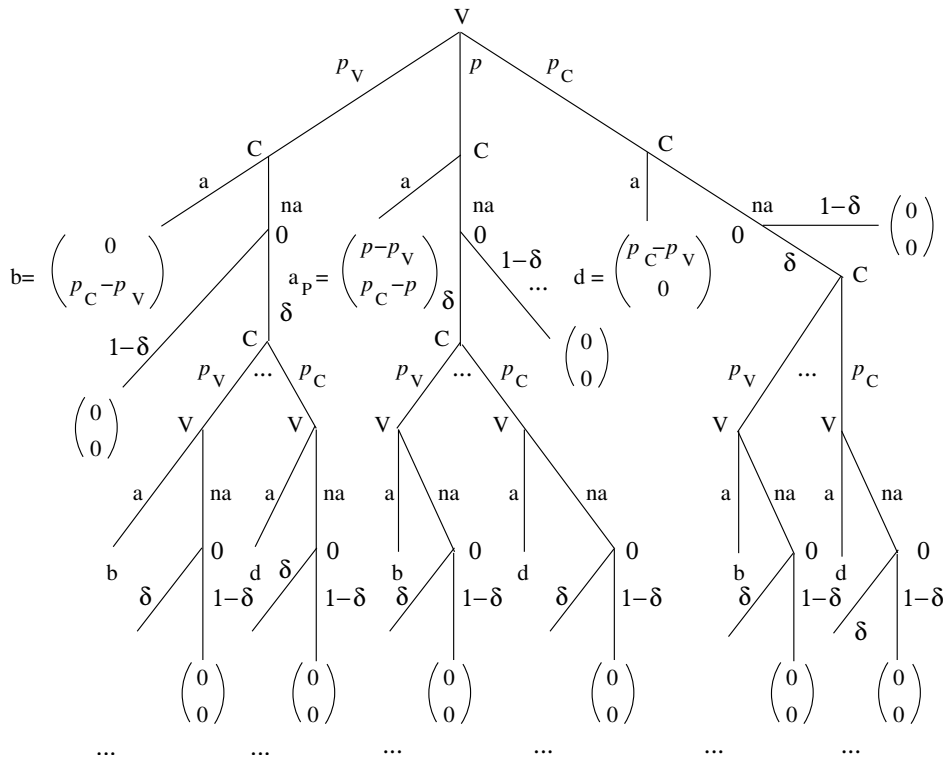

Figura 3.6.10:

es paciente o no lo es y que V se está ajustando al principio de equilibrio que discutimos anteriormente, pues elige el precio de tal manera que a C le resulte indiferente aceptar el precio $\delta_C p_V + (1 - \delta_C)\, p_C$ en el primer periodo o si espera hasta el segundo para lograr que V acepte la contraoferta de p_V.

3.6.2. El juego con horizonte infinito.

¿Qué sentido tiene considerar un número infinito de periodos?, el lapso entre dos periodos es de un tamaño fijo y si Keynes decía que en el largo plazo estaríamos todos muertos, con mayor razón lo estaríamos en un tiempo infinito.

La idea involucrada es distinta, en realidad nadie piensa que tenga sentido que el tiempo transcurrido es de infinitos años. El horizonte infinito nos permite modelar el hecho de que cada uno de los que participan en una negociación, cuando tiene que tomar decisiones, no ve el fin de ésta, siempre es posible dejar para mañana lo que se puede hacer hoy. Desde la

perspectiva del comprador y del vendedor, seguirá un siguiente periodo si no se llegó a un acuerdo en éste, no pueden percatarse en que momento terminará, aunque sepan que no puede continuar por siempre. En torno a esto, es frecuente introducir un factor de probabilidad de paro, distinto que el factor de descuento, entonces cada negociante percibiría que es posible que el regateo prosiga, sin saber hasta cuando, pero también es posible que el periodo que está corriendo sea el último. Cuando se trabaja con un factor de probabilidad de paro, el permanecer eternamente en regateo tiene probabilidad cero. En la figura 3.6.7 se esquematiza el juego con probabilidad de paro $1 - \delta$.

Consideremos una negociación con horizonte infinito, sin factor de probabilidad de paro. El vendedor y el comprador negocian periodo tras periodo, siguiendo el esquema siguiente: en los periodos impares, el vendedor hace una oferta, en caso de no estar de acuerdo, el comprador empieza otro periodo haciendo una contraoferta y siendo V el que debe decidir si la acepta o no. Si V no acepta la oferta, empieza otro periodo con una nueva oferta de V, pudiendo continuar, este alternarse de ofertas, hasta infinito. El juego extensivo es infinito en ambos sentidos, pues las alternativas en algunos vértices son infinitas y también existen partidas infinitas.

Si llegara a pasar que, en cada periodo, ninguno de los dos aceptara la propuesta del otro, tendríamos una partida infinita en la que el pago que recibirían ambos jugadores es 0.

Si suponemos que los dos negociantes tienen aversión al riesgo, entonces sus funciones de utilidad respecto al excedente que reciben no sería la función identidad, sino funciones estrictamente cóncavas. Además, como en el modelo con un número finito de periodos, el tiempo importa, entonces comprar o vender al precio p, en el periodo t (o, lo que es lo mismo, apoderarse de la parte del excedente, determinada por dicho precio, en el periodo t) produce un pago de $\widehat{u}_i(x,t) = \delta_i^t u_i\,(p)$, $u_V\,(p_C) = u_C\,(p_V) = 1$.

Si los jugadores llegan a un acuerdo, en el primer periodo, se reparten un excedente de $p_C - p_V$. Pero, a medida que transcurre el tiempo, sin que lleguen a un acuerdo, el excedente va decreciendo, al multiplicarse por los factores de descuento.

Se dice que una estrategia de j es estacionaria cuando j elige lo mismo en una situación dada, no importando la historia transcurrida para llegar a dicha situación. Es decir, la estrategia de j, las propuestas que hace y las que acepta o rechaza, es independiente de las ofertas y contraofertas que se han dado a lo largo de los periodos anteriores al actual. Por ejemplo, cuando el vendedor ha decidido aceptar la oferta p o cualquier precio mayor y el comprador el precio p' o cualquier precio menor, ambos han elegido

estrategias estacionarias. ¿Puede este tipo de estrategias formar un equilibrio de Nash?

Para dos precios p y p', definamos los vectores

$$\widehat{u}(p,0) = (\widehat{u_V}(p,0), \widehat{u_C}(p,0))$$

y

$$\widehat{u}(p,t) = (\widehat{u_V}(p,t), \widehat{u_C}(p,t)),$$

con $\widehat{u_C}(p,t) = \delta_C^t u_C(p)$ y $\widehat{u_V}(p,t) = \delta_V^t u_V(p)$.

El principio de equilibrio diría que el jugador que debe hacer una oferta debe buscarla de tal manera que deje al otro indiferente entre aceptar o esperar al próximo periodo para hacer una contraoferta que supone será aceptada. Si en el periodo t, el vendedor hace la oferta p y C la acepta, entonces C obtendrá $\widehat{u_C}(p,t) = \delta_C^t u_C(p)$. Si C la rechaza y propone p', lo mejor que le puede pasar es que V la acepte, en cuyo caso C ganaría

$$\widehat{u_C}(p', t+1) = \delta_C^{t+1} u_C(p').$$

La condición de equilibrio para C es

$$\delta_C^t u_C(p) = \delta_C^{t+1} u_C(p') \text{ para cada } t.$$

O lo que es lo mismo,

$$u_C(p) = \delta_C u_C(p').$$

Análogamente, la condición de equilibrio para que V decida elegir el precio p' en el periodo t, en lugar de lograr que le acepten p hasta el periodo $t+1$ es $\delta_V^{t+1} u_V(p) = \delta_V^t u_V(p')$, es decir,

$$u_V(p') = \delta_V u_V(p).$$

Tomemos ahora en cuenta la longitud de tiempo que hay entre dos periodos consecutivos y denotémosla como τ. Hasta aquí hemos actuado como si τ fuera 1; cambiemos esto. Entonces, en cada periodo, el descuento será de δ_i^τ para $i = V$, C. Estudiar lo que ocurre cuando τ tiende a cero es preocuparse por lo que ocurre cuando vendedor y comprador están interesados en negociar lo más frecuentemente posible. Si suponemos que δ_i^τ es de la forma $e^{-\tau\rho_C}$, las dos condiciones de equilibrio son:

$$u_C(p) = e^{-\tau\rho_C} u_C(p') \tag{3.6.2 a}$$

$$u_V(p') = e_V^{-\tau\rho_V} u_V(p) \tag{3.6.2 b}$$

Rubinstein (ver el libro de M. J. Osborne y A. Rubinstein [42], Bargaining and Markets) demostró que en el límite cuando el lapso de tiempo que transcurre entre dos negociaciones tiende a cero, la transacción se hace en el primer periodo y el precio es tal que el excedente se reparte de acuerdo al vector de pago siguiente:

$$(\frac{1-\delta_C}{1-\delta_C\delta_V}\,(p_C - p_V)\,, \left(1 - \frac{1-\delta_C}{1-\delta_C\delta_V}\right)(p_C - p_V)).$$

3.7. Ejercicios

Ejercicio 3.1. El Juego de los CERILLOS (ejercicios 2.1, 2.2 y 2.3) Considere el juego de los cerillos con n igual a cinco. Construya el modelo extensivo y la solución de Zermelo. ¿Podría decir, basado en ese tipo de análisis, para que valores de n gana el jugador que empieza?

Ejercicio 3.2. Analice el JUEGO DEL NIM (ejercicio 2.4), con el algoritmo de inducción hacia atrás (algoritmo de Zermelo) para ver quién gana. ¿Qué puede decir para números cualesquiera?

Ejercicio 3.3. Con un análisis de inducción hacia atrás (algoritmo de Zermelo) analice el juego DE VOTACIONES Y DE VETOS (ejercicio 2.5). Considere el juego con un equipo de dos estudiantes y tres candidatos. Determine una terna de estrategias que sea solución desde dicho análisis y descubra quien ingresó al equipo. Construya los términos suficientes de la forma normal para hacer ver que la solución encontrada es un equilibrio de Nash (ep) del juego. ¿Podría proponer una terna de estrategias que fuera también equilibrio de Nash, pero no solución de Zermelo? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3.4. Escoja un conflicto económico, político, social o de cualquier naturaleza, pero que haya alcanzado cierta fama y del que se pueda construir un modelo extensivo finito de información perfecta, con o sin azar. Construya la solución que aporta el análisis hacia atrás. ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador? Si el juego no es muy grande construya su forma normal, encuentre todos los equilibrios de Nash del conflicto e identifique el que corresponde a una solución de Zermelo. Si resulta demasiado grande, solo construya el renglón y la columna correspondiente a dicha solución de Zermelo. ¿Puede

proponer un equilibrio que no sea solución de Zermelo? (Quizá le sirva revisar el teorema 3.5.3).

Ejercicio 3.5. En el juego del duelo del ejemplo 2.2.4, para 7 pasos, asigne las probabilidades de matar al adversario, para cada distancia medida en pasos y calcule el número de estrategias de cada jugador, los equilibrios de Nash (ep) perfectos en subjuegos y uno que no lo sea.

Ejercicio 3.6. Para EL JUEGO DE GALE (ejercicio 2.8), responda las mismas preguntas que en el problema anterior y construya la forma normal del juego.

Ejercicio 3.7. EL JUEGO DEL CONTENTO En la figura 2.2.9, tenemos el modelo extensivo de dicho juego para el caso de que $n = 2$ y de que la baraja conste de cuatro cartas numeradas del 1 al 4. Examine intuitivamente las cosas para proponer un equilibrio. Para verificar que efectivamente lo es, utilice el algoritmo de inducción hacia atrás para el caso de información no perfecta.

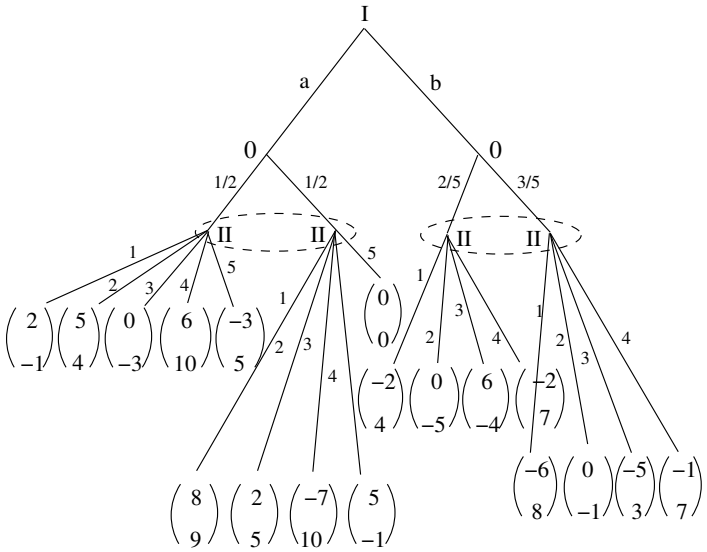

Figura 3.e.1:

Ejercicio 3.8. Considere el juego ¿DÓNDE QUEDÓ LA CABRITA? (ejercicio 2.11). ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador? Encuentre un equilibrio de Nash (ep). ¿Es único? ¿Es perfecto en subjuegos? ¿Cuántos equilibrios perfectos en subjuegos existen?

Ejercicio 3.9. Lleve a cabo el algoritmo de Zermelo generalizado para el juego del sindicato (ejercicio 2.12). ¿Termina con éxito o con fracaso? Si termina con éxito, ¿cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos construido?

Ejercicio 3.10. Encuentre un equilibrio de Nash (ep) perfecto en subjuegos, usando el algoritmo de Zermelo generalizado del juego de la figura 3.e.1. ¿Puede encontrar un equilibrio que no sea perfecto en subjuegos, sin necesidad de calcular la forma normal del juego completo? Quizá le sirva revisar el teorema 3.5.3.

Ejercicio 3.11. En el juego de la empresa contaminadora del ejercicio 2.9, ¿cuántas estrategias tiene cada jugador? Lleve a cabo el algoritmo de Zermelo generalizado. ¿Termina con éxito o con fracaso el algoritmo? Si termina con éxito ¿cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos construido?

Ejercicio 3.12. Con el algoritmo de Zermelo encuentre un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para el juego de las fichas de dominó en un tablero 2×3 (ejercicio 2.13). ¿Quién gana el juego?

Ejercicio 3.13. Realice el análisis de Zermelo del juego de negociación sin azar y con impaciencia, con horizonte finito para n par e impar ¿Influye la paridad de n en el resultado que se obtiene?

Ejercicio 3.14. JUEGOS DE NEGOCIACIÓN CON AZAR Consideremos la misma negociación del ejercicio 3.13, pero ahora, después del fin de cada periodo hay un mecanismo de azar que determina que con probabilidad α continúa el siguiente periodo y con probabilidad $1 - \alpha$ termina el juego sin acuerdo; los pagos son como se describen en el texto de la sección 3.6.

En los juegos de dos y de tres periodos, ¿cuál sería el resultado, en cada uno de ellos? Trate de generalizar la fórmula para n periodos. Que pasaría en el límite cuando n tiende a infinito. Observe que si consideramos que la negociación tiene infinitos periodos (horizonte infinito), no es posible hacer el análisis hacia atrás y hay que trabajar con el límite.

Ejercicio 3.15. DEMANDAS TRIVIALES 2 Considere que la compañía tiene un proceso productivo altamente contaminante y continuamente enfrenta problemas legales, con diversos afectados. Por ello, al principio del juego, tiene que decidir, si contrata a un abogado que pueda encargarse de los casos, o se ahorra el gasto, todo lo demás es igual. Los pagos que haga por adelantado no le serán devueltos vaya o no vaya a juicio. Haga el nuevo análisis.

Ahora, piense que no sólo la empresa, sino también el campesino considera, después de demandar, si sería conveniente contratar a un abogado,

independientemente de no estar seguro de que vaya a ir a juicio. Haga el nuevo análisis.

Ejercicio 3.16. DEMANDAS TRIVIALES 3 (información no perfecta). Considere el ejemplo 2.2.13 (figura 2.2.12) y complete con pagos plausibles. ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador? Lleve a cabo un análisis hacia atrás generalizado.

Ejercicio 3.17. El AUTOMOVILISTA Y LA ASEGURADORA Una persona (A) tiene un vehículo con el que trabaja y está considerando comprar un seguro contra accidentes. La compañía de seguros (CS) piensa en dos precios posibles por un año de seguro, uno de 500 y otro de 200. En los dos casos, el posible asegurado tiene que decidir, si acepta o rechaza la oferta. Si rechaza la oferta tendrá que ser cuidadoso con su vehículo, para tratar de evitar accidentes, en cambio, si acepta comprar el seguro, tendrá que decidir, entre ser cuidadoso o basarse en que está cubierto por el seguro y arriesgarse más, pudiendo con ello obtener más ingresos en su trabajo. La probabilidad de tener accidentes depende de sí es cuidadoso o no lo es. La figura 3.e.2 representa el modelo extensivo del conflicto. Haga un análisis hacia atrás para saber como actuarán los dos jugadores en cada uno de los vértices en que deben decidir y cuál es el resultado del conflicto.

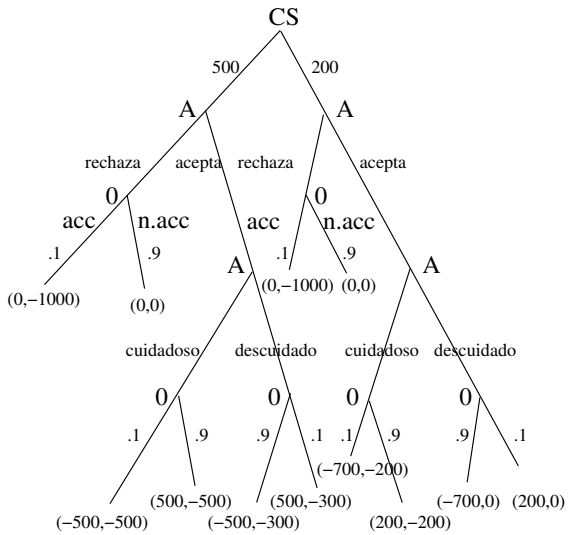

Figura 3.e.2:

Ejercicio 3.18 (Duopolio de Cournot 2). Suponga que una de las empresas (E_1) utiliza una tecnología conocida. Por esto, E_2 está informada de que el costo unitario de E_1 es c_1. En cambio, E_2 está utilizando una nueva tecnología y E_1 no sabe cuál es el costo unitario de E_2. Lo único que sabe la segunda empresa es que el 70 por ciento de las empresas que han cambiado de tecnología utiliza un procedimiento alemán que tiene un costo unitario de $\widehat{c}$ ($c_1 > \widehat{c}$) y las restantes utilizan un procedimiento japonés que tiene un costo de $\widetilde{c}$ ($c_1 < \widetilde{c}$). La función de pago de los jugadores es como en el ejemplo 1.6.3 del capítulo 1. ¿Cómo es el modelo extensivo? ¿Cómo es su forma normal si la empresa con tecnología conocida tiene tres posibles cantidades a producir y la otra, en cualquiera de sus variantes, dos? Basándose en el análisis del ejemplo 1.6.3. Proponga un perfil que sea un equilibrio de Nash para la versión del duopolio de Cournot, donde las empresas eligen cantidades en un intervalo $[0, a]$. Compruebe que el perfil propuesto es equilibrio y compare los equilibrios con el equilibrio de Cournot que surgió en el capítulo 1.

Ejercicio 3.19. Encuentre, donde se pueda, un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de los juegos propuestos por el libro en el capítulo 2.

Ejercicio 3.20. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta, con una demostración o un contraejemplo, según sea el caso.

a) Un juego de información perfecta finito siempre tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias puras.

b) En un juego extensivo finito, cada uno de los jugadores escoge una de sus estrategias, entonces queda determinada una partida única.

Ejercicio 3.21. Construya un ejemplo de un juego extensivo que no sea de información perfecta tal que el algoritmo de Zermelo tenga éxito y uno que no tenga éxito y tales que no hayan aparecido en el texto.

Capítulo 4

Sobre gustos y conocimiento

4.1. Justificación del Capítulo

En este capítulo, se esbozan, en las secciones 4.2 y 4.3, temas de la fundamentación axiomática de la teoría de juegos, específicamente el estudio de las preferencias de los jugadores y del conocimiento que tienen, tanto privado, como común. Estos temas precisan argumentos que en este libro están implícitos. La problemática de las relaciones de preferencias de los jugadores sobre los posibles resultados en un juego, incluyendo la idea de que los resultados pueden ser loterías se trata ampliamente en muchos textos. En cambio, la problemática de cómo precisar el conocimiento que tienen los jugadores sobre diversas situaciones, el conocimiento común a todos ellos y la problemática sobre las creencias que los jugadores pueden obtener de su conocimiento y de la falta de éste, son temas poco tratados. Las creencias se formulan en términos de conocimiento o de falta de él y tienen aspectos aún en desarrollo y, además, abren la problemática misma de la teoría de las preferencias que tienen, ahora, que definirse sobre "loterías subjetivas". El presente libro, como es fácil apreciar desde su inicio, no tiene la intención de desarrollar los temas muy formalmente. Nuestra intención al incluir ambos temas es simplemente dar algunas ideas que completen la visión sobre los modelos que se utilizan en los juegos no cooperativos, por lo que se introducen dichos temas, en forma muy breve.

Por otro lado, hemos desarrollado como secciones 4.4 y 4.5 un tipo de problemática con características muy diferentes, la vinculada a los llamados juegos de información incompleta que están lejos de estar formulados en forma precisa. Problemas de falta de información de los jugadores aparecieron en el concepto de información no perfecta del capítulo 2. Este concepto es

una propiedad de algunos juegos extensivos con la que se pueden modelar situaciones como son, por ejemplo, las que se presentan en el póker cuando un jugador tiene información sobre las cartas que tiene en la mano, pero no sobre las de los demás jugadores. La temática que abordan los llamados juegos de información incompleta, tanto cooperativos como no cooperativos, es radicalmente distinta. En ellos, ocurre que algunos de los participantes no conocen plenamente las reglas del conflicto en el cual están envueltos. Por ejemplo, algún jugador puede no conocer cuáles son los objetivos de otro. Se supone, en cambio, que todos los participantes en un juego de póker conocen las reglas del juego y cuando alguno se saca un As de la manga está introduciendo un conflicto distinto, éste sí de información incompleta. La investigación de esta problemática es relativamente reciente y los diversos textos existentes no concuerdan en cuál es la definición más apropiada de un juego de información incompleta. Más aún, ni siquiera concuerdan en si es necesario tener o no una definición, ya que algunos de los autores consideran que se trata de abordar problemas para los cuales se pueden adaptar los conceptos ya definidos en los primeros capítulos. A pesar de lo anterior, el desarrollo de la temática es sumamente interesante y ha sido abordada parcialmente, pero en forma muy amplia, en el estudio de diversos temas específicos, por ejemplo, en la teoría de subastas, en el tratamiento de diversos instrumentos financieros, en los llamados juegos de señalización y en los de selección adversa. Sin embargo, abordarla en una forma más o menos adecuada requeriría que el libro tuviera por lo menos dos largos capítulos dedicada a ella. Por lo que simplemente planteamos algunos ejemplos, para dar una idea de como se abordan estos temas.

¿Por qué introducir en este capítulo la problemática de los juegos de información incompleta? Desde nuestro punto de vista dicha problemática constituye una ilustración muy interesante de como los temas del conocimiento, las creencias y las preferencias, tanto sobre loterías objetivas como sobre loterías subjetivas, puede cambiar el enfoque del análisis que se realiza sobre los juegos y es particularmente útil para los llamados juegos de información incompleta.

4.2. Sobre gustos y utilidad

En los tres capítulos anteriores, hemos aceptado que los pagos para los jugadores se dan en números reales, con las propiedades usuales que estos tienen. Sin embargo, en los ejemplos que se han manejado o que se consideran de interés, los resultados que obtiene un jugador, después de que

se han determinado los diversos perfiles de estrategias, pueden ser, como comentábamos en la introducción, de una naturaleza muy variada, y no sería extraño que fuera muy difícil, para los jugadores, asignarle un número real a cada evento.

Repetimos, para ilustrar, en forma sencilla, el ejemplo de Morton Davis [13] que aparece en el ejercicio 1.1a del primer capítulo de este libro.

"En agosto de 1944, justamente después de la invasión de Europa, los aliados rompieron su cabeza de playa en Cherburgo y amenazaban al Noveno Ejército alemán. El comandante alemán tenía estas posibles elecciones: ataque o retirada. El comandante aliado tenía estas alternativas: reforzar la brecha, lanzar sus reservas hacia el este tan pronto como fuese posible, defenderse esperando veinticuatro horas para después decidir reforzar o empujar hacia el este". Supongamos que para cada pareja de estrategias se tienen los resultados cualitativos descritos en la tabla siguiente:

$$
\begin{array}{c}
\\
\textit{reforzar} \\
\\
\textit{reservas al este} \\
\\
\textit{esperar}
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \textit{ataque} & \textit{retirada} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\textit{probable rechazo del ataque} & \textit{débil presión} \\
\textit{alemanes pueden cerrar brecha} & \textit{disposición ideal contra alemanes} \\
\textit{brecha y rodeo de los alemanes} & \textit{atraso en llegada y poca presión contra alemanes}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

¿Qué pareja de números reales conviene asignarle a cada uno de los resultados, para que reflejen la situación de cada uno de los ejércitos que se enfrentan? Nosotros hemos procedido, hasta aquí, asignando números que nos suenan plausibles y hemos dejado implícitas las reglas con que se procede; estas no son arbitrarias. Para hablar en forma precisa, en muchos contextos, en especial en el de los juegos cooperativos, no es aceptable seguir en este camino.

¿Cómo procede la teoría de juegos frente al problema de que los jugadores no se encuentran ante pagos que sean números reales? Por un lado, se toman como base las concepciones de la Teoría de la Utilidad usual en

la Teoría Económica, en donde se considera que en el espacio de resultados posibles cada jugador tiene definida una relación de preferencia que le permite comparar siempre dos resultados posibles.

Es decir, no se supone que los aliados sean capaces de decir cuantas unidades de "satisfacción" les produce que, cuando ellos refuerzan la brecha, sus fuerzas probablemente rechacen el ataque de los alemanes, si estos les lanzan uno, ni cuántas otras reciben de que la brecha se mantenga, aunque ejerzan una débil presión sobre el enemigo, si éste decide retirarse, lo que sí se supone es que los aliados prefieren uno de los dos acontecimientos al otro, o que los dos les son indiferentes. Análogamente se procede respecto a los alemanes.

Si, por ejemplo, el jugador j prefiere el acontecimiento D al C o le son indiferentes, esto se escribe como $C \preceq^j D$, si la preferencia por D es estricta, es decir si se da la relación $C \preceq^j D$, pero no la recíproca, $D \preceq^j C$, escribimos $C \prec^j D$ y, por último, si C y D le son indiferentes, es decir sí la relación se establece en las dos direcciones, $C \preceq^j D$ y $D \preceq^j C$, escribimos $C \sim^j D$. Se supone siempre que dado un resultado C, $C \preceq^j C$ y, por lo tanto, $C \sim^j C$

Si una relación de preferencia le permite a j comparar siempre entre dos acontecimientos cualesquiera, se dice que esta relación es total. A las relaciones de preferencia de los jugadores se les suele pedir que además de totales y reflexivas, sean por lo menos transitivas, es decir, que si $C \preceq^j D$ y $D \preceq^j F$, entonces se cumpla que $C \preceq^j F$. Cuando todos los jugadores tienen relaciones de preferencia con esas propiedades, se dice que los jugadores son racionales.

Aunque hemos dicho que los jugadores, o los consumidores, no tienen en su cabeza un medidor de satisfacción, todo el que ha abierto un libro en el que se hable de los tales consumidores (y de los jugadores) ha visto por todos lados las llamadas funciones de utilidad, con las que los susodichos comparan las diversas canastas de bienes (o situaciones resultantes). Lo que realmente sucede es que las funciones de utilidad representan a las relaciones de preferencia; son un recurso matemático para hacerlas más manejables. Si llamamos W al conjunto de resultados posibles, diremos que la función $u^j : W \to R$ es una función de utilidad que representa a $\preceq^j$ si, para cada pareja de resultados A y B en W, $A \preceq^j B \Leftrightarrow u(A) \leq u(B)$. Dada una relación de preferencia, no siempre es posible encontrar una función de utilidad que la represente. Un ejemplo muy conocido de una relación de preferencia para la que no existe una función de utilidad que la represente es una que siga un orden como el del diccionario, es decir, lexicográfica.

Gerard Debreu es un economista-matemático francés famoso por su formulación axiomática de la teoría del equilibrio económico, lo que le valió el

premio Nóbel en 1983. Como parte de dicha formulación, Debreu demostró que una condición suficiente para que exista una función que represente a una relación de preferencia es que, además, de ser total, reflexiva y transitiva, dicha relación, tenga una propiedad de continuidad. Dicho autor, después de introducir una topología en W, exige que para cualquier elemento C de W, se tenga que los conjuntos

$$\left\{A \in W \,\middle|\, A \preceq^j C\right\}$$

y

$$\left\{A \in W \,\middle|\, C \preceq^j A\right\}$$

sean cerrados.

La propiedad de continuidad de las relaciones de preferencia se justifica alegando que, para la mayoría de la gente, sus preferencias no dan brincos.

Cuando la relación de preferencia cumple las propiedades mencionadas, no sólo aseguramos la existencia de una función de utilidad, sino la continuidad de ésta, lo que resulta muy conveniente para todos los problemas de optimización en que se ven envueltas estas funciones.

Sin embargo, para la Teoría de Juegos no basta este tipo de concepto de utilidad, pues es muy común que como resultado de la acción de los jugadores, en los juegos extensivos o en el contexto de las estrategias mixtas o en otros muchos, se obtenga una distribución de probabilidad entre los resultados posibles, es decir una lotería. Hasta aquí hemos supuesto que una esperanza matemática resuelve el problema, pero esto no tiene porque ser plausible.

Una situación muy simple que se puede modelar con un juego extensivo es la siguiente. Un jugador tiene que decidir entre participar en una lotería que le permite ganar un millón de pesos, con probabilidad un medio, y no ganar nada con probabilidad, también, de un medio, o que le entreguen, en forma segura, medio millón de pesos. Desde el punto de vista que hemos adoptado hasta este capítulo, a los jugadores les serían indiferentes las dos opciones, pero no cabe duda que depende de la psicología de la persona involucrada (y de los recursos con que cuenta) la opción que prefiere, de presentársele en una sola ocasión el dilema anterior. Importa mucho la actitud de la persona ante ese tipo de riesgo, para saber cuál sería su decisión.

Es necesario, entonces, extender el espacio de eventos al de las loterías entre dichos eventos y tener una teoría de la utilidad que permita a los jugadores escoger entre loterías. Von Neumann y Morgenstern [55] desarrollaron dicha teoría.

Dados A y B, dos resultados posibles en un juego, y un número real $r \in [0,1]$, llamaremos una **lotería entre A y B, con probabilidades de ocurrencia r y $1-r$**, respectivamente, al evento consistente en que A ocurra con probabilidad r y B con probabilidad $1-r$.

Denotamos a la lotería entre A y B, con probabilidades de ocurrencia r y $1-r$, respectivamente, como $rA + (1-r)\,B$.

En forma inductiva, se puede definir la lotería entre cualquier número finito de eventos. Como las loterías son eventos, también tiene sentido hablar de lotería de loterías.

Debido a las propiedades de la probabilidad, tenemos las propiedades siguientes:

$rA + (1-r)\,B = (1-r)\,B + rA.$

$rA + (1-r)\,(sB + (1-s)\,C) =$

$rA + (1-r)\,sB + (1-r)\,(1-s)\,C.$

$rA + (1-r)\,A = A.$

¿Qué propiedades deben exigirse a una relación de preferencia que está definida en un espacio de loterías? Desde luego, la totalidad, la reflexividad y la transitividad, pero también que

Axioma 4.2.1. Si $A \prec^j B$, entonces, para cualquier $r \in (0,1]$ y cualquier evento C, se cumple que $rA + (1-r)\,C \prec^j rB + (1-r)\,C$.

Axioma 4.2.2. Si $A \sim^j B$, para cualquier $r \in (0,1]$ y cualquier evento C, se cumple que

$rA + (1-r)\,C \sim^j rB + (1-r)\,C.$

Para construir una función de utilidad que represente a una relación de preferencia, es necesaria una continuidad que se justifique en forma semejante a la continuidad de las preferencias usuales. Es decir, partiendo de que los gustos se comportan sin cambios bruscos o saltos.

Axioma 4.2.3 (continuidad). Sean A, B y C eventos tales que

$$A \prec^j C \prec^j B,$$

entonces existe $r \in (0,1)$ tal que

$$rA + (1-r)\,B \sim^j C.$$

Se demuestra que esta r es única y es la base para construir una función de utilidad que toma como marco de referencia a dos eventos dados A y B tales que uno de ellos es estrictamente preferible respecto del otro.

Teorema 4.2.1. *Si $A \prec^j C \prec^j B$ y $rA + (1-r)B \sim^j C$, etonces r está en $(0,1)$ y es única.*

Demostración. Es claro que r no puede ser 0, pues entonces $B \sim^j C$.

Análogamente, si r fuera 1, entonces $A \sim^j C$. Por lo tanto, $r \in (0,1)$.

Supongamos que $sA + (1-s)B \sim^j C$, con $s \in (0,1)$. Es decir,

$$rA + (1-r)B \sim^j sA + (1-s)B.$$

Supongamos que $s < r$. Por el axioma 4.2.1, para $\frac{r-s}{1-s}$ y B, se cumple que

$$\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B \prec^j \frac{r-s}{1-s}B + \frac{1-r}{1-s}B \sim^j B\,.$$

Es decir, $\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B \prec^j B$. Además,

$rA + (1-r)B = rA + sA - sA + (1-r)B =$

$sA + ((r-s)A + (1-r)B) =$

$sA + \frac{1-s}{1-s}((r-s)A + (1-r)B) =$

$sA + (1-s)\left(\left(\frac{r-s}{1-s}\right)A + \left(\frac{1-r}{1-s}\right)\right)B.$

Como $\frac{r-s}{1-s}A + \frac{1-r}{1-s}B \prec^j B$, podemos considerar el real $1-s$ y el evento A y, por el teorema 4.2.1, tenemos

$(1-s)\left(\left(\frac{r-s}{1-s}\right)A + \left(\frac{1-r}{1-s}\right)B\right) + sA \prec^j (1-s)B + sA.$

Por lo tanto, $rA + (1-r)B \prec^j (1-s)B + sA$. Pero esto es absurdo, pues ambos son indiferentes a C.

Es decir, r es único. ∎

Los jugadores que tienen relaciones de preferencia con las propiedades 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 y que actúan de acuerdo a ellas se llaman racionales.

Teorema 4.2.2 (Existencia de una función de utilidad de von Neumann y Morgenstern). *Existe una función real u del espacio de eventos tal que para todo par de eventos C y D y q en $[0,1]$ se cumplen:*

1) *$u(C) \leq u(D)$ si, y sólo si, $C \preceq^j D$.*

2) *$u(qC + (1-q)D) = qu(C) + (1-q)u(D)$.*

Demostración. Supongamos que para todo par de eventos A y B, $A \sim^j B$. En este caso definimos a u como una función constante, por ejemplo $u(A) = 0$, para todo evento A, y vemos que u cumple trivialmente con 1 y 2.

Supongamos ahora que existen A y B tales que $A \prec^j B$, definimos $u(A) = 0$ y $u(B) = 1$.

Para todo evento C, tal que $A \sim^j C$, definimos $u(C) = 0$.

Para todo evento C, tal que $B \sim^j C$, definimos $u(C) = 1$.

En general, para dos eventos que sean indiferentes, la función u tomará el mismo valor en ellos.

Para todo evento C, tal que $A \prec^j C \prec^j B$, existe $r \in (0,1)$ única tal que $rA + (1-r)B \sim^j C$ y definimos $u(C) = 1 - r$.

Consideremos un evento C, tal que $C \prec^j A$. Tenemos que $C \prec^j A \prec^j B$, por lo que existe $s \in (0,1)$ única tal que $sC + (1-s)B \sim^j A$.

Si queremos que u cumpla la propiedad 2,

$$u(sC + (1-s)B) = su(C) + (1-s)u(B) = u(A).$$

O sea que $su(C) + (1-s) = 0$. Por lo que $u(C) = \frac{s-1}{s} < 0$.

Consideremos un evento C, tal que $B \prec^j C$. Tenemos que $A \prec^j B \prec^j C$, por lo que existe $t \in (0,1)$ única tal que $tA + (1-t)C \sim^j B$. Por la propiedad 2 que debe cumplir u, tenemos que

$$u(tA + (1-t)C) = tu(A) + (1-t)u(C) = u(B).$$

O sea que $(1-t)u(C) = 1$. Por lo que $u(C) = \frac{1}{1-t} > 1$.

u está definida para todo evento y claramente cumple la propiedad 2.

Consideremos dos eventos C y D, si alguno de ellos es indiferente al evento A, por ejemplo C, claramente se cumple para ellos que $u(C) \leq u(D)$ si, y sólo si, $u(D) \geq 0$, es decir si, y sólo si $A \preceq^j D$. O lo que es lo mismo, si y sólo si $C \preceq^j D$.

En forma análoga, se puede proceder si uno de ellos es indiferente a B.

A y B dividen al espacio de eventos que no son indiferentes a ninguno de ellos en tres "zonas". La zona de los eventos que cumplen que A es preferible a ellos, a estos u les asigna un número negativo. La zona de los que son preferibles a B, a estos u les asigna un número mayor que 1.

Pensemos, finalmente, en los eventos que están entre A y B. Es decir, son preferibles al evento A, pero B es preferible a ellos, a cada uno de estos eventos u les asigna un número en el intervalo $(0,1)$.

Sean C y D, ninguno indiferente al evento A o al B y tales que están en distintas zonas. Claramente, para ellos, se cumple la propiedad

$$C \prec^j D \Leftrightarrow u(C) < u(D).$$

Sean C y D, ninguno indiferente al A o al B y tales que están en la misma zona. Supongamos que $A \prec^j C \prec^j B$ y $A \prec^j D \prec^j B$ y que, además, $C \prec^j D$. Existe r y $r' \in (0,1)$ tales que $rA + (1-r)B \sim^j C$, $u(C) = (1-r)$ y $r'A + (1-r')B \sim^j D$, $u(D) = (1-r')$. Por otro lado, $A \prec^j C \prec^j D$ y existe $r'' \in (0,1)$ tal que $r''A + (1-r'')D \sim^j C$.

Por lo que, tenemos,
$(1-r'')(1-r') = (1-r)$,
pero $0 < 1-r'' < 1$,
$(1-r'')(1-r') < (1-r')$.
Es decir, $(1-r) < (1-r')$ o lo que es lo mismo $u(C) < u(D)$.

Si, recíprocamente, $u(C) < u(D)$ y $A \prec^j C \prec^j B$ y $A \prec^j D \prec^j B$, entonces $(1-r) < (1-r')$ y procediendo como en el teorema anterior, se tiene que $C \prec^j D$.

El análisis para puntos en otras zonas sería análogo. ∎

La función de utilidad que representa a una relación de preferencia no es única, pero dos funciones que representan a la misma relación de preferencia, se pueden obtener una de otra mediante una transformación afín. Esto es natural, pues bastó que eligiéramos dos eventos como origen y unidad, para que toda la función quedara determinada. Esta selección es análoga a elegir una escala.

Teniendo el instrumento de las funciones de utilidad de von Neumann-Morgenstern, al buscar, los jugadores racionales resultados que no sean dominados por otros resultados, según su relación de preferencia, **actúan como si estuvieran maximizando una función de utilidad**. Cualquier función de utilidad que represente a su relación de preferencia juega el mismo papel, pues todas ellas llevan a elegir el mismo resultado.

4.3. Sobre Conocimiento

4.3.1. Conocimiento Privado.

La teoría de los juegos no cooperativos, aunque busca liberarse de supuestos de racionalidad tanto sobre la utilidad como sobre el conocimiento, está llena de ellos. La discusión sobre que un equilibrio de Nash se establecería, por ejemplo, supone que todos saben que todos escogerán sus estrategias de equilibrio y que todos saben que todos saben esto y, así sucesivamente.

Exponemos las ideas de formalización de conocimiento privado y común al estilo del libro de Teoría de Juegos de Ken Binmore [4] Para describir el conocimiento privado de un jugador j, y posteriormente el común a todos los jugadores, partimos de Ω el conjunto de todos los resultados posibles de un juego y suponemos que es finito. Diremos que cualquier subconjunto de Ω es un suceso. Se dice que un suceso E ha ocurrido, cuando el resultado

que realmente ha ocurrido está en E. Entonces, introducimos un operador K^j de la manera siguiente.

El Operador de Conocimiento.

K^j asocia a cada subconjunto de Ω un subconjunto también de Ω que cumple los siguientes axiomas:

Axioma 4.3.1. 4.3.1a) $K^j(\Omega) = \Omega$.

Axioma 4.3.2. 4.3.1b) $K^j(E \cap F) = K^j(E) \cap K^j(F)$.

Axioma 4.3.3. $K^j(E) \subseteq E$.

Axioma 4.3.4. $K^j(E) \subseteq K^j\big(K^j(E)\big)$.

Axioma 4.3.5. $\Omega - K^j(\Omega - E) \subseteq K^j\big(\Omega - K^j(\Omega - E)\big)$.

A partir de su operador de conocimiento, se puede hablar de las creencias de j, introduciendo el operador P^j que se define como $\mathsf{P}^j E = \Omega - K^j(\Omega - E)$.

A los dos operadores se les pide que cumplan

Axioma 4.3.6. $\mathsf{P}^j E \subseteq K^j \mathsf{P}^j E$.

Estas hipótesis para el conocimiento de los jugadores sólo tienen realidad cuando Ω es pequeño (hipótesis del mundo pequeño de Savage) que es el mundo en el que se desenvuelve un juego.

Si K^j es el operador de conocimiento del jugador j, $K^j(E)$ se interpreta como el subconjunto de Ω en el que j sabe que E ha ocurrido.

$\Omega - K^j(\Omega - E)$ se interpreta como el subconjunto de Ω en el que j piensa que E es posible. $K^j(\Omega - E)$ es el conjunto de resultados donde j sabe que E no ocurrió, entonces el complemento de dicho conjunto son los resultados en que j no descarta que E haya ocurrido, es decir j piensa o cree que es posible que E haya ocurrido. Se usa el operador de creencias P^j para simplificar la notación.

Utilizando los axiomas 4.3.1–4.3.6 y las propiedades del operador complemento tenemos,

Proposición 4.3.1. a) $P^j\theta = \theta$.

b) $P^j(E \cup F) = P^j E \cup P^j F$.

c) $P^j E \supseteq E$.

d) $P^j E \supseteq P^{j2} E$.

e) $P^j K^j E \subseteq K^j E$

Demostración. $\mathsf{P}^j\theta = \Omega - K^j(\Omega - \theta) = \Omega - K^j(\Omega) = \theta$. Entonces, se cumple a). Es decir, $\mathsf{P}^j\theta = \theta$.

$\mathsf{P}^j(E \cup F) = \Omega - K^j(\Omega - E \cup F) =$
$\Omega - K^j((\Omega - E) \cap (\Omega - F)) =$
$\Omega - \big(K^j(\Omega - E) \cap K^j(\Omega - F)\big) =$
$\big(\Omega - K^j(\Omega - E)\big) \cup \big(\Omega - K^j(\Omega - F)\big) = \mathsf{P}^jE \cup \mathsf{P}^jF$.

Por lo que se cumple, $\mathsf{P}^j(E \cup F) = \mathsf{P}^jE \cup \mathsf{P}^jF$, que es la afirmación b).

$K^j(\Omega - E) \subseteq \Omega - E \Rightarrow$
$\Omega - K^j(\Omega - E) \supseteq \Omega - (\Omega - E) = E$.

Es decir, tenemos que $\mathsf{P}^jE \supseteq E$ o sea se cumple c).

Por otro lado, $K^j(\Omega - E) \subseteq K^j\big(K^j(\Omega - E)\big)$, entonces,
$\mathsf{P}^jE = \Omega - K^j(\Omega - E) \supseteq \Omega - K^j\big(K^j(\Omega - E)\big) =$
$\Omega - K^j\big(\Omega - \big(\Omega - K^j(\Omega - E)\big)\big) =$
$\Omega - K^j\big(\Omega - \mathsf{P}^jE\big) = \mathsf{P}^{j2}E$.

Es decir, $\mathsf{P}^jE \supseteq \mathsf{P}^{j2}E$ y se cumple d).

La demostración de e) se deja como ejercicio al lector. ∎

Se dice que T es una perogrullada para j si $T \subseteq K^jT$. Como la contención contraria la asegura el axioma 4.3.3, entonces T es una perogrullada para j si $T = K^jT$

Teorema 4.3.2. *j sabe que E ha ocurrido si y sólo si ha ocurrido una perogrullada que implica E.*

Demostración. Supongamos que existe T tal que $T \subseteq K^jT$ y $w \in K^jT$.

T implica E, es decir $T \subset E$, por lo que $K^jT \subseteq K^jE$ y $w \in K^jE$.

Recíprocamente, supongamos que $w \in K^jE$. Por otro lado,
$K^j(E) \subseteq K^j\big(K^j(E)\big)$ y $K^j(E) \subseteq E$.

Entonces, K^jE es una perogrullada que implica a E. ∎

Teorema 4.3.3. *La menor de las perogrulladas para j que contiene a w es $\mathsf{P}^j(\{w\})$*

Demostración. Para todo suceso E, P^jE es una perogrullada para j, ya que $\mathsf{P}^jE \subseteq K^j\mathsf{P}^jE$ (axioma 4.3.6). En particular, $\mathsf{P}^j(\{w\})$ es una perogrullada para j. $\mathsf{P}^j(\{w\}) = \Omega - K^j(\Omega - w)$. $K^j(\Omega - w) \subseteq \Omega - w$, por lo tanto, $w \in \Omega - K^j(\Omega - w) = \mathsf{P}^j(\{w\})$. Entonces, $\mathsf{P}^j(\{w\})$ es una perogrullada para j que contiene a w.

Supongamos que T es una perogrullada para j que contiene a w. $\{w\} \subseteq T \subseteq K^jT$, $\Omega - \{w\} \supseteq \Omega - K^jT$, lo que implica que $K^j(\Omega - \{w\}) \supseteq K^j\big(\Omega - K^jT\big)$. Entonces, $\mathsf{P}^j(\{w\}) \subseteq \mathsf{P}^jK^jT$, pero por el axioma 4.3.5, $\mathsf{P}^jK^jT \subseteq K^jT$ que a su vez está contenido en T.

Es decir $\mathsf{P}^j(\{w\}) \subseteq T$. ∎

Denotemos como $P^j(w)$ al conjunto de resultados que j piensa que serían posibles (o no descartaría) si w hubiera ocurrido. Es decir, P^j asocia a cada elemento de Ω un subconjunto también en Ω; es lo que se llama una correspondencia de Ω en sí misma. La notación que usamos es $P^j : \Omega \multimap \Omega$. El símbolo $\multimap$ significa la asociación punto conjunto.

Teorema 4.3.4. *Para toda w en Ω, $\mathsf{P}^j(\{w\}) = P^j(w)$.*

Demostración. Si T es una perogrullada que contiene a w, $P^j(w) \subseteq T$, entonces, $P^j(w) \subseteq \mathsf{P}^j(\{w\})$, pues $\mathsf{P}^j(\{w\})$ es una perogrullada que contiene a w. Pero $P^j(w)$ es una perogrullada y contiene a w, entonces $P^j(w) \supseteq \mathsf{P}^j(\{w\})$, por ser esta última la menor de ellas. ∎

Teorema 4.3.5. *Si w es el resultado real, j sabe que E ha ocurrido si y sólo si $P^j(w) \subseteq E$.*

Demostración. Si w es el resultado real y $P^j(w) \subseteq E$, j sabe que E ha ocurrido.

Supongamos que w es el resultado real y j sabe que E ha ocurrido. Existe una perogrullada T que contiene a w e implica a E, es decir, $T \subseteq E$. Entonces, $P^j(w) \subseteq T \subseteq E$. ∎

Teorema 4.3.6. *P^j parte a Ω en clases ajenas.*

Demostración. Si $\omega \in \Omega$, $\omega \in P^j(\omega)$.

Probaremos que si $P^j(w_1) \neq P^j(w_2)$, entonces,
$P^j(w_1) \cap P^j(w_2) = \theta$.
Supongamos que $\omega \in P^j(w_1) \cap P^j(w_2)$.
$\{\omega\} \subseteq \mathsf{P}^j(\{w_1\}) \Leftrightarrow w_1 \in P^j(\omega)$. Es decir,
$\{\omega\} \subseteq \mathsf{P}^j(\{w_1\}) \Leftrightarrow \{w_1\} \subseteq \mathsf{P}^j(\{\omega\})$.
Pero $\{w_1\} \subseteq \mathsf{P}^j(\{\omega\}) \Rightarrow \mathsf{P}^j(\{w_1\}) \subseteq \mathsf{P}^j(\{\omega\})$.
Como $\{\omega\} \subseteq \mathsf{P}^j(\{w_1\})$, $\mathsf{P}^j(\{\omega\}) \subseteq \mathsf{P}^j(\{w_1\})$.
Es decir, $\mathsf{P}^j(\{\omega\}) = \mathsf{P}^j(\{w_1\})$.
Análogamente se prueba que $\mathsf{P}^j(\{\omega\}) = \mathsf{P}^j(\{w_2\})$.
Es decir, $\mathsf{P}^j(\{w_1\}) = \mathsf{P}^j(\{w_2\})$ o lo que es lo mismo $P^j(w_1) = P^j(w_2)$. Pero esto es contrario a nuestro supuesto. Entonces, $P(w_1) \cap P(w_2) = \theta$. ∎

Supongamos un operador de conocimiento de j, que determina la correspondencia de creencias P^j. Cuando j consigue más información, la partición determinada por la nueva correspondencia de creencias es un refinamiento de la partición determinada por P^j.

Para ilustrar las particiones determinadas por diversas P^j cuando j va consiguiendo más información, exponemos un ejemplo de un conflicto entre tres empresas que es una adaptación del Juego de la Cara Sucia de Littlewood [32].

Ejemplo 4.3.1. Supongamos que varias empresas quieren obtener un permiso oficial para producir un tipo de bien y que el dictamen ha sido hecho, pero ellas no han sido informadas sobre esa resolución, pues faltan varios trámites. Las empresas están interesadas en obtener la información cuanto antes pues, en caso de aceptación, cada empresa actuaría de inmediato tratando de ser la primera en lanzar el producto al mercado. Cada empresa trata de sonsacar al empleado con el que todas tienen contacto. Éste tiene la orden de no avisar a nadie sobre la resolución de su caso. Sin embargo, basado en que la prohibición sobre dar otros informes no es explícita, dicho empleado actúa de acuerdo a su naturaleza comunicativa e informa a cada empresa del dictamen de las otras. Ninguna de las tres avisa a las demás sobre el dato obtenido, pues cada empresa prefiere tener la menor cantidad de competidores posibles y que estos actúen lo más retrasados posibles. Aunque, desde luego sabe que el empleado chismoso ha dado el mismo tipo de informes a cada una de las empresas.

Dada la información que obtiene la empresa j, cada clase determinada por la correspondencia de creencias tiene dos elementos, correspondientes a los dos posibles dictámenes de su caso, rechazo (R) o aceptación (A).

Así si las empresas son 3,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (A,A,A),(A,A,R),(A,R,A),(A,R,R), \\ (R,A,A),(R,A,R),(R,R,A),(R,R,R) \end{array} \right\}.$$

Las clases determinadas por P^j, la correspondencia de creencias de la empresa j, son los conjuntos tales que si la empresa sabe que está en uno de esos conjuntos, desconoce en cuál elemento preciso. Para $j = 1$ serían:

$$\begin{array}{l} \{(A,A,A),(R,A,A)\},\{(A,A,R),(R,A,R)\}, \\ \{(A,R,A),(R,R,A)\},\{(A,R,R),(R,R,R)\}. \end{array}$$

Las particiones de las demás correspondencias de creencias son análogas. La partición de cada empresa es conocida por todas las demás.

Supongamos que un periodista de la fuente ha obtenido la filtración de que se ha aceptado por lo menos el proyecto de una de las empresas y lo publica en su columna. Entonces, el operador de creencias de j cambiará al

operador de creencias P'^j, cuya partición en clases de equivalencia es un refinamiento de la partición anterior, a saber:

$$\{(A,A,A)\,,\ (R,A,A)\}\,,\{(A,A,R)\,,(R,A,R)\}\,,$$
$$\{(A,R,A)\,,(R,R,A)\}\,,\{(A,R,R)\}\,,\{(R,R,R)\}\,.$$

Si una empresa lograra deducir, de esta información, que su proyecto ha sido aceptado, tomaría medidas inmediatas. Si suponemos que las acciones de cualquier empresa, o la falta de acciones, son observadas por todas las demás, habría, en todos estos casos, nueva información para cada empresa. La nueva partición sería la más fina posible. Desde luego 1 no seguiría confundiendo (A,A,R) con (R,A,R), pues en el segundo caso, vería moverse a 2 y en el otro no, lo análogo sería cierto con (A,R,A) y (R,R,A), aunque, en este último caso, vería moverse a 3.

¿Cómo puede distinguir 1 entre (A,A,A) y (R,A,A)?

Si (R,A,A) es el dictamen real, 1 habría sido informada de dos aceptaciones, mientras que 2 y 3 sabrían que hay una aceptación y un rechazo. Durante un tiempo, observarían un desconcierto en el que nadie se movería. Esta nueva información, la del desconcierto, haría que alguna de las dos, 2 o 3, se diera cuenta que eso significa que ella misma ha sido aceptada, pues de otro modo no habría confusión para la otra. Al moverse cualquiera de ellas le informaría a 1 que ha sido rechazada, ya que si no ninguna podría haber deducido su aceptación. En el caso de que ninguna de las otras dos se mueva, 1 sabría que estaban en (A,A,A). Es decir, puede distinguir entre (A,A,A) y (R,A,A).

Con el operador de creencias se pueden abordar los problemas de la información de j en un juego extensivo, en una forma distinta de cómo se ha hecho en los capítulos 2 y 3.

Consideremos el juego de la figura 4.3.1. El jugador I tiene el conjunto de estrategias

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (1,1,1)\,,(1,1,2)\,,(1,2,1)\,,(1,2,2)\,, \\ (2,1,1)\,,(2,1,2)\,,(2,2,1)\,,(2,2,2) \end{array} \right\}.$$

Cuando I tiene que tomar la primera decisión, sus creencias parten a Ω en los subconjuntos

$\{(1,1,1)\,,(1,2,1)\,,(1,1,2)\,,(1,2,2)\}$ y

$\{(2,1,1)\,,(2,1,2)\,,(2,2,1)\,,(2,2,2)\}$,

después de la primera tirada, cuando debe decidir la segunda, la partición de Ω es

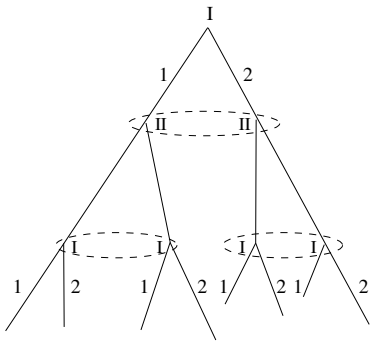

Figura 4.3.1:

$\{(1,1,1),(1,1,2)\}$, $\{(1,2,1),(1,2,2)\}$,
$\{(2,1,1),(2,1,2)\}$, $\{(2,2,1),(2,2,2)\}$.

La segunda partición es un refinamiento de la primera.

Ahora, consideremos el juego de la figura 4.3.2, Ω es de nuevo el conjunto de estrategias del jugador I, pero ahora es $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$. La primera partición, cuando I tiene que tomar la primera decisión es

$\{(1,1),(1,2)\}$ y $\{(2,1),(2,2)\}$.

La segunda, cuando I tiene que tomar su segunda decisión, es

$\{(1,1),(2,1)\}$ y $\{(1,2),(2,2)\}$ que no es un refinamiento de la primera.

¿Por qué sucede esto? Observemos que mientras que en el primer juego, el jugador I ha agregado información después de tomar su primera decisión. En el segundo, que no es un juego de memoria perfecta, el jugador I olvidó su primera decisión y no se ha agregado información.

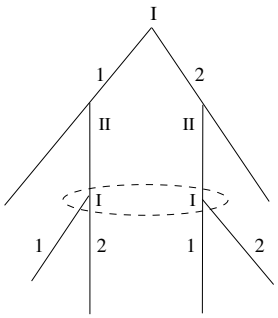

Figura 4.3.2:

4.3.2. Conocimiento Común.

Expongamos brevemente la Formalización de Robert Aumann [2] sobre el Conocimiento Común.

Cada persona j de un conjunto N tiene un operador de conocimiento distinto de las otras personas de N, por eso conviene asignarle el superíndice j a K^j, el operador de conocimiento de j. Ahora nos interesa expresar que algunos hechos son conocidos por todos. Una forma que parecería razonable de hacerlo es que el operador de conocimiento común se expresara a través de la intersección. Es decir, para que el suceso E sea conocido por todos, tendría que ocurrir que el verdadero estado del mundo w esté en K^jE para cada uno de los miembros del conjunto N, o sea $w \in K^1E \cap K^2E \cap ... \cap K^nE = \overline{K}E$.

Para que $\overline{K}$ fuera un operador de conocimiento debería cumplir los axiomas 4.3.1–4.3.5. $\overline{K}$ cumple, claramente, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 y 4.3.5, pero no así 4.3.4. Recordemos el ejemplo 4.3.1 en que varias empresas están esperando se les informe si su proyecto de producción ha sido aprobado o no. Si el verdadero estado del mundo w es que todas han sido rechazadas y E es el suceso de que alguna ha sido rechazada, entonces, después de que las empresas han hablado con el empleado, todas saben que E ha ocurrido, es decir $w \in K^1E \cap K^2E \cap ... \cap K^nE$ ($w \in \overline{K}E$). Pero no tienen porque saber, antes de algún tipo de filtración, que todas saben que $\overline{K}E$ ha ocurrido. Es decir, no tiene porque ser cierto que $w \in \overline{K}\left(\overline{K}E\right)$. Por lo tanto, no tiene porque cumplirse que $\overline{K}(E) \subseteq \overline{K}\left(\overline{K}(E)\right)$.

Ya que el operador intersección no cumple el axioma 4.3.4. Aumann no define el operador de conocimiento común como la intersección $\bigcap_{j \in N} K^j$ sino como $\overline{K}^\infty$ que sí cumple 4.3.4. Esto se debe a que Ω es un conjunto finito y, entonces, a partir de cierta m, $\overline{K}^{m+i} = \overline{K}^m$, por lo tanto, $\overline{K}^\infty\left(\overline{K}^\infty E\right) \supseteq \overline{K}^\infty E$ y $\overline{K}^\infty E \subseteq \overline{K}^\infty\left(\overline{K}^\infty E\right)$.

$\overline{K}^\infty$ formaliza el famoso criterio de que algo es de conocimiento común si todo el mundo lo sabe, todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe, todo el mundo sabe que todo el mundo sabe que todo el mundo lo sabe y, así sucesivamente.

También se puede introducir el operador de creencias comunes, tomando en cuenta la siguiente relación:

$\Omega - \overline{K}^\infty(\Omega - E) \subseteq \overline{K}^\infty\left(\Omega - \overline{K}^\infty(\Omega - E)\right)$.

Si definimos $\overline{\mathsf{P}}^\infty E$ como $\Omega - \overline{K}^\infty(\Omega - E)$, se cumplen los axiomas 4.3.1–4.3.6 y, por lo tanto, las propiedades de a, b, c, d y e de la proposición 4.3.1, para los operadores $\overline{K}^\infty$ y $\overline{\mathsf{P}}^\infty$. $\overline{\mathsf{P}}^\infty$ es el operador de creencias comunes.

Diremos que T es una perogrullada común si $T \subseteq \overline{K}^\infty T$.

Los teoremas que se deducen para los operadores $\overline{K}^{\infty}$ y $\overline{\mathsf{P}}^{\infty}$, 4.3.7–4.3.11, son análogos a los que se tenían para K^j y P^j (4.3.1-6) y se demuestran de la misma forma.

Teorema 4.3.7. *Todos saben que E ha ocurrido si y sólo si ha ocurrido una perogrullada común que implica E.*

Teorema 4.3.8. *El menor de las perogrulladas comunes que contiene a w es $\overline{\mathsf{P}}^{\infty}(\{w\})$*

Se denota como $\overline{P}^{\infty}(w)$ al conjunto de resultados que nadie descarta si w hubiera ocurrido.

Teorema 4.3.9. $\overline{\mathsf{P}}^{\infty}(\{w\}) = \overline{P}^{\infty}(w)$.

Teorema 4.3.10. *Si w es el resultado real, todos saben que E ha ocurrido si $\overline{P}^{\infty}(w) \subseteq E$.*

Teorema 4.3.11. $\overline{P}^{\infty}$ *determina una partición de Ω.*

La partición de Ω determinada por el operador de creencias comunes $\overline{P}^{\infty}$ es la partición más fina de Ω tal que cada una de las particiones determinadas por los diversos operadores P^j son refinamientos de la primera.

En el ejemplo de las empresas sujetas al trámite de obtener un permiso, después de que cada una ha hablado con el empleado comunicativo, la partición de creencias comunes es el conjunto Ω. En cambio, cuando alguna de las empresas ha sido aceptada y eso se vuelve conocimiento común debido a la filtración que publica un periodista, la partición determinada por $\overline{\mathsf{P}}^{\infty}$ es

$$\{(R,R,R)\},$$

$$\left\{\begin{array}{c}(A,A,A),\ (A,A,R),(A,R,A),(A,R,R),\\ (R,A,A),(R,A,R),(R,R,A).\end{array}\right\}$$

Supongamos que después de la filtración del periodista, la empresa 3 empieza a moverse, entonces:

La partición determinada por P^1 es

$$\{(A,A,A)\},\{(R,A,A)\},\{(A,A,R),(R,A,R)\},$$

$$\{(A,R,A)\},\{(R,R,A)\},\{(A,R,R)\},\{(R,R,R)\}.$$

La partición determinada por P^2 es

$$\{(A,A,A)\},\{(A,R,A)\},\{(A,A,R),(A,R,R)\},$$

$$\{(R,R,A)\},\{(R,A,A)\},\{(R,A,R)\},\{(R,R,R)\}.$$

La partición determinada por P^3 es

$$\{(A,A,A),\ (A,A,R)\},\{(A,R,A),(A,R,R)\},$$

$$\{(R,A,A),(R,A,R)\},\{(R,R,A)\},\{(R,R,R)\}.$$

La partición determinada por $\overline{\mathsf{P}}^{\infty}$ es

$$\{(R,R,R)\},\{(R,R,A)\},$$

$$\left\{\begin{array}{c}(A,A,R),(A,R,A),(R,A,R),\\(A,R,R),(A,A,A),(R,A,A)\end{array}\right\}.$$

4.4. Racionales y Bayesianos

No siempre las personas que participan en un juego se enfrentan a probabilidades objetivas, sino que, en ocasiones, tienen que hacer conjeturas sobre con que probabilidad se encuentran en cada una de las situaciones de un conjunto de posibilidades y, entonces, tienen que tomar decisiones sobre probabilidades subjetivas. Por ejemplo, puede suceder que desconozcan en que vértice de un conjunto de información se encuentran, pero pueden hacer conjeturas sobre las probabilidades de encontrarse en cada uno. Pueden incluso desconocer las "reglas" del conflicto en que están involucrados, no saber, por ejemplo, los verdaderos objetivos de sus oponentes y sólo conocer diversas posibilidades de sus personalidades y tener que hacer conjeturas sobre ésto. Enfrentarse, en fin, a información que no es conocimiento común en diversos niveles. Por lo que, no es infrecuente que las situaciones en que están involucrados los individuos no necesariamente envuelvan, en sí mismas, probabilidad objetiva, pero los tomadores de decisiones se ven obligados a actuar de acuerdo a sus creencias acerca de que tan probable es cada una de las posibilidades existentes. Cada participante en el conflicto engendra probabilidades subjetivas que dependen de su conocimiento y experiencia previa. A medida que los actores en el conflicto van obteniendo nueva información, estas probabilidades subjetivas cambian. La problemática que surge aquí es cercana, en cuanto al enfoque, a la que aparece en las llamadas probabilidad y estadística bayesianas. Toda esta problemática fue introducida por Harsanyi y es tratada ampliamente en el libro de selección de equilibrios que escribió con Selten [26].

El supuesto del que se parte consiste en que las personas pueden determinar cuáles serían todas las actitudes que tomarían en todas las situaciones posibles, hipótesis de mundo pequeño, semejante a lo que sucede en un juego. En estas condiciones, dadas las relaciones de preferencia $\preceq^j$ de un participante j dentro del espacio W de resultados posibles se puede construir una función de utilidad μ^j de von Neumann y Morgenstern relativa a las creencias de j, o sea relativa a una distribución de probabilidad subjetiva definida en W. Se dice que j es racional-bayesiano si su forma de actuar no se puede distinguir de la de alguien que buscara maximizar la función de utilidad μ.

Los juegos de información incompleta o bayesianos, a los que sólo nos acercaremos ligeramente en la sección siguiente, se analizan en este contexto teórico, en el que los contendientes no conocen las reglas del conflicto, por lo que realmente no se trataría de un juego, en el sentido que hasta aquí hemos usado. Sin embargo, el enfoque de jugadores racional-bayesianos ha servido para abordar este tipo de problemática que aparece ampliamente en los conflictos económicos, políticos y sociales. Pero este enfoque se puede utilizar en los juegos extensivos que hemos venido estudiando desde el capítulo 2 y nos provee con una forma de seleccionar entre los equilibrios perfectos en subjuegos. La idea está relacionada con el hecho de que los jugadores no sólo pueden hacer inducción hacia atrás, sino también deducir las acciones no vistas de los jugadores que han actuado delante de ellos, o por lo menos formarse creencias razonables acerca de estas acciones. Esto les permitirá no sólo hacer análisis sobre los subjuegos que siguen a una situación dada, sino sobre la continuación del juego a partir de algunos conjuntos de información, aunque estos no consten de un solo elemento.

Un subjuego es la parte de un juego que sigue a un conjunto de información con un solo elemento v y tal que "la memoria que parte de v se conserva dentro de los vértices mayores que v". El concepto de juego de continuación formaliza la parte de un juego que sigue a cualquier conjunto de información, cuando tiene características análogas de memoria que un subjuego y es una generalización de este último.

Sea Γ un juego extensivo y S_i^j un conjunto de información del jugador j tal que para todo vértice $X \in S_i^j$ si $Y \geq X$, con $Y \in S_k^j$ y $Z \in S_k^j$, entonces $Z \geq X'$ para algún $X' \in S_i^j$. Entonces el juego de continuación de Γ a partir de S_i^j $(\Gamma_{S_i^j})$ consta del conjunto de vértices mayores o iguales que los vértices de S_i^j y las aristas de Γ entre ellos y todos los demás elementos también heredados del juego Γ, es decir, conjunto de vértices de probabilidad y distribuciones entre las alternativas de estos vértices, conjuntos de jugador, subconjuntos de información y conjuntos de índices correspondientes a ellos

y función de pago como una restricción a las partidas que pasan por S_i^j.

La idea sería construir un concepto de equilibrio que pudiera garantizar "jugar bien" los juegos de continuación, combinando el análisis de inducción hacia atrás con el de deducción de creencias razonables acerca de la acción que han seguido los jugadores que actuaron antes de llegar a un conjunto de información, con lo que el jugador que tiene que decidir en el conjunto de información no estaría tan ciego, en cuanto a donde está situado.

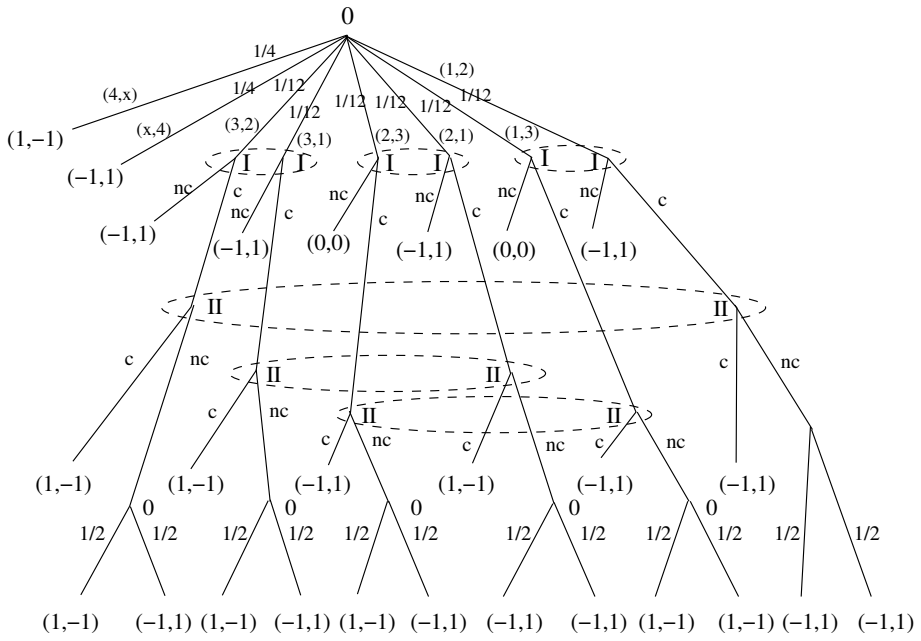

Figura 4.4.1:

Consideremos el juego del contento de la figura 2.2.9. En primer lugar, podemos analizar los seis conjuntos de información del jugador II que consta de un solo vértice. Tendríamos que elegiría, con seguridad, contento en el primero y no contento en el tercero, en el quinto y en el sexto y sería indiferente en el segundo y en el cuarto. Quedémonos con el juego podado de la figura 4.4.1.

En el conjunto de información en el que el jugador II tiene la carta 1 y el jugador I se declaró contento. II no sabe si el jugador I tiene la carta 3, vértice X_1, o la 2, vértice Y_1 (figura 4.4.2 (Fa)). Haciendo el análisis del juego, llegaría a la conclusión de que si el jugador I tuviera la carta 2, no hubiera sabido si está en $(2,3)$ o en $(2,1)$. Entonces, si I hubiera elegido no contento, tendría una esperanza de pago de $\frac{-1}{2}$, mientras que al elegir

contento no sabría si caería en el conjunto de información de II de carta 1 o en el de carta 3, en ambos casos el jugador II le impondría el pago de -1. Así que el segundo jugador llegaría a la creencia razonable de que se encuentra, con seguridad (probabilidad 1) en X_1 y le conviene declararse no contento.

En el conjunto de información en el que el jugador II tiene la carta 3 y el jugador I se declaró contento, II no sabe si el jugador I tenía la carta 2, vértice X_3 o la 1, vértice Y_3 (figura 4.4.2 (Fc)). El análisis le llevaría a pensar que I se habría declarado no contento en ambos casos. Por lo que no tiene criterio para saber si está en uno o en otro y pensaría que con probabilidad $\frac{1}{2}$ está en X_3 y con probabilidad $\frac{1}{2}$ está en Y_3. Aunque lo cierto es que no es de mucha utilidad pues en los dos vértices le conviene declararse contento, pues el sabe, sin tratar de averiguar en cuál de los dos vértices está que tiene una carta mayor que 1 y se declararía contento.

En el conjunto de información en el que el jugador II tiene la carta 2 y el jugador I se declaró contento, II no sabe si está en el vértice X_2, con la carta 3 para I, o en el vértice Y_2 (figura 4.4.2 (Fc)), donde el primer jugador tiene la 1. Haciendo el análisis llegaría a la conclusión de que a I le convendría declararse no contento si tuviese la carta 1, pues tendría una esperanza de pago de -$\frac{1}{2}$, mientras que al declararse contento II le impondría un pago de -1. Así que creería que, con probabilidad 1, el jugador I tiene la carta 3, es decir, que está en X_2, así que escogería no estar contento.

Tendríamos que, en el primer conjunto de información, I elige contento, en el segundo y en el tercero elegiría nc, entonces se han construido cuatro perfiles de estrategias:

$$((c, nc, nc), (c, c, nc, c, nc, nc, nc, nc, c)),$$

$$((c, nc, nc), (c, c, nc, nc, nc, nc, nc, nc, c)),$$

$$((c, nc, nc), (c, nc, nc, c, nc, nc, nc, nc, c)),$$

$$((c, nc, nc), (c, nc, nc, nc, nc, nc, nc, nc, c)).$$

Si buscamos los equilibrios perfectos en subjuegos tendríamos las mismas posibles respuestas de equilibrio en los conjuntos de información del jugador II que constan de un solo vértice, obteniendo un juego podado cuya matriz de pagos para el jugador I es:

$$
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{6} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \\
\frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & \frac{-1}{6}* & \frac{-1}{6}* \\
\frac{-1}{12} & 0 & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{6}* & \frac{-1}{6}* \\
0 & 0 & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{6}* & \frac{-1}{6}* \\
\frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} \\
\frac{-1}{4} & \frac{-1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{6} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} \\
\frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{12} & \frac{-1}{3} \\
\frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

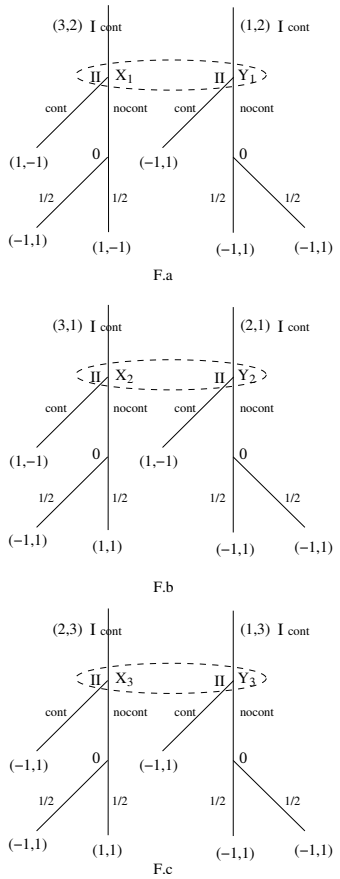

Figura 4.4.2:

La matriz de pago del jugador I tiene los equilibrios de Nash en es-

trategias puras que están señalados con un asterisco y combinándolos con las respuestas obtenidas en los seis primeros conjuntos de información del jugador II, se obtienen 24 equilibrios perfectos en subjuegos del juego del contento (ejemplo 2.2.10), entre los que están los 4 que encontramos, combinando análisis hacia atrás con el análisis de lo que habría sucedido antes para haber podido llegar hasta un punto dado.

Es decir, hemos llevado a cabo un procedimiento que selecciona algunos de los equilibrios perfectos en subjuegos; estos últimos a su vez se obtienen por un proceso de selección dentro del conjunto de equilibrios de Nash.

4.5. ¿Y si no se conocen las reglas?

En los juegos que hemos estudiado hasta aquí, todos los jugadores conocen las reglas del juego. En algunos, como en el póker o el dominó, los jugadores, al estar actuando en una partida, pueden confundir situaciones, ya que hay cartas o fichas cubiertas y cada jugador desconoce algunas de ellas, es lo que hemos llamado información no perfecta. Pero, en ese caso, todos conocen perfectamente las reglas del juego (póker o dominó), en particular, conocen el pago que obtendrá cada jugador en cada uno de los resultados posibles. A estos juegos se les llama juegos de información completa, no importa que sean juegos extensivos de información no perfecta, en ellos, repetimos, todos conocen las reglas del juego.

Imaginemos un conflicto en el que los participantes, por lo menos alguno de ellos, no conocen algún aspecto de lo que podríamos llamar reglas del tal conflicto. Por ejemplo, no conocen las personalidades de sus contrincantes, o los resultados posibles, o las probabilidades en las jugadas de azar, etc. ¿Hay alguna definición de juego de información incompleta que abarque todos los casos posibles? ¿Hay alguna teoría para abordar este tipo de temas? En realidad, toda estas preguntas están abiertas, pero la problemática que se ha abordado más ampliamente es aquella en que uno o varios de los participantes no conocen la función de utilidad de alguno (o algunos) de los otros, tanto en juegos rectangulares como en extensivos. Hay muchos avances en tópicos específicos que corresponden a este contexto. Por ejemplo, los temas de Subastas, Diseño de Mecanismos, Selección Adversa, Juegos de Señalización, Regateo con falta de información de alguno de los agentes sobre la utilidad de algunos de los otros, Nueva Organización Industrial, etc. Todos ellos son desarrollos que se ubican dentro de los llamados juegos bayesianos o de información incompleta.

4.5.1. Juegos rectangulares bayesianos (o de información incompleta)

Estos juegos son rectangulares, porque los jugadores toman decisiones en forma simultánea, como en los juegos del capítulo 1. Pero a diferencia de los de dicho capítulo, que por contraste llamaremos juegos rectangulares de información completa, en los que estamos introduciendo, por lo menos alguno de los participantes desconoce la función de utilidad de uno o varios de sus oponentes.

Elementos generales de estos "juegos" y son el conjunto de jugadores N, para cada jugador y un conjunto de estrategias puras. El conjunto de jugadores y los conjuntos de estrategias puras son conocimiento común; sin embargo con el pago que recibirá cada quien hay problemas, no es conocimiento común. No es muy sorprendente una situación de ese tipo, cuando el pago no es en dinero, es difícil saber cuál es la satisfacción (incluyendo en ese término lo que provocan los resultados desagradables) que obtiene una persona al conseguir un trabajo, ser despedido, contraer matrimonio, adquirir una obra de arte, ganar o perder unas elecciones, etc. Aún cuando el pago sea en dinero, puede ser complicado conocer la ganancia de una empresa cuando no se conocen los diversos costos en que ha incurrido. Lo que si se considera de conocimiento común es que, para cada j, existe un conjunto T_j de tipos o personalidades y el pago que, cada uno de los elementos de T_j, recibiría en cada perfil de estrategias. Cada representante del jugador j conoce el tipo o personalidad que él mismo tiene y puede no conocer las personalidades de los demás, aunque si conoce las probabilidades sobre $T_1 \times T_2 \times ... \times T_n$ determinadas por las creencias, de cada jugador j sobre la composición, en cuanto a la personalidad de los participantes. Estas probabilidades son conocimiento común.

En resumen, un juego rectangular bayesiano consta de:

1. Un conjunto de jugadores N.

2. Para cada $j \in N$, un conjunto de acciones A_j.

3. Para cada $j \in N$, un conjunto T_j, de tipos o personalidades que puede tener el jugador j.

4. Para cada $j \in N$ y para cada $t_j \in T_j$, una función de pago $\varphi^j_{t_j} : A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \to R$.

5. Para cada $j \in N$, una distribución de probabilidad p_j en $T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_n$.

Notación: $G = \left(N, \{A_j\}_{j\in N}, \{T_j\}_{j\in N}, \left\{\varphi^j_{t_j}\right\}_{j\in N, t_j\in T_j}, \{p_j\}_{j\in N}\right)$.

¿Cómo analizar un conflicto que está descrito por medio de un juego rectangular bayesiano?

El método propuesto por Harsanyi para realizar ese análisis consiste en asociar a $\left(N, \{A_j\}_{j\in N}, \{T_j\}_{j\in N}, \left\{\varphi^j_{t_j}\right\}_{j\in N, t_j\in T_j}, \{p_j\}_{j\in N}\right)$ el juego extensivo de información no perfecta siguiente (ver figura 4.5.1).

1- La raíz del juego U es un vértice de azar tal que $Alt\,(U) = T_1 \times T_2 \times \times T_n$ y la probabilidad p_k está determinada por las creencias de los jugadores.

2- Jugadas simultáneas: cada jugador j, representado por alguno de sus tipos posibles, elige una de sus acciones. j sabe cuál es su tipo, pero no el de cada uno de los demás y no conoce las decisiones de los que eligieron antes que él.

3- Cada tipo t_j recibe un pago $\varphi^j_{t_j} : A_1 \times A_2 \times ... \times A_{nj} \times T_{-j} \to R$, donde $T_{-j} = T_1 \times T_2 \times ... \times T_{j-1} \times T_{j+1} \times ... \times T_n$.

Denotemos a dicho juego extensivo como $\Gamma_{H(G)}$ y llamémosle de Harsany corespondiente a G.

Definición 4.5.1. Una estrategia para el jugador j en $\Gamma_{H(G)}$ es una función $\overline{\sigma}^j : T_j \to A_j$.

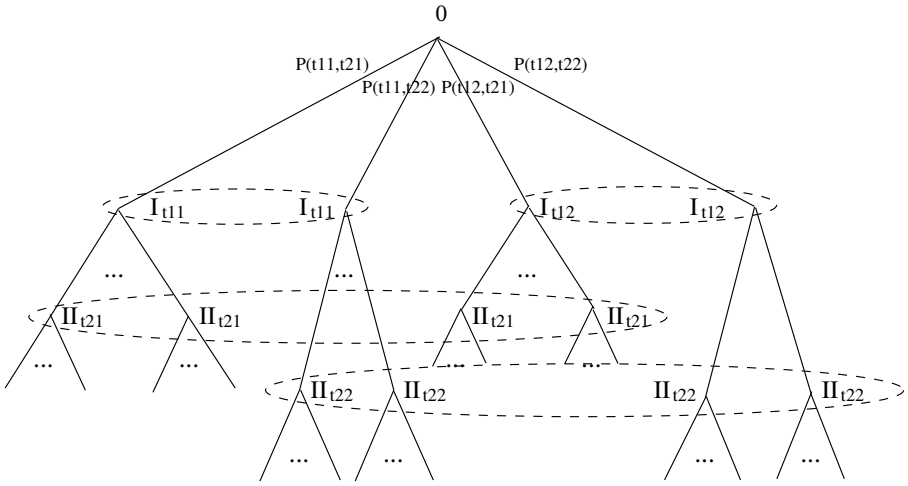

Figura 4.5.1:

$\overline{D}_j$ es el conjunto de estrategias de j en $\Gamma_{H(G)}$.

La forma normal de $\Gamma_{H(G)}$ está descrita por las funciones $\overline{\varphi}^j_{t_j} : \overline{D}_1 \times \overline{D}_2 \times \cdots \times \overline{D}_n \to R$ definidas como

$\overline{\varphi}^j_{t_j}\left(\overline{\sigma}^1, \overline{\sigma}^2, \ldots, \overline{\sigma}^n\right) = \sum_{t_{-j} \in T_{-j}} p\left(t_{-j} \,|t_j\,\right) \varphi^j_{t_j}\left(\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^n, t_{-j}\right)$,

donde $p\left(t_{-j} \,|t_j\,\right) = \frac{p(t_1, t_2, \ldots, t_n)}{p(t_j)}$.

Definición 4.5.2. $\left(\overline{\sigma}^{*1}, \overline{\sigma}^{*2}, ..., \overline{\sigma}^{*n}\right)$ es un Equilibrio Bayesiano de Nash, si para cada j en N, cada t_j en T_j y toda $\overline{\sigma}^j$ en D_j,

$$\overline{\varphi}^j_{t_j}\left(\overline{\sigma}^{*1}, \overline{\sigma}^{*2}, ..., \overline{\sigma}^{*n}\right) \geq \overline{\varphi}^j_{t_j}\left(\overline{\sigma}^{*1}, \overline{\sigma}^{*2}, ..., \overline{\sigma}^j, ..., \overline{\sigma}^{*n}\right).$$

Recordemos el Duopolio de Cournot del ejemplo 1.6.3. Dicho juego es un juego rectangular de información completa. Veamos ahora el Duopolio de Cournot con información incompleta más simple.

Ejemplo 4.5.1. Supongamos de nuevo dos empresas que controlan el mercado de un bien, pero, ahora, la primera de ellas usa una tecnología conocida por todos, con un costo unitario c, mientras que la segunda puede estar usando una de dos tecnologías nuevas con costos unitarios c_a y c_b, respectivamente, $c_a > c_b$. La primera empresa no sabe cuál es la tecnología usada por la otra, pero tiene la creencia de que la probabilidad de que esto suceda corresponde a la proporción α de empresas que utilizan la tecnología de costo alto, respecto del número total de empresas que se han inclinado por alguna de las dos tecnologías nuevas. Las dos empresas tienen que decidir simultáneamente que cantidad producirán (q_j en $A_j = [0, d]$, $j = 1, 2$), pero la segunda puede estar representada por uno de los dos tipos de nueva tecnología $T_2 = \{E_{2a}, E_{2b}\}$. El juego extensivo de Harsanyi asociado a este juego está representado en la figura 4.5.2.

De nuevo, consideramos la ecuación inversa de demanda (el precio en función de la oferta) como:

$p(q_1, q_{2i}) = d - q_1 - q_{2i}$, $i = a, b$

La ganancia para la empresa 2 de tipo $i = a$, b es

$\pi_{2i}(q_1, q_{2a}, q_{2b}) =$

$(p(q_1, q_{2i}) - c_{2i})q_{2i} = (d - q_1 - q_{2i} - c_{2i})q_{2i}$

La ganancia esperada (subjetivamente) por la empresa 1 es

$\pi_1(q_1, q_{2a}, q_{2b}) =$

$(\alpha(p(q_1, q_{2a}) - c) + (1 - \alpha)\,(p(q_1, q_{2b}) - c))\,q_1 =$

$(\alpha(d - q_1 - q_{2a} - c) + (1 - \alpha)\,(d - q_1 - q_{2b} - c))\,q_1$

La condición de primer orden para el problema de maximización de la empresa 2 cuando usa una tecnología de costo alto y supone que la empresa uno elige su estrategia q_1:

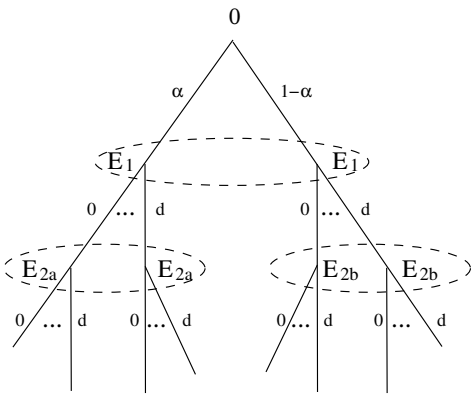

Figura 4.5.2:

$\frac{d(M-q_1-q_{2a}^{'}-c_{2a})q_{2a}^*}{dq_{2a}} = d - q_1 - 2q_{2a}^{'} - c_{2a} = 0.$

Entonces,

$$q_{2a}^{'} = \frac{d - q_1 - c_{2a}}{2}\,. \tag{4.5.3a}$$

determina la curva de reacción de la empresa 2 de tipo a.

Análogamente el problema de optimización de la empresa 2 cuando usa una tecnología de costo bajo nos lleva a

$$q_{2b}^{'} = \frac{d - q_1 - c_{2b}}{2}\,. \tag{4.5.3b}$$

Por otro lado, la condición de primer orden de maximización del pago que espera la empresa 1 es

$\frac{d\Big(\alpha(d-q_1^{'}-q_{2a}-c)+(1-\alpha)(d-q_1^{'}-q_{2b}-c)\Big)q_1^{'}}{dq_1} =$

$\alpha(d - q_1^{'} - q_{2a} - c) + (1-\alpha)\,(d - q_1^{'} - q_{2b} - c) - q_1^{'} = 0$

Entonces,

$$q_1^{'} = \frac{d - c - \alpha q_{2a} - (1-\alpha)\,q_{2b}}{2}\,. \tag{4.5.3c}$$

Utilizando 4.5.3a, 4.5.3b y 4.5.3c,

$\alpha(d - q_1^{*} - \left(\frac{d-q_1^*-c_{2a}}{2}\right) - c) + (1-\alpha)\,(d - q_1^* - \left(\frac{d-q_1^*-c_{2b}}{2}\right) - c) - q_1^{*} = 0$

Y obtenemos que el equilibrio bayesiano de Nash está dado por

$q_1^* = \frac{1}{3}(d + \alpha c_{2a} + (1-\alpha)\,c_{2b} - 2c)$

$q_{2a}^* = \frac{1}{3}(d + c - 2c_{2a}) + \frac{1-\alpha}{6}\,(c_{2a} - c_{2b})$

$q_{2b}^* = \frac{1}{3}(d + c - 2c_{2b}) + \frac{\alpha}{6}\,(c_{2b} - c_{2a})$

Recordemos que en el caso de información completa, en el duopolio de Cournot, suponiendo que d es suficientemente grande, el equilibrio de Nash es

$q_1^* = \frac{1}{3}(d + c_2 - 2c_1)$ y

$q_2^* = \frac{1}{3}(d + c_1 - 2c_2)$.

Entonces, $q_1^* > q_2^* \iff c_1 < c_2$. Es decir, en el equilibrio de Nash (o Cournot-Nash) la empresa más eficiente, o sea la que tiene menor costo, produce más que la otra.

¿Qué sucede en el caso del duopolio con información incompleta?

$$q_1^* = \frac{1}{3}(d + \alpha c_{2a} + (1-\alpha)\, c_{2b} - 2c) < \frac{1}{3}(d + c_{2a} - 2c).$$

El lado derecho de la desigualdad, $\frac{1}{3}(d + c_{2a} - 2c)$, es lo que hubiera producido la empresa 1 de haberse enfrentado con información completa a una empresa de costos altos. Cuanto más pequeña sea α, es decir cuanto más crea la empresa 1 que se enfrenta a una empresa de costos bajos, más cercana es la diferencia entre las dos producciones a $c_{2a} - c_{2b}$. Es decir, si la empresa 1 se enfrenta a otra con altos costos, pero no tiene dicha información, tener que actuar con creencias le perjudica. En cambio, a la empresa 2 con altos costos le beneficia la falta de información de 1, pues producirá

$$\frac{1}{3}(d + c - 2c_{2a}) + \frac{\alpha}{6}\,(c_{2a} - c_{2b}) > \frac{1}{3}(d + c - 2c_{2a}),$$

$\frac{1}{3}(d + c - 2c_{2a})$ es lo que produciría en el caso de información completa de la empresa 1.

Por el contrario, si la empresa 1 se enfrenta a una empresa de bajos costos y no lo sabe, tener que actuar con creencias le beneficia. Puesto que $q_1^* > \frac{1}{3}(d + c_{2b} - 2c)$ y cuanto mayor sea la creencia de que se enfrenta a una empresa de costos altos, más cercana será la diferencia entre las producciones a $c_{2a} - c_{2b}$.

Por el contrario, a la empresa 2 de bajos costos le perjudica la falta de información que tiene 1. Su producción de equilibrio está dada por $q_{2b}^* = \frac{1}{3}(d + c - 2c_{2b}) + \frac{1-\alpha}{6}\,(c_{2b} - c_{2a}) < \frac{1}{3}(d + c - 2c_{2b})$. El lado derecho hubiera sido su producción con información completa.

Haciendo razonamientos como los de la sección 4.3, quizá lo que se puede esperar es que si una empresa tiene bajos costos, lo publique a voz en cuello y si tiene altos costos trate de ocultarlo a como dé lugar, pero esto daría información a su oponente y dejaría de ser un ejemplo de juego de información incompleta. Así que mejor dejemos el tema.

4.5.2. Juegos extensivos bayesianos

El concepto de solución que surge en estos juegos, el equilibrio bayesiano perfecto, está basado en una generalización del concepto de subjuego que es el de juego de continuación. La idea es la de ampliar el concepto de cortar un juego extensivo, para que tenga sentido, no sólo en cierto tipo de vértices, sino en algunos conjuntos de información S_k^j. La condición sobre los conjuntos de información al que pertenece el vértice en que se cortaba el juego y a los que pertenecen los vértices mayores, tendrá que cumplirse para todos los vértices del conjunto de información en donde se quiere hacer el corte.

Definición 4.5.3. Un juego extensivo Γ se puede cortar en el conjunto de información S_k^j si para cada pareja de vértices u y v tales que u es mayor que algún vértice de S_k^j y u y v están en el mismo conjunto de información, v es mayor que algún vértice de S_k^j.

Definición 4.5.4. Dado un juego extensivo Γ que se puede cortar en el conjunto de información S_k^j, el juego de continuación que empieza en S_k^j es el conjunto de vértices mayores o iguales que los vértices de S_k^j y todas las aristas, conjuntos de jugador, de azar, de información en que están involucrados. Los conjuntos de índices, la distribución de probabilidad en los conjuntos de alternativas de los vértices de azar y las funciones de pago se heredan de Γ.

El concepto de equilibrio que se manejará será de tal manera que al restringirlo a los juegos de continuación sea un equilibrio.

La descripción de un juego extensivo bayesiano en términos generales es mucho más complicada que la de los rectangulares bayesianos, por lo que sólo expondremos las características generales de uno de los tipos que se estudian y se aplican ampliamente, los llamados juegos de señalización.

4.5.3. Juegos de señalización

Como antes, se presenta falta de información de algunos de los jugadores sobre las preferencias de algunos de los otros. Específicamente, en los juegos de señalización, lo que no se conoce son las preferencias de uno de ellos, E, que es un emisor de señales y es de uno de los tipos del conjunto T_E, lo que le otorga una función de utilidad. E es un jugador informado de la utilidad de los otros jugadores y de la suya propia. Todos los demás jugadores, $R_1, R_2, \ldots, R_m$, son los receptores y no conocen cuál de los tipos del conjunto T_E es el del jugador informado al que se enfrentan. La utilidad de los

jugadores R_i es de conocimiento común. E emite señales (de un conjunto dado) que reciben los jugadores receptores, cada uno de éstos decide tomar una acción (de su conjunto de acciones) de acuerdo a como interpreta la señal de E.

Formalizando, un juego de señalización $\Gamma_{S(E,\{R_j\})}$ consiste en

1. Un jugador E (el emisor), m jugadores $R_1, R_2, \ldots, R_m$ (los receptores).
2. Un conjunto de tipos del emisor $T_E = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$
3. Conjeturas sobre los tipos $p\,(t_i\,|R_j\,)$
4. Una jugada de azar con una distribución de probabilidad p sobre $T_E = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ que deriva de las conjeturas de los receptores. Esta es la jugada inicial.
5. Un conjunto de señales S_E de las que puede elegir el jugador E.
6. Para cada R_j, un conjunto de acciones A_j.
7. Al tocarle decidir, E estaría informado de t, el tipo que lo representa.
8. Simultáneamente, cada R_j ve la señal y sin conocer el tipo al que pertenece E escoge una respuesta r^j en A_j.
9. Para cada tipo t en T_E , cada señal s, y para cada perfil de respuestas de los receptores queda determinado un *pago* $\varphi_t^E\left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R}\right)$, para el representante t de E, y $\varphi^{R_j}\ \left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R_1}, \sigma^{*R_2}, ..., \sigma^{*R_m}, t\right)$, para cada R_j.

El modelo de señalización, con r tipos para E se representa en la figura 4.5.3.

Las estrategias del emisor en el juego de señalización son funciones σ^E que a cada tipo en T_E le asocian una señal.

Para cada receptor R_j, sus estrategias son funciones σ^{R_j} que a cada señal emitida por E le asocian una respuesta del conjunto A_j.

Es decir, todas las del juego de señalización son estrategias del juego extensivo representado en la figura 4.5.3. Al conjunto de estrategias de E en el juego de señalización lo denotamos como D_E. Al conjunto de estrategias de R_i en el juego de señalización lo denotamos como D_{R_i}.

Los receptores tienen que tomar decisiones en conjuntos de información con más de un elemento, pues no saben a cual de los tipos se enfrentan. Ellos construyen conjeturas o creencias acerca del tipo que pudo haber emitido

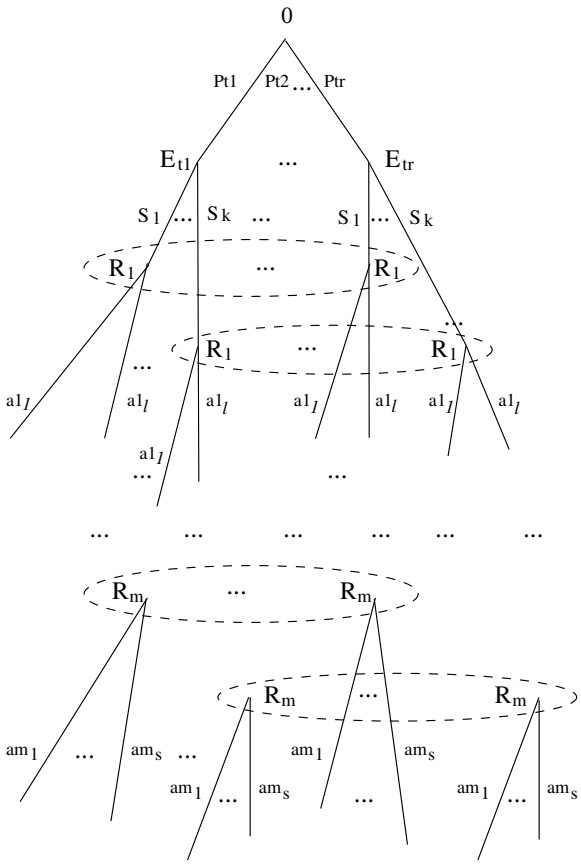

Figura 4.5.3:

la señal que están viendo. Esto lo hacen asociándole, a cada señal, una distribución de probabilidad en T_E.

Para definir el concepto de equilibrio bayesiano perfecto, se considera que con sus estrategias de equilibrio los receptores optimizarán, respecto a un pago esperado determinado por las estrategias de equilibrio de los demás y sus conjeturas o creencias. Pero estas creencias, para que formen parte de un equilibrio bayesiano perfecto, deben ser "razonables". Es decir, deben estar determinadas por las estrategias del emisor y por la ley de Bayes.

Por simplificar, definamos equilibrio bayesiano perfecto, para el caso de un emisor y un receptor.

Sea $\left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R}\right)$ una pareja de estrategias del juego de señalización, es decir, σ^{*E} es una función que a cada $t \in T_E$ le asigna una señal $s \in S_E$ y

σ^{*R} una función que a cada s le asocia una de sus posibles respuestas en A_R.

Dada una señal $s' \in S_E$, el jugador R se forma creencias acerca de cuál es la personalidad de E que pudo haber emitido la señal s. Estas creencias se expresan a través de $\mu(\ \ |s)$, una distribución de probabilidad en los tipos del jugador E.

Definición 4.5.5. $\left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R}, \ \{\mu^*(t \ \ |s)\}_{s \in D_E, t \in T_E}\right)$ es un equilibrio bayesiano perfecto del juego de señalización $\Gamma_{S(E,R)}$ si

a) Para toda $t \in T_E$ y para toda $\sigma^E \in D_E$,

$$\varphi_t^E\left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R}\right) \geq \varphi_t^E\left(\sigma^E, \sigma^{*R}\right).$$

b) Para toda $\sigma^R \in D_R$,
$\sum\limits_{t \in T_E} \mu^*\left(t \ \ \middle|\sigma^{*E}\right) \varphi^R\ \left(\sigma^{*E}, \sigma^{*R}, t\right) \geq \sum\limits_{t \in T_E} \mu\left(t \ \ \middle|\sigma^{*E}\right) \varphi^R\ \left(\sigma^{*E}, \sigma^R, t\right).$
c)

$$\mu(t \ \ |s) = \begin{cases} \frac{p_t q(s|t)}{\sum\limits_{t' \in T_E} p_{t'} q(s|t')} & \text{si } \sum\limits_{t' \in T_E} p_{t'} q(s|t') > 0, \\ \text{cualquier distribución} & \text{si } \sum\limits_{t' \in T_E} p_{t'} q(s|t') = 0, \end{cases}$$

donde $q(s|t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma^E(t) = s, \\ 0 & \text{si } \sigma^E(t) \neq s. \end{cases}$

Consideremos el siguiente ejemplo del libro de Bierman y Fernández [3]:

Ejemplo 4.5.2. Un paciente X fue sometido a una operación por un médico, el *Doctor Y*, del que sospecha que actuó con negligencia, aunque no está seguro de ello. La operación tuvo consecuencias muy malas para X y ahora está dispuesto a demandar al médico. El doctor declara su inocencia y achaca los nefastos resultados a otras causas. Por su apreciación de la trayectoria del médico y de los hechos que tuvieron lugar durante su caso, X cree que el *Doctor Y* es culpable con probabilidad $\frac{1}{2}$. El jugador "*Doctor Y*" puede estar representado por alguno de los tipos del conjunto $T_D = \{Culpable, Inocente\}$. El doctor, representado por cualquier tipo, considera la conveniencia de ofrecer, al paciente X, una indemnización de un millón de pesos o no ofrecerle nada, $S_Y = \left\{0, 10^6\right\}$. Esto lo convierte en un emisor de señales, pues ofrecer o no una indemnización transforma las creencias (probabilidades subjetivas) de X sobre la culpabilidad del doctor. X decidirá si acepta la indemnización o va a juicio, de acuerdo a la señal

recibida y a como ésta transforma sus creencias en la culpabilidad del doctor. Por supuesto, el juicio implica gastos para X y si su acusación es contra un inocente tendrá que pagar las consecuencias. La figura 4.5.4 representa a este ejemplo de señalización.

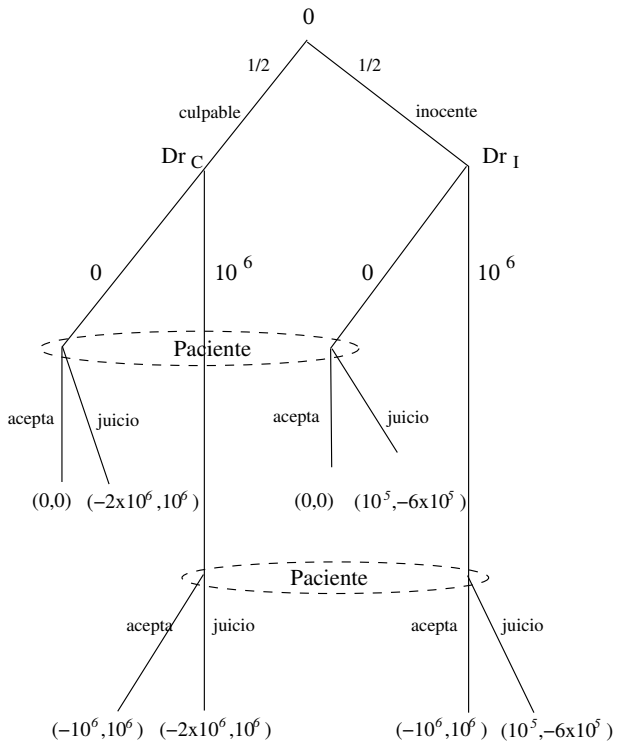

Figura 4.5.4:

Para caracterizar todos los equilibrios bayesianos perfectos, consideremos el conjunto de estrategias del *Doctor Y*, en el juego de señalización. Es decir,

$$\left\{(0,0)\,,\left(10^6,10^6\right),\left(0,10^6\right),\left(10^6,0\right)\right\}.$$

Veamos cuantos equilibrios bayesianos perfectos corresponden a cada una de estas estrategias.

Supongamos que los dos tipos de personalidad del *Doctor Y* eligen no indemnizar a X, es decir la estrategia $(0,0)$. Cuando X está en el conjunto de información en que no se le ha ofrecido indemnización, X tiene la creencia de que el médico es culpable con probabilidad $\mu\,(C\ \ |0\,)$, entonces, pensaría que

si acepta la situación cruzado de brazos ganaría 0, mientras que si decidiera irse a juicio ganaría:

$\mu\left(C \ \middle|0\right)10^6 + \left(1 - \mu\left(C \ \middle|0\right)\right)\left(-6 \times 10^5\right) =$

$\mu\left(C \ \middle|0\right)\left(10^6 + 6 \times 10^5\right) - 6 \times 10^5.$

Lo que nos lleva a que ir a *juicio* es una mejor estrategia si y sólo si $\mu\left(C \ \middle|0\right) \geq \frac{3}{8}$.

La creencia en la culpabilidad del doctor debe corresponder a la estrategia de equilibrio y a la regla de Bayes. El equilibrio propuesto es que ninguno le ofrece ninguna indemnización, entonces, $\mu\left(C \ \middle|0\right) = \frac{1}{2} > \frac{3}{8}$. Por lo que X elegiría ir a juicio.

También es necesario saber como actuaría X en el conjunto de información en el que el *Doctor Y* le ofrece una indemnización de un millón de pesos, en donde la creencia de que el médico es culpable está dada por la probabilidad $\mu\left(C \ \middle|10^6\right)$.

En este caso, si X acepta ganaría un millón, para cualquier valor de $\mu\left(C \ \middle|10^6\right)$. En cambio, si elige ir a juicio ganaría

$$\mu\left(C \ \middle|10^6\right)10^6 + \left(1 - \mu\left(C \ \middle|10^6\right)\right)\left(-6 \times 10^5\right)$$

que es menor o igual que 10^6 para todo valor de $\mu\left(C \ \middle|10^6\right)$. Es decir, cualquiera que sea la probabilidad subjetiva de X sobre la culpabilidad del *doctor*, a X le conviene aceptar la oferta de un millón de pesos y no ir a juicio.

Cómo X aceptaría el millón de indemnización, el *Doctor Y* de tipo culpable mejoraría su pago al ofrecer dicha indemnización, en lugar de ofrecer 0 e ir a juicio, ya que en este último caso, X iría a *juicio* y el médico tendría que pagar 2 millones. Por lo tanto, un perfil, en donde el doctor Culpable elige 0, mientras que el doctor de tipo inocente, también ofrece cero no puede ser un equilibrio.

Para cualquier valor de $\mu\left(C \ \middle|0\right)$, al *Doctor Y* de tipo Inocente le conviene ofrecer 0, tanto si X acepta, cuando ganaría 0, como si X va a juicio, cuando ganaría cien mil pesos, mientras que si ofrece 10^6 ganaría -10^6. Entonces, $\left(x, 10^6\right)$, con $x = 10^6$ o 0, no puede formar parte de un equilibrio.

¿Qué ocurre con $\left(10^6, 0\right)$?

Ya sabemos que, para cualquier $\mu\left(C \ \middle|10^6\right)$, a X le conviene aceptar el millón de pesos. De acuerdo al equilibrio propuesto, $\mu\left(C \ \middle|10^6\right)$ debería ser igual a 1 y $\mu\left(C \ \middle|0\right) = 0 < \frac{3}{8}$. Pero, entonces, X no iría a juicio si no le ofrecen indemnización y el doctor Culpable mejoraría su pago si no ofrece nada.

Por lo que no hay equilibrio con $\left(10^6, 0\right)$.

Por lo tanto, sólo pueden existir equilibrios con estrategias mixtas para el doctor culpable y para X en la aceptación de una oferta de cero.

La probabilidad d con que el doctor culpable ofrece 0 debe ser tal que deje indiferente a X con elegir aceptar o ir a juicio.

Entonces, la igualdad de ganancias esperadas implica.

$\mu\left(C \ \ |0\right) 10^6 + \left(1 - \mu\left(C \ \ |0\right)\right)\left(-6 \times 10^5\right) = 0.$

O lo que es lo mismo,

$\mu\left(C \ \ |0\right)\left(10^6 + 6 \times 10^5\right) = 6 \times 10^5.$

Si denotamos como $p(0\,|C\,)$ a la probabilidad de ofrecer cero siendo culpable y como $p(0\,|I\,)$ a la de ofrecer cero siendo inocente, $\mu\left(C \ \ |0\right)$ se puede escribir como

$$\frac{p(0\,|C\,)p(C)}{p(0\,|C\,)p(C) + p(0\,|I\,)p(I)} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\right)}{d\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \frac{d}{d+1}$$

Es decir,

$\frac{d}{d+1}\left(10^6 + 6 \times 10^5\right) = 6 \times 10^5$ y

$d\left(10^6 + 6 \times 10^5\right) = \left(6 \times 10^5\right)$

$d\left(10^6\right) = 6 \times 10^5$

$d = \frac{6 \times 10^5}{10^6} = \frac{3}{5}.$

Por su lado, X debe escoger la probabilidad x de aceptar cero, de tal manera que el doctor culpable resulte indiferente entre ofrecer 0 y ofrecer 10^6, es decir,

$$x\left(0\right) + 2\left(1 - x\right)\left(-10^6\right) = -10^6.$$

Por lo que, $x = \frac{1}{2}$.

El equilibrio bayesiano perfecto es el siguiente:

i) El doctor inocente ofrece siempre 0.

ii) El doctor culpable ofrece 0, con probabilidad $\frac{3}{5}$ y ofrece 10^6, con probabilidad $\frac{2}{5}$.

iii) X acepta siempre la indemnización de 10^6 y acepta que no le ofrezcan ninguna indemnización con probabilidad $\frac{3}{5}$ y se va a juicio con probabilidad $\frac{2}{5}$, cuando no le ofrecen indemnización.

Las creencias sobre la culpabilidad o no del doctor, de acuerdo a las indemnizaciones que éste ha ofrecido son:

$\mu\left(C \ \ |0\right) = \frac{3}{8},$

$\mu\left(I \ \ |0\right) = \frac{5}{8},$

$\mu\left(C \ \middle|10^6\right) = 1$ y
$\mu\left(I \ \middle|10^6\right) = 0.$

Parte II

Mezclando y Jugando en el largo Plazo

Capítulo 5

Estrategias Mixtas

5.1. Motivando con el Juego Ficticio

Como hemos visto en el capítulo 1, no todos los juegos rectangulares tienen equilibrios de Nash en estrategias puras, ni siquiera los bipersonales de suma cero más pequeños posibles, los juegos 2×2. Eso implica, entre otras cosas, que no podemos aspirar a encontrar soluciones, como los equilibrios de Nash en estrategias puras, en las que los jugadores no mezclan más de una estrategia, ya sea a lo largo del tiempo o, si esto tiene sentido en el juego en cuestión, en una sola ocasión. Este capítulo y el siguiente están dedicados al estudio de la combinación de estrategias puras en los juegos rectangulares finitos. Se estudiarán algunos aspectos para los juegos infinitos, siempre especificando que se trata de dicho caso.

Para introducirnos al tema de las estrategias mixtas, pensemos, por ejemplo, en las dos empresas que se enfrentan a través del conflicto del ejemplo 1.3.3.

$$\begin{array}{c} \\ \text{regalar} \\ \text{prensa} \\ \text{radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{entrar} & \text{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (45,-10) & (55,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Recordemos que este juego no tiene equilibrio de Nash en estrategias puras. No existe una pareja de estrategias puras, una para cada empresa, que se pueda prever que terminará por adoptarse en cada ocasión que se celebre el juego. Tenemos, entonces, que tratar de hacer otro tipo de análisis del comportamiento de las empresas, por ejemplo, pensar que el monopolio,

el jugador que elige renglones, no tiene porque decidir invertir todo el capital de que dispone para publicidad en un solo método, sino que distintas partes de éste pueden emplearse en cada uno de los métodos disponibles. Análogamente, el competidor no está obligado a considerar únicamente las opciones de invertir todo su capital en competir con el monopolio o no invertir nada, sino que puede decidir arriesgar parte de su capital compitiendo y mantener segura o invertida en otra cosa la otra parte.

La pregunta que correspondería, en un caso así, es si se puede hablar de patrones de conducta previsibles, en términos de las partes de los capitales que utilizarán las empresas en cada actividad posible.

Otra situación que se puede presentar es que realmente las empresas sí tengan que optar por una sola de sus posibles estrategias, pero que compitan a lo largo del tiempo, periodo tras periodo, y que no siempre están obligadas a utilizar la misma estrategia pura, entonces el problema a estudiar sería la frecuencia relativa con que utilizan cada una de sus posibilidades, a lo largo del tiempo. Por último, otra idea que podemos analizar es que hay varios monopolios que se enfrenta, en muchos conflictos simultáneos, contra muchos competidores diferentes y, en cada conflicto, tanto el monopolio como sus competidores se comportan en forma distinta, es decir, utilizando estrategias distintas. En ese caso, nos propondríamos estudia las frecuencias con que usan las distintas estrategias los contrincantes de los dos tipos.

Por lo pronto, sigamos la segunda línea de pensamiento, es decir, dos empresas se enfrentan, periodo tras periodo, en el mismo conflicto, no pudiendo escoger, en un periodo, más que una de sus opciones, aunque en periodos distintos si pueden elegir estrategias diferentes. Supongamos que, al empezar el análisis, se han celebrado k periodos del conflicto y que la tabla siguiente describe las estrategias utilizadas en cada uno de tales periodos:

Periodo	**Monopolio**	**Competidor**
1	s_1	c_1
2	s_2	c_2
3	s_3	c_3
4	s_4	c_4
...	...	...
k	s_k	c_k

donde $s_i \in$ {regalar muestras, publicidad escrita, publicidad en radio y tv} y $c_j \in$ {entrar a competir, no entrar}

Si conjeturáramos que la forma de actuar de cada una de las empresas corresponde a una "función" que asocia a cada periodo una de sus estrate-

gias puras, no habríamos avanzado nada respecto al análisis que hacíamos del juego cuando considerábamos que el juego se realiza una sola vez, pues no necesariamente existe una pareja de funciones que tuviese un papel semejante al equilibrio de Nash en estrategias puras.

Enfoquemos la tabla de manera distinta y pensemos que, con ella, cada empresa puede examinar la historia del conflicto y sacar conclusiones acerca del comportamiento de la otra empresa para ir mejorando su propia actuación. La empresa M observará que su competidor potencial C ha entrado a competir en k_1 ocasiones y no ha entrado en $k - k_1$. Con esto, se puede pensar en el vector de "frecuencias relativas", $\left(\frac{k_1}{k}, \frac{k-k_1}{k}\right)$, como una aproximación sobre la tendencia del comportamiento de C. Análogamente, $\left(\frac{\overline{k}_1}{k}, \frac{\overline{k}_2}{k}, \frac{k-\overline{k}_1-\overline{k}_2}{k}\right)$ es el vector de "frecuencias relativas" en el uso de las estrategias de M, si éste eligió en $\overline{k}_1$ ocasiones la estrategia *regalar muestras*, en $\overline{k}_2$ ocasiones utilizó la *publicidad escrita* y en las restantes ocasiones se anunció por *radio y tv*. Cada empresa podrá pensar en el vector de frecuencias relativas de su contrario como una "estrategia" del oponente. Quizá dicha "estrategia" no sea un plan consciente, pero la conducta seguida muestra ciertos pesos o probabilidades que el opositor está asignando a sus diversas estrategias puras como una tendencia real, aunque dichos pesos tengan una validez momentánea. Si el conflicto se va a repetir en el periodo $k + 1$, cada empresa puede utilizar la información sobre su oponente, para escoger una de sus propias estrategias puras, en $k + 1$. Por ejemplo, podría escoger, en $k + 1$, una de las estrategias puras que le hubieran otorgado la ganancia promedio más alta de haber utilizado alguna de ellas en cada uno de los k periodos anteriores.

Pensemos que el conflicto se ha llevado a cabo cinco veces y, de estos periodos, la empresa M escogió, en el primero, tercero y cuarto, la estrategia de anunciarse por *radio* y *tv*, mientras que en el segundo escogió *la publicidad escrita* y en el quinto *regaló muestras*. Por su lado, *C entró a competir*, en los dos últimos periodos y no entró en los tres primeros. La tabla que tendríamos sería la siguiente:

Periodo	**Monopolio**	**Competidor**
1	*radio y tv*	*no entró a competir*
2	*publicidad escrita*	*no entró a competir*
3	*radio y tv*	*entró a competir*
4	*radio y tv*	*entró a competir*
5	*regaló muestras*	*entró a competir*

Supongamos que, hasta el periodo 5, las empresas escogieron sus estrate-

gias arbitrariamente, pero, en el periodo 6, han llegado a la conclusión de que la información que tienen les sirve. Por ejemplo, una buena estrategia para M, en el periodo 6, es aquella que le hubiera dado el mayor mejor pago promedio, de haberla usado en los cinco periodos anteriores, bajo el supuesto de que C se hubiera comportado exactamente como lo hizo en cada uno de los 5 periodos.

Así, si hubiera regalado muestras durante los 5 periodos, habría ganado 265, o un pago medio de 53 por periodo. Este pago medio se puede calcular como $\frac{3}{5}(35)+\frac{2}{5}(80)$. Si, en cambio, hubiera elegido hacer publicidad escrita sus ganancias llegarían a 210 que por periodo es 42 $(\frac{3}{5}(30)+\frac{2}{5}(60))$. Por último, si hubiera usado radio y tv, para anunciarse, habría ganado 245 que en pago medio es 49 por periodo, lo que se obtiene como $\frac{3}{5}(45)+\frac{2}{5}(55)$. Así que, de acuerdo a este criterio, M escogerá en el periodo 6, regalar muestras que es la mejor respuesta a $\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$, el vector de frecuencias relativas de C. Por el lado de C, si hubiera escogido entrar en los cinco periodos, bajo el supuesto de que M se hubiera comportado como lo hizo, habría obtenido 5 como ganancia total, lo que da un pago medio de 1, o lo que es lo mismo $\left(\frac{1}{5}(25)+\frac{1}{5}(10)+\frac{3}{5}(-10)\right)$. En cambio, si hubiera elegido no entrar habría obtenido 0 como ganancia y como promedio, es decir, $\left(\frac{1}{5}(0)+\frac{1}{5}(0)+\frac{3}{5}(0)\right)$. Entonces, en el periodo 6, C elegiría, la estrategia *entrar* que es la mejor respuesta al vector de frecuencias relativas de M que es $\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$.

Con este enfoque, cada empresa, necesariamente, tiene que elegir arbitrariamente en el primer periodo, pues no dispone de experiencia alguna. Pero, a partir del segundo periodo, puede responder a la "estrategia de frecuencias relativas" de su oponente, en forma óptima, como se acaba de describir. Supongamos que el monopolio elige, en el primer periodo, regalar muestras y C decide, también en el primer periodo, *entrar*. En los siguientes periodos, las empresas dan su mejor respuesta al vector de frecuencias relativas de su oponente. Esto quiere decir que, en el segundo periodo, M partirá de que el vector de frecuencias de su oponente es $\left(\frac{1}{1},\frac{0}{1}\right)$ correspondiente a la elección *entrar*, en el único periodo transcurrido y, entonces, en el segundo periodo M elegirá hacer propaganda en radio y tv. C, por su parte, partirá de que M está eligiendo $\left(\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1}\right)$ y elegirá entrar. Para el tercer periodo, M considerará que C continúa con $\left(\frac{1}{1},\frac{0}{1}\right)$ y volverá a elegir hacer propaganda en radio y tv, mientras que C considerará que el vector de "frecuencias" de M es $\left(\frac{1}{2},\frac{0}{2},\frac{1}{2}\right)$ y de nuevo elegirá entrar.

Si en un periodo dado a uno de los jugadores le son indiferentes sus dos estrategias, supondremos que elegirá la misma del periodo anterior. La tabla siguiente representa la conducta que seguirían, las dos empresas, con estas mejores respuestas a las "estrategias de frecuencias relativas" en 15

periodos, cuando, en el primer periodo, el monopolio elige regalar muestras y C decide *entrar*. En las estrategias con asterisco, el jugador en cuestión es indiferente a sus dos estrategias.

Periodo	Monopolio	Competidor
1	*regalar muestras*	*entrar*
2	*radio y tv*	*entrar*
3	*radio y tv*	*entrar*
4	*radio y tv*	*entrar*
5	*radio y tv*	*no entrar*
6	*radio y tv*	*no entrar*
7	*regalar muestras*	*no entrar*

Periodo	Monopolio	Competidor
8	*regalar muestras*	**no entrar*
9	*regalar muestras*	*entrar*
10	*regalar muestras*	*entrar*
11	*regalar muestras*	*entrar*
12	*regalar muestras*	*entrar*
13	*regalar muestras*	*entrar*
14	*regalar muestras*	*entrar*
15	**regalar muestras*	*entrar*

La empresa M ha ido cambiando sus "estrategias" de frecuencias a lo largo de los quince periodos de la manera siguiente:

$$\left(\frac{1}{1},\frac{0}{1},\frac{0}{1}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{0}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{0}{3},\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{0}{4},\frac{3}{4}\right),\left(\frac{1}{5},\frac{0}{5},\frac{4}{5}\right),$$

$$\left(\frac{1}{6},\frac{0}{6},\frac{5}{6}\right),\left(\frac{2}{7},\frac{0}{7},\frac{5}{7}\right),\left(\frac{3}{8},\frac{0}{8},\frac{5}{8}\right),\left(\frac{4}{9},\frac{0}{9},\frac{5}{9}\right),\left(\frac{5}{10},\frac{0}{10},\frac{5}{10}\right),\left(\frac{6}{11},\frac{0}{11},\frac{5}{11}\right),$$

$$\left(\frac{7}{12},\frac{0}{12},\frac{5}{12}\right),\left(\frac{8}{13},\frac{0}{13},\frac{5}{13}\right),\left(\frac{9}{14},\frac{0}{14},\frac{5}{14}\right),\left(\frac{10}{15},\frac{0}{15},\frac{5}{15}\right).$$

Y la empresa C lo ha ido haciendo como sigue:

$$\left(\frac{1}{1},\frac{0}{1}\right),\left(\frac{2}{2},\frac{0}{2}\right),\left(\frac{3}{3},\frac{0}{3}\right),\left(\frac{4}{4},\frac{0}{4}\right),\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right),$$

$$\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right),\left(\frac{4}{8},\frac{4}{8}\right),\left(\frac{5}{9},\frac{4}{9}\right),\left(\frac{6}{10},\frac{4}{10}\right),\left(\frac{7}{11},\frac{4}{11}\right),\left(\frac{8}{12},\frac{4}{12}\right),$$
$$\left(\frac{9}{13},\frac{4}{13}\right),\left(\frac{10}{14},\frac{4}{14}\right),\left(\frac{11}{15},\frac{4}{15}\right).$$

Mediante el procedimiento con el que hemos construido la tabla, que estudiaremos detalladamente más adelante, sólo aparecen pesos (probabilidades) racionales. Si, en lugar de pensar que el conflicto se realiza en tiempo discreto, lo hacemos en tiempo continuo, podríamos hablar de la parte del tiempo total en que se ha escogido cada una de las estrategias puras y podríamos tener pesos no racionales.

La forma de motivar que hemos usado en esta primera sección hace aparecer a lo que llamaremos estrategias mixtas como un instrumento para que, en la repetición de un juego rectangular a lo largo del tiempo, los jugadores puedan estudiar la conducta de sus oponentes con base en la experiencia de la actuación de estos. Esta no es la única interpretación de las estrategias mixtas posible. Alguna de ellas no necesita repeticiones del juego, otras sí. Sin embargo, al definir las estrategias mixtas y desarrollar su teoría se adopta un enfoque más estático de dichas estrategias, concibiéndolas como opciones de elección que tienen los jugadores en un momento dado.

Este capítulo transcurre, como el primero, en el contexto teórico de los juegos rectangulares finitos, pero permite no limitarse a una estrategia pura, sino combinar varias de ellas, ya sea a lo largo del tiempo o en una ocasión. De hecho, se construye, con base en un juego rectangular, uno nuevo que también es rectangular, pero infinito. En este nuevo juego, tienen sentido todos los conceptos que estudiamos en el capítulo 1 y es lo que haremos en este capítulo, excepto con la parte relacionada con la forma de jugar conservadora que la trataremos en el capítulo 6. Otra vez el concepto central de solución es el de equilibrio de Nash, ahora en estrategias mixtas. Lo más importante del asunto es que un teorema debido a Nash demuestra que siempre existen los equilibrios en estrategias mixtas (sección 5.6). Para llegar a esto hay que estudiar las propiedades geométricas de los conjuntos de estrategias mixtas y de la función de pago esperado (sección 5.5). Encontrar los equilibrios de Nash en este tipo de estrategias es un asunto complicado. En el capítulo, examinamos varios métodos, unos adecuados a juegos de formas especiales, otros generales. En particular, estudiamos el algoritmo de juego ficticio que acabamos de esbozar. Justificamos dichos métodos, tanto intuitivamente, como teóricamente.

Aunque en la mayor parte del capítulo se adopta el enfoque que podríamos llamar estático de las estrategias mixtas, conviene no olvidar el interés que tienen estas estrategias para trabajar la problemática de conflictos que no ocurren solo una vez, sino que se repiten a lo largo del tiempo, o por conjuntos diversos de oponentes, en un mismo periodo. Esta problemática la abordaremos en los capítulos 7 y 8 del texto.

5.2. Estrategias Mixtas y Pago Esperado

Para estudiar la combinación o mezcla de estrategias puras ya sea en una ocasión o en el largo plazo, a la manera de las que hemos estado hablando en la sección anterior, introducimos la siguiente definición:

Definición 5.2.1. Dado el juego $\left(N,\ \{D_j\}_{j\in N}\ ,\ \varphi\right)$ finito, decimos que $X^j \in R^{l_j}$ es una estrategia mixta del jugador j, si para toda $\sigma^j \in D_j$, $x^j_{\sigma^j} \geq 0$y $\sum\limits_{\sigma^j\in D_j} x^j_{\sigma^j} = 1$. El entero l_j denota el número de estrategias puras del jugador j.

En una estrategia mixta X^j del jugador j, $x^j_{\sigma^j}$ se interpreta como el peso o probabilidad que el jugador j le asigna a su estrategia σ^j.

La letra M_j denotará al conjunto de estrategias mixtas del jugador j y M al producto cartesiano de los conjuntos M_j. A cada elemento de M le llamaremos un perfil de estrategias mixtas.

Como las estrategias mixtas de un jugador son pesos, o distribuciones de probabilidad, asignados a sus estrategias puras, podemos considerar, en particular, las de la forma $x^j_{\widetilde{\sigma}^j} = 1$, para alguna $\widetilde{\sigma}^j$ y $x^j_{\sigma^j} = 0$, para toda $\sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j$. Dichas estrategias corresponden a las estrategias puras, pues le están dando todo el peso a una de estas. Por lo que usaremos la notación $\widehat{\sigma}^j$ tanto para la estrategia pura, como para la mixta correspondiente y en el contexto se entenderá si la estamos abordando como estrategia pura o como mixta.

Si consideramos un perfil de estrategias mixtas $X = \left(X^1, X^2, ..., X^n\right)$ y $\widehat{X}^j \in M_j$, la notación $\left(X \,\middle|\, \widehat{X}^j\right)$ tiene el mismo significado que en el primer capítulo. Es decir, $\left(X \,\middle|\, \widehat{X}^j\right) = \left(X^1, X^2, ..., X^{j-1}, \widehat{X}^j, X^{j+1}, ..., X^n\right)$. En muchos textos el lector encontrará $\left(\widehat{X}^j,\ X^{-j}\right)$ con el mismo significado.

En la sección anterior, para motivar la definición de estrategia mixta, seguimos la idea de las frecuencias relativas con que un jugador j está usando cada una de sus estrategias puras en un conflicto que se repite a lo

largo del tiempo. Claramente dichos vectores de frecuencias relativas, determinados por la actuación de jugadores que sólo utilizan estrategias puras a lo largo del tiempo, son ejemplos de estrategias mixtas. Las otras ideas que se mencionaron en dicha sección, también se pueden expresar con estrategias mixtas. Es decir, se pueden dar otras interpretaciones posibles a las estrategias mixtas de un jugador, pensemos, como sugeríamos en la sección anterior, en una gran población K, cuyos miembros se enfrentan simultáneamente en una gran cantidad de "partidas" del conflicto representado por el juego $\left(N,\ \{D_j\}_{j\in N}\ ,\ \varphi\right)$. Supongamos, además, que dicha población está dividida en n subconjuntos no vacíos y ajenos, K_1, K_2, ..., K_n, $k_j = \#K_j$, $n = \#N$. Pensemos que en cada partida, participa, en el papel del jugador j, uno de los elementos de K_j, cada uno de éstos tiene la misma probabilidad de ocupar dicho papel en cada una de las "partidas" y que cada k_j es grande. Supongamos que, para cada $j \in N$, cada una de las personas de la población K_j escoge una de las estrategias puras del jugador j, para usarla en caso de ser elegido para participar en algunas de las partidas. Denotemos como $k^j\left(\sigma_i^j\right)$ al número de personas de K_j que se inclinaron por σ_i^j, entonces $\left(\frac{k^j\left(\sigma_1^j\right)}{k_j}, \frac{k^j\left(\sigma_2^j\right)}{k_j}, ..., \frac{k^j\left(\sigma_{l_j}^j\right)}{k_j}\right)$ es una estrategia mixta del jugador j que se puede interpretar como la conducta que la parte K_j de la población adopta en el periodo en cuestión. Es decir, una estrategia mixta estaría expresando la conducta de una subpoblación completa, no de una persona. Un perfil de este tipo de estrategias puede servir para representar un patrón de conducta de la población K.

Con esta idea obtendríamos para los jugadores solo "estrategias" mixtas con coordenadas racionales. Sin embargo, también se puede pensar, como es común hacerlo, cuando el número de elementos de una población es muy grande, en la parte de la población de cada conjunto que ha escogido cada una de las estrategias y, de esta manera, darle sentido a todas las componentes reales de una estrategia mixta. Con esta interpretación de las estrategias mixtas se han desarrollado, en años recientes, interesantes ideas sobre las leyes de comportamiento de poblaciones humanas y de animales, a través de los llamados juegos evolutivos.

En estas dos interpretaciones de las estrategias mixtas se concibe que hay repetición del juego, ya sea en un sentido "vertical", es decir una sola persona que interviene en un conflicto a lo largo del tiempo, o en uno "horizontal", muchos individuos de una gran población que tienen enfrentamientos simultáneos con individuos de otras poblaciones. En ambos contextos,

las decisiones que realmente toman las personas son estrategias puras y las estrategias mixtas surgen como resultado de la repetición. Pero, como decíamos anteriormente para muchos problemas, puede tener interés pensar a las estrategias mixtas como decisiones de un solo individuo en una sola ocasión. Volvamos, para ejemplificar, como adelantábamos en la sección 4.1, al monopolio M, a su competidor C y a sus estrategias mixtas respectivas. Imaginemos que ellos se enfrentarán una sola vez en la vida, ¿cómo darle sentido a dichas estrategias? Podríamos proceder de la manera siguiente, suponer que el monopolista M tiene q pesos para hacerle publicidad a su producto. Al considerar los métodos de promoción, con el tratamiento de las estrategias puras, sólo le damos oportunidad a M de que escoja una de las 3 opciones para invertir los q pesos y no puede invertir nada en los demás métodos. Con las estrategias mixtas introducimos, como elecciones posibles, el invertir una parte, por ejemplo la $\frac{14}{35}$, del capital en ese primer método, para el segundo usar la $\frac{15}{35}$ parte, dejando para el tercero la $\frac{6}{35}$ parte. Análogamente C puede partir su capital de tal manera que una parte la usará para competir, es decir para entrar al mercado, por ejemplo la $\frac{3}{5}$, mientras que el resto, $\frac{2}{5}$ del capital, la guardará en el banco, es decir esa parte no entrará al mercado. Entonces, podemos decir que, en un momento dado, el monopolio juega con la estrategia mixta $\left(\frac{14}{35}, \frac{15}{35}, \frac{6}{35}\right)$, mientras que C lo hace con $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Ya tenemos el concepto de estrategia mixta, es decir una elección que mezcla las decisiones básicas. Necesitamos, ahora, un concepto de pago asociado a este tipo de elecciones.

Definición 5.2.2. La función de pago esperado del juego $\left(N,\ \{D_j\}_{j\in N}, \varphi\right)$ es la función $E\colon M \to R^n$ definida como:

$$E\left(X^1, X^2, ..., X^n\right) = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n} \varphi\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right).$$

Para cada jugador j, denotamos como E_j a la función de pago esperado del jugador j. Las funciones E_j son las funciones componentes de E.

Así, en el ejemplo de las empresas que estábamos examinando, si pensamos que el Monopolio y el Competidor escogen las estrategias mixtas $\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{35}\right)$ y $\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$, respectivamente, entonces el pago esperado correspondiente es

$$E\left(\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{6}{35}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)\right) =$$

$$\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{8}\right)(35,25)+\left(\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}\right)(80,0)+\left(\frac{3}{7}\times\frac{3}{8}\right)(30,10)+$$

$$\left(\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}\right)(60,0)+\left(\frac{6}{35}\times\frac{3}{8}\right)(40,-10)+\left(\frac{6}{35}\times\frac{5}{8}\right)(50,0)=\left(\frac{1514}{28},\frac{132}{28}\right).$$

Es fácil demostrar que

$$E\left(X^1,X^2,...,X^n\right)=\sum_{\sigma^1\in D_1}\sum_{\sigma^2\in D_2}...\sum_{\sigma^n\in D_n}x^1_{\sigma^1}x^2_{\sigma^2}...x^n_{\sigma^n}\varphi\left(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n\right).$$

La siguiente proposición tendrá gran utilidad técnica. Recordemos que σ^j puede significar la estrategia pura que tiene ese símbolo o la estrategia mixta que le da probabilidad 1 a σ^j.

Proposición 5.2.3.

a) *Si* $X=\left(X^1,X^2,...,X^n\right)\in M$, *entonces, para toda*

$$\left(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n\right)\in D,\ x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}x^1_{\sigma^1}\geq 0\quad y$$

$$\sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D}x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}x^1_{\sigma^1}=1\,.$$

Es decir, X *determina una distribución de probabilidad en* D.

b) *Para toda* $X^j\in M_j$, $E_j\left(X\left|\widehat{X}^j\right.\right)=\sum_{\sigma^j\in D_j}\widehat{x}^j_{\sigma^j}E_j\left(X\left|\sigma^j\right.\right)$.

c) $E\left(\widehat{\sigma}^1,\widehat{\sigma}^2,...,\widehat{\sigma}^n\right)=\varphi\left(\widehat{\sigma}^1,\widehat{\sigma}^2,...,\widehat{\sigma}^n\right)$.

Demostración. a) Sea $X=\left(X^1,X^2,...,X^n\right)\in M$. Claramente

$$x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}x^1_{\sigma^1}\geq 0,\text{ para toda }\ \left(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n\right)\in D.$$

Por otro lado,

$$\sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D}x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}x^1_{\sigma^1}=$$

$$\sum_{\sigma^n\in D_n}\sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}}...\sum_{\sigma^2\in D_2}\sum_{\sigma^1\in D_1}x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}x^1_{\sigma^1}=$$

$$\sum_{\sigma^n\in D_n}\sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}}...\sum_{\sigma^2\in D_2}x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}\sum_{\sigma^1\in D_1}x^1_{\sigma^1}=$$

$$\sum_{\sigma^n\in D_n}\sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}}...\sum_{\sigma^2\in D_2}x^n_{\sigma^n}x^{n-1}_{\sigma^{n-1}}...x^2_{\sigma^2}.$$

Por inducción se demuestra que

$$\sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} ... x^2_{\sigma^2} x^1_{\sigma^1} = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} \sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} \text{ y}$$

$$\sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} \sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} = \sum_{\sigma^n\in D_n} x^n_{\sigma^n} \sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}} x^{n-1}_{\sigma^n-1} = \sum_{\sigma^n\in D_n} x^n_{\sigma^n} = 1.$$

b) Sea $\widehat{X}^j \in M_j$ y $X = \left(X^1, X^2, ..., \widehat{X}^j, ..., X^n\right) \in M$. Entonces

$$E_j\left(X \left| \widehat{X}^j\right.\right) = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} ... \widehat{x}^j_{\sigma^j} ... x^2_{\sigma^2} x^1_{\sigma^1} \varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right) =$$

$$\sum_{\sigma^n\in D_n} \sum_{\sigma^{n-1}\in D_{n-1}} ... \sum_{\sigma^2\in D_2} \sum_{\sigma^1\in D_1} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} ... \widehat{x}^j_{\sigma^j} ... x^2_{\sigma^2} x^1_{\sigma^1} \varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j\in D_j} \sum_{\sigma^n\in D_n} ... \sum_{\sigma^1\in D_1} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} ... \widehat{x}^j_{\sigma^j} ... x^2_{\sigma^2} x^1_{\sigma^1} \varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j\in D_j} \widehat{x}^j_{\sigma^j} \sum_{\sigma^n\in D_n} ... \sum_{\sigma^1\in D_1} x^n_{\sigma^n} x^{n-1}_{\sigma^{n-1}} ... x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} ... x^2_{\sigma^2} x^1_{\sigma^1} \varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right)$$

$$= \sum_{\sigma^j\in D_j} \widehat{x}^j_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j\right.\right).$$

c) Sea $\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2, ..., \widehat{\sigma}^n\right) \in D$.

$$E\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2, ..., \widehat{\sigma}^n\right) = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,...,\sigma^n)\in D} \widehat{\sigma}^1_{\sigma^1} \widehat{\sigma}^2_{\sigma^2} ... \widehat{\sigma}^n_{\sigma^n} \varphi\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right).$$

Para toda $j \in N$, $\widehat{\sigma}^j_{\sigma^j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j \neq \widehat{\sigma}^j, \\ 1 & \text{si } \sigma^j = \widehat{\sigma}^j. \end{cases}$

Es decir, $\widehat{\sigma}^1_{\sigma^1} \widehat{\sigma}^2_{\sigma^2} ... \widehat{\sigma}^n_{\sigma^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^k \neq \widehat{\sigma}^k \text{ para algún jugador } k, \\ 1 & \text{si } \sigma^j = \widehat{\sigma}^j \text{ para todo jugador } j. \end{cases}$

Entonces, $E\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2, ..., \widehat{\sigma}^n\right) = \varphi\left(\widehat{\sigma}^1, \widehat{\sigma}^2, ..., \widehat{\sigma}^n\right)$. ∎

5.3. Respondiendo a perfiles mixtos

En la primera sección de este capitulo, suponíamos que los jugadores daban una "buena" respuesta a las llamadas estrategias de frecuencias relativas en términos de sus estrategias puras. En cualquier contexto de interpretación de las estrategias mixtas tiene interés esta forma de responder. Podemos formalizar la idea de la manera siguiente:

Definición 5.3.1. Dado $X \in M$, $\widehat{\sigma}^j$ es una mejor respuesta pura del jugador j al perfil X, si

$$\max_{\sigma^j\in D_j} E_j\left(X \left| \sigma^j\right.\right) = E_j\left(X \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right).$$

Decimos que la estrategia pura $\widehat{\sigma}^j$ es una mejor respuesta estricta del jugador j a X si es una mejor respuesta pura de j a X y $E_j\left(X\left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) > E_j\left(X\right)$.

Denotaremos como $R_j(X)$ al conjunto de mejores respuestas puras del jugador j al perfil de estrategias mixtas X.

Proposición 5.3.2. *Sea el juego* $\left(N,\ \{D_j\}_{j\in N}\ ,\ \varphi\right)$ *y* X *un perfil de estrategias mixtas, entonces:*

a) $R_j(X)$ *no es vacío.*

b) *El conjunto de mejores respuestas estrictas de un jugador a un perfil de estrategias mixtas puede ser vacío.*

c) *Si* $\widehat{\sigma}^j$ *es una mejor respuesta de* j *al perfil* X*, entonces*

$$E_j\left(X\left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq E_j\left(X\right).$$

Demostración. a) Consideramos el conjunto

$$\widetilde{P_j}\left(X\right) = \left\{a \in R \ \middle|\ a = E_j\left(X\left|\sigma^j\right.\right) \text{ para alguna } \sigma^j \in D_j\right\}.$$

El conjunto $\widetilde{P_j}\left(X\right)$ es finito y, por lo tanto, contiene un elemento $\widetilde{a}$ que es el máximo de todos sus elementos. Sea $\widetilde{\sigma}^j \in D_j$ tal que $E_j\left(X\left|\widetilde{\sigma}^j\right.\right) = \widetilde{a}$, entonces $\widetilde{\sigma}^j$ es una mejor respuesta de j a X y $R_j(X)$ no es vacío.

b) Consideremos el juego del volado, es decir,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{águila} & \textit{sol} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{águila} \\ \textit{sol} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Si X^1 es la estrategia mixta $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ del jugador 1, entonces $E_1\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\sigma^2\right)$ es cero para toda $\sigma^2 \in D_2$. Es decir, $D_2 = R_2\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),X^2\right)$ con $X^2 \in M_2$. Pero como no existe ninguna estrategia pura del jugador 2 que le otorgue un pago esperado mayor que cero cuando el jugador 1 elige $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, entonces el conjunto de mejores respuestas puras estrictas de 2 a $\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),X^2\right)$ es vacío.

c) Si $\widehat{\sigma}^j$ es una mejor respuesta de j al perfil X, entonces, para toda σ^j en D_j, $E_j\left(X\left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq E_j\left(X\left|\sigma^j\right.\right)$. Por lo tanto, para toda σ^j,

$$x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\left|\sigma^j\right.\right),$$

donde $x^j_{\sigma^j}$es la coordenada de X^j correspondiente a σ^j.

Es decir, $\sum\limits_{\sigma^j\in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq \sum\limits_{\sigma^j\in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\left|\sigma^j\right.\right)$.

Pero

$$\sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j \left(X \left| \widehat{\sigma}^j \right. \right) = E_j \left(X \left| \widehat{\sigma}^j \right. \right)$$

y

$$\sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j \left(X \left| \sigma^j \right. \right) = E_j \left(X \right),$$

por lo que

$$E_j \left(X \left| \widehat{\sigma}^j \right. \right) \geq E_j \left(X \right).$$

∎

El procedimiento con el que introdujimos las estrategias mixtas en la sección 5.1 se llama algoritmo de juego ficticio. Con éste se busca estudiar las tendencias de comportamiento de los jugadores, expresando la experiencia que se tiene de dicho comportamiento, a través de ciertas estrategias mixtas, las estrategias mixtas de frecuencias. Los jugadores reaccionan frente a tales estrategias eligiendo mejores respuestas puras. Este algoritmo, en su forma original, no es bueno desde el punto de vista numérico, pues no converge fácilmente. Sin embargo, debido a la forma tan adecuada en que simula una forma muy razonable de actuar de los jugadores no sólo ha inspirado nuevos algoritmos, estos sí muy buenos, sino que ha jugado un papel muy interesante en el estudio del establecimiento de patrones de conducta sociales, a partir de las conductas individuales. Por lo pronto, precisemos en que consiste su forma original y en otros capítulos desarrollaremos el otro tipo de ideas.

Algoritmo 3. ***de Juego Ficticio.*** *Supongamos que un juego*

$$\left(N,\ \{D_j\}_{j \in N}\ ,\ \varphi \right)$$

se repite durante los periodos $t = 1, 2, \ldots$

a). *Cada jugador escoge una estrategia pura cualquiera, en el primer periodo. Si* j *escogió* $\widehat{\sigma}^j(1)$, *construimos* $X(1) \in M$, $X(1) = \left(X^1(1), ..., X^n(1) \right)$, *donde* $X^j(1) = (0, ..., 0, 1, 0, .., 0)$, *con el único 1 en la coordenada que corresponde a* $\widehat{\sigma}^j(1)$.

b). *Si ningún jugador* j *tiene estrategias puras de mejor respuesta estricta a* $X(1)$, *entonces el algoritmo termina con* $X(1)$.

c). *Si algunos jugadores* (k) *tienen mejores respuestas estrictas a* $X(1)$, *para* $t = 2$, *cada uno de ellos escoge una de dichas estrategias para el periodo 2,* $\widehat{\sigma}^k(2)$.

Los jugadores k *que no tienen mejores respuestas estrictas eligen* $\widehat{\sigma}^k(2)$ *en* $R_k(X(1))$, *de tal manera que si* $\widehat{\sigma}^k(1) \in R_k(X(1))$, *entonces* $\widehat{\sigma}^k(2) = \widehat{\sigma}^k(1)$ *(Hipótesis de inercia).*

Para cada jugador i, sea $n^i_{\sigma^i_l}(2)$ el número de veces que el jugador i ha elegido σ^i_l en los periodos 1 y 2, y definimos

$$X^i(2) = \left(\frac{n^i_{\sigma^i_1}(2)}{2}, \frac{n^i_{\sigma^i_2}(2)}{2}, ..., \frac{n^i_{\sigma^i_{l_i}}(2)}{2} \right)$$

y

$$X(2) = \left(X^1(2), X^2(2), ..., X^n(2) \right).$$

d). *Supongamos que, para $t = m$, hemos construido*

$$X(m) = \left(X^1(m),\ X^2(m),\ ...,\ X^n(m) \right).$$

Si ningún jugador j tiene mejores respuestas estrictas a $X(m)$, el algoritmo termina con $X(m)$.

e). *Si algunos jugadores k tienen mejores respuestas estrictas a $X(m)$, para $t = m+1$, cada uno de ellos escoge una de ellas como $\widehat{\sigma}^k(m+1)$.*

Los jugadores k que no tienen mejores respuestas estrictas a $X(m)$ eligen $\widehat{\sigma}^k(m+1) \in R_k(X(m))$, de tal manera que si $\widehat{\sigma}^k(m) \in R_k(X(m))$, entonces $\widehat{\sigma}^k(m+1) = \widehat{\sigma}^k(m)$ (Hipótesis de inercia).

Para cada jugador i, sea $n^i_{\sigma^i_l}(m+1)$ el número de veces que el jugador i ha elegido σ^i_l en los periodos $t = 1, 2, .., m+1$ y definimos

$$X^i(m+1) = \left(\frac{n^i_{\sigma^i_1}(m+1)}{m+1}, \frac{n^i_{\sigma^i_2}(m+1)}{m+1}, ..., \frac{n^i_{\sigma^i_{l_i}}(m+1)}{m+1} \right)$$

y

$$X(m+1) = \left(X^1(m+1), X^2(m+1), ..., X^n(m+1) \right).$$

f). *Se repiten d, e y f para $t = m+2$.*

Con los pasos del algoritmo de juego ficticio, se obtienen para $t = 1, 2, ...,$ estrategias mixtas para cada jugador, con coordenadas racionales y sólo como límite del algoritmo se pueden obtener estrategias mixtas que tengan coordenadas no racionales. El algoritmo no termina siempre; puede, incluso, no converger, es lento y depende del perfil inicial. Sin embargo, además de su interés heurístico, en construir una "buena" estrategia mixta, tiene como hemos dicho, un papel importante en la teoría y ha dado pie a algoritmos muy interesantes y eficaces que estudiaremos en el capítulo 8. Por ahora, veamos algunos ejemplos del funcionamiento del algoritmo original.

En algunos juegos, como los simétricos 2×2, el algoritmo funciona bastante bien, sin dejar de depender del perfil inicial. Veamos primero el ejemplo **??** c).

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{cortés} & \textit{descortés} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{cortés} \\ \textit{descortés} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

Los equilibrios en estrategias puras son

$$(\textit{cortés}, \textit{descortés}) \text{ y } (\textit{descortés}, \textit{cortés}).$$

Si empezáramos el algoritmo, con uno de ellos, éste terminaría de inmediato con dicho equilibrio. Empecemos, pues, con uno de los otros dos perfiles, por ejemplo $(\textit{cortés}, \textit{cortés})$.

periodo	I	$X^I(t)$	II	$X^{II}(t)$
$t=1$	*cortés*	$(1,0)$	*cortés*	$(1,0)$
$t=2$	*descortés*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	*descortés*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
$t=3$	*cortés*	$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	*cortés*	$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$
$t=4$	*descortés*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	*descortés*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
$t=5$	*cortés*	$\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$	*cortés*	$\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$
$t=6$	*cortés*	$\left(\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)$	*cortés*	$\left(\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)$
$t=7$	*descortés*	$\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$	*descortés*	$\left(\frac{4}{7},\frac{3}{7}\right)$
$t=8$	*cortés*	$\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$	*cortés*	$\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$

El algoritmo termina con el perfil $X(8) = \left(\left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)\right)$, pues ninguno de los dos jugadores tiene mejores respuestas estrictas a $X(8)$. En dicho perfil, los dos vecinos tienen un pago esperado de $-\frac{5}{8}$.

Pensemos, ahora, en el ejemplo **??** b) de los dos países petroleros, cuya matriz de pagos es:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{reducir} & \textit{no reducir} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{reducir} \\ \textit{no reducir} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego son (*reducir*, *reducir*) y (*no reducir*, *no reducir*). Si iniciamos el algoritmo con alguno de estos equilibrios, como es natural, éste terminaría desde el inicio, con el equilibrio en cuestión. En cambio, si iniciamos con (R, NR), obtendríamos la tabla siguiente:

periodo	I	$X^I(t)$	II	$X^{II}(t)$
$t=1$	*reducir*	$(1,0)$	*no reducir*	$(0,1)$
$t=2$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	*reducir*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
$t=3$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$
$t=4$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
$t=5$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$
$t=6$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$
$t=7$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)$
$t=8$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{8},\frac{7}{8}\right)$
			...	
$t=20$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{20},\frac{19}{20}\right)$	*no reducir*	$\left(\frac{1}{20},\frac{19}{20}\right)$

El algoritmo converge a $((0,1),(0,1))$ que representa el perfil (NR,NR), pero nunca lo alcanza, pues aunque cada uno de ellos solo ha escogido una vez la estrategia R, no es posible desaparecer su presencia más que en el límite, al que nunca se llega. En el periodo t, cada uno de los jugadores gana $\frac{1}{t}$ que tiende a cero, el pago en el equilibrio de Nash (ep) (NR,NR), cuando $t\to\infty$.

Sin embargo, cómo decíamos antes, no en todo juego el algoritmo se comporta bien. Examinamos el juego del volado en la siguiente tabla:

periodo	I	$X^I(t)$	II	$X^{II}(t)$
$t=1$	*águila*	$(1,0)$	*águila*	$(1,0)$
$t=2$	*sol*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	*águila*	$(1,0)$
$t=3$	*sol*	$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$	*águila*	$(1,0)$
$t=4$	*sol*	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$
$t=5$	*sol*	$\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$
$t=6$	*sol*	$\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)$	*sol*	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
$t=7$	*sol*	$\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{7},\frac{4}{7}\right)$
$t=8$	*águila*	$\left(\frac{2}{8},\frac{6}{8}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right)$
$t=9$	*águila*	$\left(\frac{3}{9},\frac{6}{9}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{9},\frac{6}{9}\right)$
$t=10$	*águila*	$\left(\frac{4}{10},\frac{6}{10}\right)$	*sol*	$\left(\frac{3}{10},\frac{7}{10}\right)$

Como se puede apreciar, el algoritmo tiene en este ejemplo un mal comportamiento. Sin embargo, el procedimiento fue introducido para calcular equilibrios de Nash en ciertas clases de juegos (Brown [8] y Robinson [45]). Una variante del algoritmo se estudia en muchos textos como un método para calcular, en un juego finito bipersonal de suma cero, el máximo asegurable para los dos jugadores y estrategias mixtas conservadoras que como veremos en el capítulo 6 forman equilibrios de Nash. Dicha variante permite

calcular equilibrios en los juegos bipersonales de suma cero ya que, para ellos, cada subsucesión que se construye con el algoritmo que presentamos y que converge lo hace a un equilibrio de Nash. A esta característica se le llamará **la propiedad de juego ficticio**.

Definición 5.3.3. Se dice que el juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$ tiene la propiedad de juego ficticio si todas las subsucesiones construídas con el algoritmo que convergen lo hacen a un equilibrio de Nash.

Enunciamos sin demostrar los siguientes resultados.

Teorema 5.3.4. a) (Robinson [45]) *Cada juego bipersonal de suma cero finito tiene la propiedad de juego ficticio.*

b) (Monderer y Shapley [37]) *Cada juego* 2×2 *no degenerado tiene la propiedad de juego ficticio.*

No siempre es lo mejor y más realista trabajar con las mejores respuestas puras, recordemos el ejemplo 1.3.3 c, pero interpretado, ahora, como los dos individuos, el monopolista y su competidor potencial, que eligen en cada ocasión en la que se enfrentan, cual será la parte de su capital respectivo, que invertirán en cada una de sus opciones. Dado un perfil de estrategias mixtas, es decir una partición de los capitales entre las elecciones de cada uno, no tiene porque interesarles mucho dar una mejor respuesta pura al "perfil" que se ha establecido en el periodo, pues eso los limita a responder con inversiones en una sola de las opciones. En éste y otros muchos juegos y en diversos contextos nos interesara el concepto de mejor respuesta mixta.

Mejores respuestas mixtas

Definición 5.3.5. Dada $X \in M$, se dice que $\widehat{X}^j$ es una mejor respuesta mixta del jugador j al perfil X, si $\max\limits_{X^j \in M_j} E_j\left(X \left| X^j\right.\right) = E_j\left(X \left| \widehat{X}^j\right.\right)$.

Si consideramos que nuestras tan traídas y llevadas empresas han estado actuando con el perfil $X = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right)$, entonces $\{(0,0,1)\}$ es el conjunto de mejores respuestas puras del Monopolio a X y coincide con el de sus mejores respuestas mixtas de X. En cambio, para cualquier perfil en donde el Competidor ha actuado con la estrategia mixta $\left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$, el conjunto de mejores respuestas mixtas del Monopolio a esos perfiles es $\{(x, 0, 1-x) \,|x \in [0,1]\}$.

Dado un juego rectangular, para cada jugador j y para cada $X \in M$, denotaremos al conjunto de mejores respuestas mixtas de j a X como:

$$L_j(X) = \left\{ \widehat{X}^j \in M_j \left| \max_{X^j \in M_j} E_j\left(X \left| X^j\right.\right) = E_j\left(X \left| \widehat{X}^j\right.\right) \right. \right\}.$$

Proposición 5.3.6.

$$L_j(X) = \left\{ \widehat{X}^j \in M_j \,\middle|\, \widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} \sigma^j \ \textit{con}\ y_{\sigma^j} > 0 \ y \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} = 1 \right\}.$$

Demostración. Sea $\widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in D_j} x_{\sigma^j} \sigma^j$, de tal manera que para

$$\widetilde{\sigma}^j \in D_j - R_j(X),\ x_{\widetilde{\sigma}^j} > 0.$$

Consideremos $\overline{\sigma}^j \in R_j(X)$ y $Y^j \in M_j$, tales que

$$Y^j = \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j} x_{\sigma^j} \sigma^j + x_{\widetilde{\sigma}^j} \overline{\sigma}^j.$$

Luego, $E_j\left(X \left| \overline{\sigma}^j \right.\right) > E_j\left(X \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right)$ y, entonces, $x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \overline{\sigma}^j \right.\right) > x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right)$. Por lo tanto,

$$x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \overline{\sigma}^j \right.\right) + \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j} x_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j \right.\right) >$$

$$x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right) + \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j} x_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j \right.\right).$$

Pero

$$x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \overline{\sigma}^j \right.\right) + \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j} x_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j \right.\right) = E_j\left(X \left| Y^j \right.\right)$$

y

$$x_{\widetilde{\sigma}^j} E_j\left(X \left| \widetilde{\sigma}^j \right.\right) \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widetilde{\sigma}^j} x_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j \right.\right) = E_j\left(X \,\middle|\, \widehat{X}^j\right).$$

O lo que es lo mismo $E_j\left(X \left| Y^j \right.\right) > E_j\left(X \,\middle|\, \widehat{X}^j\right)$, por lo que, $\widehat{X}^j$ no es una mejor respuesta mixta de j a X.

Es decir,

$$L_j(X) \subseteq \left\{ \widehat{X}^j \in M_j \,\middle|\, \widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} \sigma^j,\ y_{\sigma^j} \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} = 1 \right\}.$$

Supongamos ahora que $\widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} \sigma^j$, $y_{\sigma^j} \geq 0$ y $\sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} = 1$.

Entonces, para cualquier $\overline{\sigma}^j \in D_j$,

$$E_j\left(X \,\middle|\, \widehat{X}^j\right) = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \sigma^j \right.\right) \geq \sum_{\sigma^j \in D_j} y_{\sigma^j} E_j\left(X \left| \overline{\sigma}^j \right.\right)$$

Pero $\sum_{\sigma^j \in D_j} y_{\sigma^j} E_j \left(X \left| \overline{\sigma}^j \right. \right) = E_j \left(X \left| \overline{\sigma}^j \right. \right)$.

Sea $\overline{X}^j$ cualquier estrategia mixta del jugador j, $\overline{X}^j = \sum_{\sigma^j \in D_j} \overline{x}_{\sigma^j} \sigma^j$, entonces, para toda $\widehat{X}^j \in M_j$,

$$E_j \left(X \left| \widehat{X}^j \right. \right) = \sum_{\sigma^j \in D_j} \overline{x}_{\sigma^j} E_j \left(X \left| \widehat{X}^j \right. \right) \geq \sum_{\sigma^j \in D_j} \overline{x}_{\sigma^j} E_j \left(X \left| \sigma^j \right. \right) = E_j \left(X \left| \overline{X}^j \right. \right).$$

Es decir, $\widehat{X}^j \in L_j (X)$ y

$$L_j (X) \supseteq \left\{ \widehat{X}^j \in M_j \left| \widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} \sigma^j, \, y_{\sigma^j} \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} = 1 \right. \right\}.$$

Por lo tanto,

$$L_j (X) = \left\{ \widehat{X}^j \in M_j \left| \widehat{X}^j = \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} \sigma^j, \, y_{\sigma^j} \geq 0 \text{ y } \sum_{\sigma^j \in R_j(X)} y_{\sigma^j} = 1 \right. \right\}.$$

∎

Podemos entender a L_j como una correspondencia definida en el conjunto de perfiles de estrategias mixtas de tal manera que L_j (X) es un subconjunto de M_j $(L_j : M \multimap M_j)$. A L_j se le llama la correspondencia de mejor respuesta del jugador j. La gráfica de esta correspondencia es el conjunto

$gr (L_j) = \left\{ \left(X, \widehat{X}^j \right) \in M \times M^j \left| \widehat{X}^j \text{ es una mejor respuesta de } j \text{ a } X \right. \right\}$.

Consideremos

$$\overline{L} = \left\{ \widehat{X} \in M \left| \forall j \in N, \, \widehat{X}^j \text{ es una mejor respuesta de } j \text{ a } \widehat{X} \right. \right\} = \bigcap_{j \in N} gr (L_j).$$

Los perfiles de $\overline{L}$ tienen la propiedad de que todos los jugadores están considerando el conjunto de las mejores respuestas mixtas a las elecciones de los demás.

En los juegos 2×2 podemos estudiar geométricamente dichas correspondencias y algunas gráficas relacionadas a ellas.

5.3.1. Una cruz Gamada para los juegos 2×2

Consideremos un juego bipersonal, con matriz

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Cada estrategia mixta del jugador I es de la forma $(x, 1-x)$, con $x \in [0,1]$. Análogamente las estrategias de II son de la forma $(y, 1-y)$, con $y \in [0,1]$. Pensemos en los perfiles de estrategias mixtas como puntos del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

El punto A en la figura 5.3.1 representa el perfil $((x, 1-x), (y, 1-y))$.

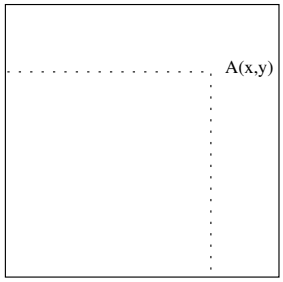

Figura 5.3.1:

Con la idea de estudiar las mejores respuestas mixtas a los diversos perfiles de estrategias mixtas, podemos observar que las esperanzas de pago de los jugadores 1 y 2, se pueden escribir respectivamente como:

$$E_1\left((x, 1-x), (y, 1-y)\right) =$$

$$xy\left(a_{11}\right) + x\left(1-y\right)\left(a_{12}\right) + \left(1-x\right)y\left(a_{21}\right) + \left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(a_{22}\right) =$$

$$x\left(y\left(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}\right) + \left(a_{12} - a_{22}\right)\right) + \left(y\left(a_{21} - a_{22}\right) + a_{22}\right).$$

$$E_2\left((x, 1-x), (y, 1-y)\right) =$$

$$xy\left(b_{11}\right) + x\left(1-y\right)\left(b_{12}\right) + \left(1-x\right)y\left(b_{21}\right) + \left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(b_{22}\right) =$$

$$y\left(x\left(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}\right) + \left(b_{21} - b_{22}\right)\right) + \left(\left(b_{12} - b_{22}\right)x + b_{22}\right).$$

Sea $((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y}))$. ¿Cómo es $L_1\ ((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y}))$? Podemos notar que la mejor respuesta del jugador 1 a $((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y}))$ depende únicamente del signo de $g\left(\widehat{y}\right) = \widehat{y}\left(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}\right) + \left(a_{12} - a_{22}\right)$.

Si $\widehat{y}$ es tal que $g\left(\widehat{y}\right) > 0$, entonces 1 debe elegir x lo más grande posible para maximizar su ganancia, es decir debe elegir $x = 1$ y

$$L_1\left((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})\right) = \{(1,0)\}.$$

Si, en cambio, $g(\widehat{y}) < 0$, entonces 1 debe elegir x lo más pequeña posible, es decir, $x = 0$ y

$$L_1((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})) = \{(0,1)\}.$$

Por último, si $g(\widehat{y}) = 0$, la ganancia de 1 es $y(a_{21} - a_{22}) + a_{22}$, cualquiera que sea el valor de x. Entonces

$$L_1((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})) = \{(x, 1-x) \mid x \in [0,1]\} = \mathfrak{M}_1.$$

Análogamente la mejor respuesta del jugador 2 a $((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y}))$ depende únicamente del signo de $g'(\widehat{x}) = \widehat{x}(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}) + (b_{21} - b_{22})$.

Si $\widehat{x}$ es tal que $g'(\widehat{x}) > 0$, entonces 2 debe elegir y lo más grande posible para maximizar su ganancia, es decir, debe elegir $y = 1$ y

$$L_2((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})) = \{(1,0)\},$$

Si $g'(\widehat{x}) < 0$, entonces 2 debe elegir y lo más pequeña posible, es decir, $y = 0$ y

$$L_2((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})) = \{(0,1)\}.$$

Por último, si $g'(\widehat{x}) = 0$, la ganancia de 2 es $(b_{12} - b_{22})x + b_{22}$, cualquiera que sea el valor de y. Entonces

$$L_2((\widehat{x}, 1-\widehat{x}), (\widehat{y}, 1-\widehat{y})) = \{(y, 1-y) \mid y \in [0,1]\} = \mathfrak{M}_2.$$

Para representar nuestro problema en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, estudiemos la gráfica de L_1, $gr(L_1) =$

$$\{(1,y) \mid \text{si } g(y) > 0\} \cup \{(0,y) \mid \text{si } g(y) < 0\} \cup \{(x,y) \mid \text{si } g(y) = 0 \text{ y } x \in [0,1]\}.$$

La gráfica de L_2 es análoga.

Si $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \overline{L} = gr(L_1) \cap gr(L_2)$, ninguno de los dos jugadores estaría tentado a buscar una ganancia mayor cambiando los pesos que se están otorgando a cada estrategia pura.

Estudiemos el conflicto de los hombres contra las mujeres que apareció en la sección 1.1, cuya matriz repetimos a continuación:

$$\begin{array}{lcc} & \text{Borola } (B) & \text{Chorreada } (Ch) \\ \text{Pepe el Toro } (P) & \left((-1,-10) \right. & \left. (5,2) \right) \\ \text{Regino Burrón } (R) & \left((0,5) \right. & \left. (1,4) \right) \end{array}$$

Para cada perfil de estrategias mixtas posible, ¿cómo se comportan los signos de g y g'?

$g(y) = y(-1-5-0+1)+5-1 = -5y+4$. Es decir,

$$\begin{aligned} g(y) &> 0 \text{ si } y < \frac{4}{5}, \\ g(y) &< 0 \text{ si } y > \frac{4}{5} \text{ y} \\ g(y) &= 0 \text{ si } y = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$gr(L_1) = \left\{ (1,y) \,\middle|\, \text{con } y < \frac{4}{5} \right\} \cup \left\{ (0,y) \,\middle|\, \text{con } y > \frac{4}{5} \right\} \cup \left\{ \left(x, \frac{4}{5} \right) \mid x \in [0,1] \right\}.$$

La gráfica $gr(L_1)$ se representa en la figura 5.3.2a.

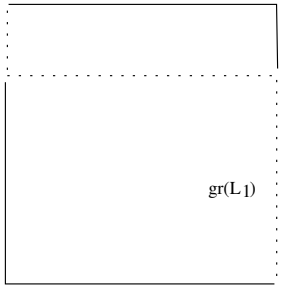

Figura 5.3.2a:

Por otro lado, $g'(x) = x(-10-2-5+4)+(5-4) = -13x+1$. Luego,

$$\begin{aligned} g'(x) &> 0 \Longleftrightarrow x < \frac{1}{13}, \\ g'(x) &< 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{13} \text{ y} \\ g'(x) &= 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{13} \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $gr(L_2) =$

$$\left\{ (x,1) \,\middle|\, \text{con } x < \frac{1}{13} \right\} \cup \left\{ (x,0) \,\middle|\, \text{con } x > \frac{1}{13} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{13}, y \right) \mid y \in [0,1] \right\}$$

(figura 5.3.2b). Por lo tanto,

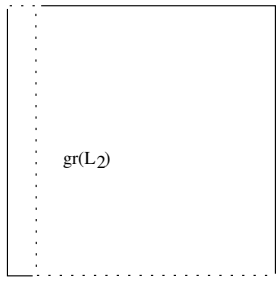

Figura 5.3.2b:

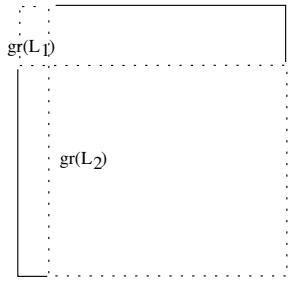

Figura 5.3.2c:

$\overline{L} = gr\,(L_1) \cap gr\,(L_2) = \left\{(0,1)\,,(1,0)\,,\left(\frac{1}{13},\frac{4}{5}\right)\right\}$ (figura 5.3.2 c)).

Observemos que $(0,1)$ y $(1,0)$ corresponden a los perfiles de estrategias puras (Regino Burrón, Borola) y (Pepe el toro, Chorreada) que son los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego en estudio.

Los conjuntos $\overline{L} = \bigcap\limits_{j \in N} gr\,(L_j)$ existen para todos los juegos finitos, no importa cuantos jugadores participen, ni cuantas estrategias puras tenga cada uno de ellos; el problema se presenta en el manejo de esos conjuntos en los juegos que no son 2×2.

En la figura 5.3.3, podemos observar, para el juego del volado, $gr\,(L_1)$, $gr\,(L_2)$ y $\overline{L}$. Entendida en el contexto de los perfiles de estrategias mixtas $\overline{L}$ se puede entender como $\left\{\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)\right\}$.

5.3.2. Las curvas de reacción

Algunos juegos infinitos bipersonales se prestan para usar la misma idea que la del método de la cruz gamada, trabajando directamente con las estrategias puras de los jugadores, es decir, sin introducir estrategias mixtas. Por ejemplo, aquellos juegos infinitos de dos personas, en los que los jugadores tienen que elegir, como estrategia, un número real y ambos tienen

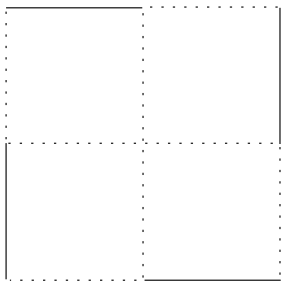

Figura 5.3.3:

una sola mejor respuesta a cada elección del otro.

Construimos una **curva de reacción del jugador** I como el conjunto de parejas de reales (x, y) tales que si II eligió y, x es la mejor respuesta de I. Es decir,

$$\left\{(x, y) \in R^2 \mid x \text{ es la respuesta de } I \text{ que maximiza su pago dado } y\right\}$$

sería la curva de reacción del jugador I. Análogamente,

$$\left\{(x, y) \in R^2 \mid y \text{ es la respuesta de } II \text{ que maximiza su pago dado } x\right\}$$

sería la curva de reacción del jugador II. Entonces, la intersección de las curvas de reacción representan perfiles $z^* = (x^*, y^*)$ en los que cada jugador está eligiendo una mejor respuesta a z^*.

Pensemos en el duopolio de Cournot (ejemplo 1.6.3). Cada uno de los dos jugadores tiene que elegir $q \in R_+$, la cantidad que piensa producir. Las curvas de reacción son de la forma:

Para el jugador 1, $\{(q_1, q_2^*) \mid -2q_1 + (d - q_2^* - c) = 0\}$.
Para el jugador 2, $\{(q_1^*, q_2) \mid -2q_2 + (d - q_1^* - c) = 0\}$.

La intersección de las curvas (figura 5.3.4) es el conjunto:

$$\left\{ \begin{array}{rl} (q_1, q_2) \mid & -2q_1 + (d - q_2 - c) = 0 \text{ y} \\ & -2q_2 + (d - q_1 - c) = 0 \end{array} \right\} = \{1/3\,((d - c)\,, (d - c))\}.$$

La correspondencia de mejor respuesta

Llamamos correspondencia de mejor respuesta a aquella que asocia, a cada perfil, el conjunto de perfiles de mejores respuestas de todos los jugadores al perfil dado, es decir,

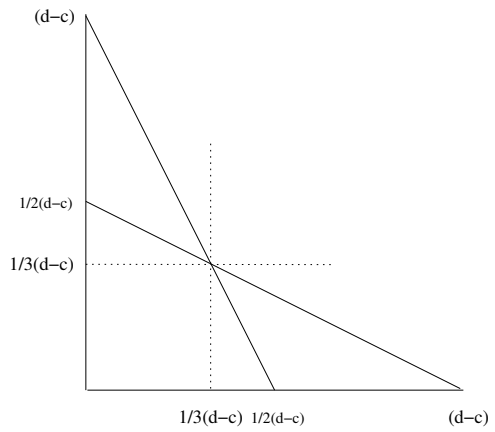

Figura 5.3.4:

$L : M \multimap M$, definida como $L(X) = \left\{ \widehat{X} \in M \,\middle|\, \widehat{X}^j \in L_j(X) \right\}$.

Un concepto importante para esta correspondencia es el de punto fijo. Diremos que X^* es punto fijo de L, si $X^* \in L(X^*)$. En el juego del volado, el único punto fijo de L es $((1/2, 1/2), (1/2, 1/2))$, mientras que en el juego de los hombres contra las mujeres el conjunto de puntos fijos de L es $\left\{((0,1),(1,0)),((1,0),(0,1)),\left(\left(\frac{1}{13},\frac{12}{13}\right),\left(\frac{4}{5},\frac{1}{5}\right)\right)\right\}$. Con el método de la cruz gamada se pueden calcular dichos conjuntos para los juegos 2×2.

Denotemos como $\overline{L}$ al conjunto de puntos fijos de la correspondencia L. No suele ser fácil encontrar los puntos fijos de una función ni los de una correspondencia.

Resulta evidente de la definición de equilibrio de Nash en estrategias puras que el conjunto de todos estos equilibrios está contenido en el conjunto de puntos fijos de la correspondencia L. En la sección 5.5, generalizaremos, en forma natural, el concepto de equilibrio de Nash al contexto de estrategias mixtas y demostraremos que el conjunto de dichos equilibrios es el conjunto de puntos fijos de L.

Los conceptos son válidos e interesantes, adecuadamente definidos, en los juegos infinitos, aún en aquellos en los que no es necesario utilizar estrategias mixtas que son los únicos juegos infinitos tratados en este texto. Es claro que las curvas de reacción se basan en este tipo de ideas.

La función de reajuste de Nash

Los jugadores que se están enfrentando repetidamente en un conflicto usando estrategias mixtas pueden preferir cambiar más lentamente dichas

estrategias, en lugar de abandonar bruscamente los pesos (probabilidades) que estaban utilizando, en aras de dar una mejor respuesta, sea pura o mixta. Es decir, pueden conformarse con elegir nuevas estrategias mixtas que les permitan mejorar, quizá no lo más posible, su esperanza de pago, pero evitando caer en ciclos o procesos que parecieran no tener una tendencia clara. La función construida por Nash tiene la característica de reajustar los pesos asignados a cada estrategia pura σ^j de cualquier jugador j, de acuerdo a que tan "buena" demostró ser, en el sentido de la cantidad en que σ^j hubiera incrementado el pago esperado, en el caso de que j la hubiera usado, respecto al perfil de estrategias mixtas que se estaba usando por todos los jugadores.

Precisando, la función utilizada por Nash es $T : M \to M$, definida como $T(X) = \widehat{X}$, donde

$$\widehat{x}^j_{\overline{\sigma}^j} = \frac{x^j_{\overline{\sigma}^j} + c^j_{\overline{\sigma}^j}(X)}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}(X)} \qquad \text{y}$$

$$c^j_{\sigma^j}(X) = \text{máx}\left\{E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) - E_j(X),\, 0\right\}.$$

Aunque el número que el jugador j le asocia a su estrategia σ^j, $c^j_{\sigma^j}(X)$, depende del perfil X al que se está enfrentando, de aquí en adelante usaremos la notación $c^j_{\sigma^j}$, para referirnos a él, para simplificar la notación.

Es claro que $\widehat{X}$ está en M, pues para toda j y toda $\overline{\sigma}^j \in D_j$, $\widehat{x}^j_{\overline{\sigma}^j} \geq 0$ y

$$\sum_{\overline{\sigma}^j \in D_j} \widehat{x}^j_{\overline{\sigma}^j} = \sum_{\overline{\sigma}^j \in D_j} \frac{x^j_{\overline{\sigma}^j} + c^j_{\overline{\sigma}^j}}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}} \sum_{\overline{\sigma}^j \in D_j} \left(x^j_{\overline{\sigma}^j} + c^j_{\overline{\sigma}^j}\right) =$$

$$\frac{\sum\limits_{\overline{\sigma}^j \in D_j} x^j_{\overline{\sigma}^j} + \sum\limits_{\overline{\sigma}^j \in D_j} c^j_{\overline{\sigma}^j}}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}} = \frac{1 + \sum\limits_{\overline{\sigma}^j \in D_j} c^j_{\overline{\sigma}^j}}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}} = 1.$$

Los jugadores de un juego rectangular $(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi)$ pueden llevar a cabo un proceso análogo al de juego ficticio, pero en lugar de ir corrigiendo sus estrategias mixtas del periodo anterior con una mejor respuesta, reajustarlas con la función de Nash. Y buscando cual es el resultado final de este nuevo algoritmo, si es que dicho algoritmo termina. Es claro que X^* es un perfil de terminación si y solo si X^* es un punto fijo de T, es decir si $T(X^*)$ es X^*. Podremos asegurar que la función T tiene puntos fijos, pero no que el algoritmo que acabamos de describir converja.

La tabla siguiente, está desarrollada sobre la base del juego de las empresas (1.3.3), con matriz

$$\begin{array}{c} \\ \text{regalar} \\ \text{prensa} \\ \text{radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{entrar} & \text{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (45,-10) & (50,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

El único punto fijo de T en este juego es $((5/7,0,2/7),(2/7,5/7))$. Pero, el algoritmo de reajustar periodo a periodo no converge. Veamos el mal comportamiento de sus 3 primeros pasos:

t	(x_1^1,x_2^1,x_3^1)	(x_1^2,x_2^2)	(c_1^1,c_2^1,c_3^1)	(c_1^2,c_2^2)
1	$(1,0,0)$	$(1,0)$	$(0,0,10)$	$(0,0)$
2	$(\frac{1}{11},0,\frac{10}{11})$	$(1,0)$	$(0,0,\frac{10}{11})$	$(0,\frac{75}{11})$
3	$(\frac{1}{21},0,\frac{20}{21})$	$(\frac{11}{86},\frac{75}{86})$	$(\frac{21\,400}{903},\frac{10\,145}{1806},0)$	$(0,\frac{275}{258})$

En el periodo 4,

$$(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=\left(\frac{42\,886}{54\,751},\frac{10\,145}{54\,751},\frac{1720}{54\,751}\right) \text{ y } (x_1^2,x_2^2)=\left(\frac{33}{533},\frac{500}{533}\right).$$

Mientras que

$$(c_1^1,c_2^1,c_3^1)=\left(\frac{128\,356\,325}{29\,182\,283},0,0\right) \text{ y } (c_1^2,c_2^2)=\left(\frac{578\,200\,000}{29\,182\,283},0\right).$$

En el periodo 5,

$$(x_1^1,x_2^1,x_3^1)=\left(\frac{151\,214\,563}{157\,538\,608},\frac{5407\,285}{157\,538\,608},\frac{114\,595}{19\,692\,326}\right) \text{ y}$$

$$(x_1^2,x_2^2)=\left(\frac{580\,006\,783}{607\,382\,283},\frac{27\,375\,500}{607\,382\,283}\right).$$

Son pocos los pasos que contiene la tabla, pero en ella se puede apreciar la dificultad del procedimiento. En la tabla construida para el juego del volado, bajo el supuesto de que los jugadores empiezan, ambos, eligiendo la estrategia pura águila, los primeros 5 pasos muestran, también, un mal comportamiento.

	(x_1^1,x_2^1)	(x_1^2,x_2^2)	(c_1^1,c_2^1)	(c_1^2,c_2^2)
Periodo 1	$(1,0)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(0,0)$
Periodo 2	$(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$	$(1,0)$	$(0,\frac{2}{3})$	$(0,\frac{2}{3})$
Periodo 3	$(\frac{1}{5},\frac{4}{5})$	$(\frac{3}{5},\frac{2}{5})$	$(0,\frac{2}{25})$	$(0,\frac{18}{25})$
Periodo 4	$(\frac{5}{27},\frac{22}{27})$	$(\frac{15}{43},\frac{28}{43})$	$(\frac{572}{1161},0)$	$((0,\frac{34}{27}))$
Periodo 5	$(\frac{787}{1733},\frac{946}{1733})$	$(\frac{405}{2623},\frac{2218}{2623})$		

Parece, entonces, una pérdida de tiempo esta función de reajuste de Nash. En la sección 5.6 veremos que esto no es así. La función T no responde a las expectativas intuitivas que podría despertar, en el sentido de que pareciera una forma adecuada de cambiar los pesos asignados a las estrategias, de acuerdo a su comportamiento frente a las estrategias utilizadas por los otros jugadores y llegar así a una solución del juego. Sin embargo, resulta que es la clave para la demostración del teorema fundamental (Teorema de Nash) de los juegos no cooperativos finitos que establece que siempre existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Definimos en la sección siguiente ese nuevo equilibrio y, además, establecemos la relación entre éste y los conceptos que hemos trabajado en esta sección. La demostración del teorema de existencia aparece al final del capítulo.

5.4. Equilibrio de Nash en Estrategias Mixtas

Al introducir las estrategias mixtas y la función de pago esperado para un juego finito $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, hemos construido otro juego rectangular, éste infinito. Podemos adoptar, para el nuevo juego, el enfoque análogo al del capítulo 1. Cada jugador elige una estrategia mixta y con ello queda determinado un pago esperado para cada uno, es decir volveríamos a pensar en un juego rectangular, ahora $(N, \{M_j\}_{j\in N}, E)$ que se lleva a cabo en una única ocasión. Podemos, entonces, definir los mismos conceptos que en el capítulo 1, especialmente el de equilibrio de Nash en estrategias mixtas que es el concepto de solución de los juegos no cooperativos. En este caso, dado que el juego es infinito, hay que justificar la validez de los conceptos. Por otro lado, relacionaremos los equilibrios de Nash en estrategias mixtas con las ideas aparecidas en la sección anterior.

Como ejemplificamos en la sección 5.2, no siempre hay una dinámica envuelta en el concepto de estrategia mixta. En algunos juegos la interpretación de este concepto es completamente natural como una decisión posible para cada ocasión que se realiza el juego. Recordemos el juego de concurrencia o ventanillas, donde los jugadores son trabajadores que tienen que elegir de un conjunto finito de oficios posibles, aquel al que se dedicarán. Los diversos oficios son las estrategias puras del juego, pero es válido imaginar una situación en donde un trabajador decide dedicar diversas partes del tiempo que dura su jornada a oficios distintos y no sólo a uno de ellos. Esto sería una estrategia mixta en el juego de una sola tirada, análogamente en juegos en donde los jugadores son empresarios que deben elegir donde invertir su capital. Ellos podrían dividir su inversión, como en el ejemplo que discu-

timos en la sección 5.2, entre las diversas posibilidades; cada una de estas divisiones posibles es una estrategia mixta.

El concepto de solución en el "nuevo" juego, $(N, \{M_j\}_{j\in N}, E)$, también será el de un equilibrio de Nash [38, 40], con la generalización natural de la definición 1.2.3.

Definición 5.4.1. Un perfil de estrategias mixtas X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (em), si para cada jugador j en N se cumple:

$$E_j\left(X^*\right) \geq \; E_j\left(X^* \left| X^j\right.\right) \quad \text{para toda } X^j \in M_j.$$

Podemos, entonces, decir que X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (em) si se cumple que, para toda $j \in N$,

$$\operatorname*{máx}_{X^j\in M_j} E_j\left(X^* \left| X^j\right.\right) = E_j\left(X^* \left| X^{*j}\right.\right) = E_j\left(X^*\right).$$

Tenemos que contestar varias preguntas para este nuevo acercamiento de solución, como por ejemplo, ¿ahora sí tendremos solución en cada juego?, ¿qué ocurrirá con los juegos que ya podíamos resolver en estrategias puras?, ¿qué relación tiene el equilibrio de Nash en estrategias mixtas con los diversos acercamientos intuitivos a una solución "dinámica" que hemos estado tratando en lo que va de este capítulo 5?, ¿son generalizables para estrategias mixtas los resultados que obtuvimos para estrategias puras?, ¿tienen interés en este contexto?

Por lo pronto, establecemos algunas proposiciones que resultan técnicamente útiles en las demostraciones y simplifican los cálculos numéricos.

Proposición 5.4.2. a) *Sea $X^* \in M$ un equilibrio de Nash (em) y $\widehat{\sigma}^j \in D_j$ tal que $x^{j*}_{\widehat{\sigma}^j} > 0$. Entonces $E_j\left(X^*\right) = E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right)$.*

b) *Si, para $X \in M$, existe $\widehat{\sigma}^j \in D_j$ tal que $E_j\left(X \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) > E_j\left(X\right)$, entonces existe $\overline{\sigma}^j \in D_j$ tal que $E_j\left(X \left|\overline{\sigma}^j\right.\right) \leq E_j\left(X\right)$ y $x^j_{\overline{\sigma}^j}$ es positivo.*

c) *Supongamos que existen dos estrategias puras del jugador j, $\widehat{\sigma}^j$ y $\overline{\sigma}^j$ tales que $\widehat{\sigma}^j$ domina estrictamente a $\overline{\sigma}^j$. Sea X^* un equilibrio de Nash en estrategias mixtas tal que $X^{j*} = \sum\limits_{\sigma^j\in D_j} x^{j*}_{\sigma^j}\sigma^j$, entonces $x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} = 0$.*

d) *Sean dos estrategias puras del jugador j, $\widehat{\sigma}^j$ y $\overline{\sigma}^j$ tales que $\widehat{\sigma}^j$ domina débilmente a $\overline{\sigma}^j$ y X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, con $X^{j*} = \sum\limits_{\sigma^j\in D_j} x^{j*}_{\sigma^j}\sigma^j$. Si $X^{j**} = \sum\limits_{\sigma^j\in D_j,\ \sigma^j\neq\overline{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j}\sigma^j + x^{j*}_{\overline{\sigma}^j}\widehat{\sigma}^j$, entonces $X^* \left|X^{j**}\right.$ es un equilibrio de Nash (em).*

Demostración. a) Como X^* es un equilibrio de Nash (em),

$$E_j\left(X^*\right) \geq E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right).$$

Supongamos que la desigualdad estricta se cumple, es decir, tendríamos que

$$E_j\left(X^*\right) > E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right)$$

y, por lo tanto, $x^{j*}_{\widehat{\sigma}^j} E_j\left(X^*\right) > x^{j*}_{\widehat{\sigma}^j} E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right)$.

De donde

$$\sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widehat{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} E_j\left(X^*\right) + x^{j*}_{\widehat{\sigma}^j} E_j\left(X^*\right) >$$

$$\sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \widehat{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} E_j\left(X^* \mid \sigma^j\right) + x^{j*}_{\widehat{\sigma}^j} E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right).$$

Pero los dos lados de la desigualdad son iguales a $E_j\left(X^*\right)$. Por lo que la desigualdad es absurda y se cumple que

$$E_j\left(X^*\right) = E_j\left(X^* \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right).$$

b) Supongamos que $X \in M$ y $\widehat{\sigma}^j \in D_j$ son tales que

$$E_j\left(X \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) > E_j\left(X\right).$$

Y que, además, para toda $\sigma^j \in D_j$ tal que $x^j_{\sigma^j}$ es positivo,

$$E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) > E_j\left(X\right).$$

Tenemos que alguna $x^j_{\sigma^j}$, tomando en cuenta a $x^j_{\widehat{\sigma}^j}$, es positiva.

Entonces, para toda $\sigma^j \in D_j$, $x^j_{\sigma^j} E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) \geq x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\right)$ y para algunas la desigualdad es estricta. Así

$$\sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) > \sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X\right).$$

Pero los dos lados de la desigualdad son iguales a $E_j\left(X\right)$. Por lo que, la desigualdad es absurda y existe $\overline{\sigma}^j \in D_j$ tal que $E_j\left(X \left|\overline{\sigma}^j\right.\right) \leq E_j\left(X\right)$ y $x^j_{\overline{\sigma}^j}$ es positivo.

c) Supongamos que existen dos estrategias puras del jugador j, $\widehat{\sigma}^j$ y $\overline{\sigma}^j$ tales que $\widehat{\sigma}^j$ domina estrictamente a $\overline{\sigma}^j$. Sea X^* un equilibrio de Nash en estrategias mixtas y supongamos que $X^{j*} = \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^{j*}_{\sigma^j} \sigma^j$, con $x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} \neq 0$.

Consideremos

$$X^{j**} = \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \overline{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} \sigma^j + x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} \widehat{\sigma}^j.$$

$$E_j\left(X^* \left| X^{j**}\right.\right) = \sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \overline{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) + x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} E_j\left(X \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \overline{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) +$$

$$x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,\ldots,\sigma^{j-1},\sigma^{j+1},\ldots,\sigma^n)\in D_{-j}} x^1_{\sigma^1} \ldots x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} \ldots x^n_{\sigma^n} \varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) >$$

$$\sum_{\sigma^j \in D_j,\ \sigma^j \neq \overline{\sigma}^j} x^{j*}_{\sigma^j} E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right) + x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,\ldots,\sigma^{j-1}\sigma^{j+1},\ldots,\sigma^n)\in D_{-j}} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} \ldots x^n_{\sigma^n} \varphi_j\left(\sigma \left|\overline{\sigma}^j\right.\right)$$

$$= E_j\left(X^*\right).$$

Por lo que X^* no es equilibrio de Nash (em) contrario a lo que habíamos supuesto, entonces $x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} = 0$.

Dejamos al lector la demostración de d). ∎

Proposición 5.4.3. *El perfil de estrategias mixtas X^* es un equilibrio de Nash si y sólo si para toda $j \in N$ y $\sigma^j \in D_j$, $E_j\left(X^*\right) \geq E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right)$.*

Demostración. Por la definición de equilibrio de Nash (em), es claro que si X^* es un equilibrio de Nash (em) se cumple que, para todo jugador j, $E_j\left(X^*\right) \geq E_j\left(X \left|\sigma^j\right.\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$.

Supongamos, ahora, que para cada $j \in N$, $E_j\left(X^*\right) \geq E_j\left(X^* \left|\sigma^j\right.\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$. Sea X^j una estrategia mixta cualquiera en M_j. Entonces

$X^j = \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} \sigma^j$ para algunos $x^j_{\sigma^j}$ tales que $x^j_{\sigma^j} \geq 0$ para toda σ^j y $\sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} = 1$.

Para cada jugador j, $x^j_{\sigma^j} E_j\left(X^*\right) \geq x^j_{\sigma^j} E_j\left(X^* \left|\sigma^j\right.\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$.

Entonces $\sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X^*\right) \geq \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} E_j\left(X^* \left|\sigma^j\right.\right)$.

El lado izquierdo de la desigualdad es igual a $E_j\left(X^*\right)$, mientras que el lado derecho es $E_j\left(X^* \left|X^j\right.\right)$. Por lo tanto, para toda $j \in N$,

$$E_j\left(X^*\right) \geq E_j\left(X^* \left|X^j\right.\right) \text{ para toda } X^j \in M_j.$$

Es decir, X^* es un equilibrio de Nash (em). ∎

De los resultados anteriores (proposiciones 5.4.2 y 5.4.3), obtenemos el hecho de que los juegos que ya podían resolverse en estrategias puras conservan su solución en estrategias mixtas.

Proposición 5.4.4. *Si σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras de un juego rectangular $(N, \{D_j\}, \varphi)$, entonces también es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas del juego.*

Demostración. Para todo jugador j y, para toda $\sigma^j \in D_j$,

$$\varphi_j(\sigma^*) \geq \varphi_j\left(\sigma^* \left| \sigma^j \right.\right).$$

El lado izquierdo de la desigualdad es igual a $E_j(\sigma^*)$ y el lado derecho es $E_j\left(\sigma^* \left| \sigma^j \right.\right)$.

Entonces, para todo jugador j, $E_j(\sigma^*) \geq E_j\left(\sigma^* \left| \sigma^j \right.\right)$, para toda $\sigma^j \in D_j$. Es decir σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ∎

Podemos reexaminar, a la luz de los resultados anteriores, los perfiles de estrategias mixtas con "buenas" estrategias para cada jugador construidos con los algoritmos y procedimientos de la sección 5.3. Obtenemos varios corolarios interesantes que nos arman con algunos métodos para calcular equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Corolario 5.4.5. *Si el algoritmo de juego ficticio tiene éxito obtendrá un equilibrio de Nash (em).*

Demostración. Cuando el algoritmo tiene éxito termina con un perfil de estrategias mixtas $\widehat{X}$, con la propiedad de que, para cada jugador j,

$$E_j\left(\widehat{X}\right) \geq E_j\left(\widehat{X} \left| \sigma^j \right.\right)$$

para toda $\sigma^j \in D_j$. Por lo que $\widehat{X}$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ∎

La siguiente proposición cuya prueba es inmediata, desde los resultados obtenidos, nos sirve para mostrar que otros de los procedimientos de la sección 5.3 nos conducen a equilibrios de Nash (em).

Proposición 5.4.6. *El perfil de estrategias mixtas X^* es un equilibrio de Nash si y sólo si para todo jugador j, X^{j*} es una mejor respuesta mixta de j a X^*.*

Con la correspondencia de mejor respuesta obtenemos el corolario 5.4.7 b) que nos da otra caracterización de los equilibrios de Nash.

Corolario 5.4.7. *X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si y sólo si*

a) *Para toda j, $X^* \in gr\,(L_j)$.*

b) *X^* es un punto fijo de la correspondencia L, es decir, $X^* \in L\,(X^*)$.*

5.4.7 a) garantiza que el método de la cruz gamada encuentra todos los equilibrios de Nash (em) en los juegos 2×2. Para juegos con más jugadores y conjuntos de estrategias más grandes, la intersección de las $gr\,(L_j)$ no es tan fácil de construir. En cuanto a 5.4.7 b), nos dice que el conjunto de equilibrios de Nash de un juego coincide con el conjunto de puntos fijos de la correspondencia L y esta es la base de una de las demostraciones de la existencia del equilibrio de Nash (ver la sección 5.6).

Con respecto a la función de reajuste de Nash, la siguiente proposición es la clave en la demostración más conocida del teorema de existencia de equilibrios de Nash (em) en los juegos finitos.

Proposición 5.4.8. *El perfil X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si y sólo si es un punto fijo de T, es decir, $T\,(X^*) = X^*$.*

Demostración. Supongamos que X^* es un equilibrio de Nash. Tenemos, entonces que $E_j\,(X^*) \geq E_j\left(X^* \middle| \sigma^j\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$. Es decir, para toda $j \in N$ y toda $\sigma^j \in D_j$,

$$c^j_{\sigma^j} = \operatorname*{máx}_{\sigma^j \in D_j} \left\{E_j\left(X^* \middle| \sigma^j\right) - E_j\,(X^*)\,, 0\right\} = 0.$$

$\widehat{X^*} = T\,(X^*)$ es tal que, para toda $j \in N$ y toda $\sigma^j \in D_j$,

$$\widehat{x^{j*}_{\sigma^j}} = \frac{x^{j*}_{\sigma^j} + 0}{1 + 0} = x^{j*}_{\sigma^j}.$$

Es decir, $T\,(X^*) = X^*$.

Supongamos, ahora, que X^* no es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Entonces, por la proposición 5.4.3, existe $\widetilde{\sigma}^j \in D_j$, tal que

$$E_j\left(X^* \middle| \widetilde{\sigma}^j\right) > E_j\,(X^*)\,.$$

La proposición 5.4.2 b) asegura que existe $\overline{\sigma}^j \in D_j$ tal que

$$E_j\left(X^* \middle| \overline{\sigma}^j\right) \leq E_j\,(X^*) \text{ y } x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} > 0.$$

Entonces

$$c^j_{\widetilde{\sigma}^j} = \operatorname*{máx}_{\sigma^j \in D_j} \left\{E_j\left(X^* \middle| \widetilde{\sigma}^j\right) - E_j\,(X^*)\,, 0\right\} = E_j\left(X^* \middle| \widetilde{\sigma}^j\right) - E_j\,(X^*) > 0$$

y

$$c^j_{\overline{\sigma}^j} = \max_{\sigma^j \in D_j} \left\{ E_j \left(X^* \left| \overline{\sigma}^j \right. \right) - E_j \left(X^* \right), 0 \right\} = 0.$$

Por lo que,

$$\widehat{x^{j*}_{\overline{\sigma}^j}} = \frac{x^{j*}_{\overline{\sigma}^j} + 0}{1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j}} \neq x^{j*}_{\overline{\sigma}^j},$$

pues $1 + \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} c^j_{\sigma^j} > 1$.

Es decir, $T(X^*) \neq X^*$. Entonces X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas si y sólo si es un punto fijo de T. ∎

La proposición 5.4.8 caracteriza a los equilibrios de Nash como puntos fijos de T, lo que asegura que si el algoritmo consistente en reajustar una y otra vez las estrategias mixtas de los jugadores con la función T alcanza un punto fijo X^* y, por lo tanto, finaliza, X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Sin embargo, como decíamos en la sección anterior, el algoritmo no necesariamente termina y ni siquiera podemos asegurar que converja por lo que no otorga, como se antojaría por la interpretación concreta de T, un procedimiento general para construir equilibrios.

La función T fue construida por Nash [38, 40] para la demostración del teorema de existencia de equilibrio en estrategias mixtas de un juego finito y, a través de ella, se convierte dicho problema en otro, el de la existencia de puntos fijos de la función T. Ese es su verdadero interés, aunque no nos permita encontrar un equilibrio de Nash.

Nuestro siguiente objetivo será completar el teorema de existencia de equilibrios de Nash y, para ello, y para la obtención de otros resultados, necesitamos estudiar las propiedades geométricas de los conjuntos de estrategias mixtas, de la función de pago esperado, de la función de reajuste de Nash y de la correspondencia L, cosa que haremos en la sección siguiente.

5.5. Geometría de las Estrategias Mixtas

Consideremos un juego rectangular $\left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$. El conjunto de estrategias mixtas M_j del jugador j está contenido en R^{l_j}, donde l_j es el número de estrategias puras del jugador j. Explícitamente

$M_j = \left\{ X \in R^{l_j} \left| x_i \geq 0 \right. \right\} \cap \left\{ X \in R^{l_j} \left| \sum\limits_{i=1}^{l_j} x_i = 1 \right. \right\}$, que es la intersección

del primer ortante de R^{l_j} y del hiperplano de R^{l_j} formado por los puntos cuyas coordenadas suman uno.

Es decir, los conjuntos de estrategias mixtas de los jugadores son los simplejos unitarios sumergidos en R^{l_j}, por lo que tienen propiedades geométricas muy interesantes.

Proposición 5.5.1. *Para todo jugador j, M_j es compacto y convexo. También $M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ es compacto y convexo.*

Demostración. Es conocido que los dos conjuntos que forman a M_j, el primer ortante y el hiperplano, son cerrados, por lo que M_j es cerrado. Además, M_j está contenido en la esfera unitaria de R^{l_j}, por lo que es acotado. Es decir, M_j es un conjunto cerrado y acotado de R^{l_j}, o lo que es lo mismo es compacto.

El producto cartesiano de conjuntos compactos es compacto, por lo tanto, M es compacto.

Supongamos, por otro lado, que $\widetilde{X}^j$ y $\widehat{X}^j$ son dos estrategias mixtas del jugador j.

$\widetilde{X}^j = \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} \widetilde{x}^j_{\sigma^j} \sigma^j$ y $\widehat{X}^j = \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} \widehat{x}^j_{\sigma^j} \sigma^j$. Sea $t \in [0,1]$, entonces

$$t\widetilde{X}^j + (1-t)\,\widehat{X}^j = t\left(\sum_{\sigma^j \in D_j} \widetilde{x}^j_{\sigma^j} \sigma^j\right) + (1-t)\left(\sum_{\sigma^j \in D_j} \widehat{x}^j_{\sigma^j} \sigma^j\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j \in D_j} \left(t\left(\widetilde{x}^j_{\sigma^j}\right) + (1-t)\,\widehat{x}^j_{\sigma^j}\right) \sigma^j.$$

Además, es claro que para toda j y toda σ^j, $\left(t\left(\widetilde{x}^j_{\sigma^j}\right) + (1-t)\,\widehat{x}^j_{\sigma^j}\right) \geq 0$ y

$$\sum_{\sigma^j \in D_j} \left(t\left(\widetilde{x}^j_{\sigma^j}\right) + (1-t)\,\widehat{x}^j_{\sigma^j}\right) =$$

$$t \sum_{\sigma^j \in D_j} \widetilde{x}^j_{\sigma^j} + (1-t) \sum_{\sigma^j \in D_j} \widehat{x}^j_{\sigma^j} = t + (1-t) = 1.$$

Es decir, $t\widetilde{X}^j + (1-t)\ \widehat{X}^j$ es una estrategia mixta de j, por lo que M_j es convexo.

El producto cartesiano de conjuntos convexos es convexo, entonces, M es convexo. ∎

En la figura 5.5.1 se puede observar M_j, para $l_j = 2, 3, 4$.

Las funciones E y E_j son continuas (para toda j), pues son lineales y están definidas en espacios vectoriales de dimensión finita.

Dadas $\widehat{X}^j \in M_j$ y $\overline{X} \in M$, podemos pensar en las funciones

$$E_j\left(\left|\widehat{X}^j\right.\right) : M \to R \text{ y } E_j\left(\overline{X} \mid \quad\right) : M_j \to R,$$

definidas, respectivamente, como

$$E_j\left(\left|\widehat{X}^j\right.\right)(X) = E_j\left(X \left|\widehat{X}^j\right.\right)$$

y

$$E_j\left(\overline{X} \mid \quad\right)\left(X^j\right) = E_j\left(\overline{X} \left|X^j\right.\right).$$

Ambas funciones son continuas, pues son restricciones de las E_j.

Por otro lado, T que es una composición de funciones continuas, también es continua.

La correspondencia de mejor respuesta también tiene propiedades importantes de continuidad y convexidad.

Se dice que la correspondencia ψ es **superiormente semicontinua** si su gráfica, $\{(X,Y)\,|Y \in \psi(X)\}$, es cerrada.

Si una correspondencia es tal que la imagen de cualquier X es convexa, decimos que la correspondenciacorrespondencia es **convexa**.

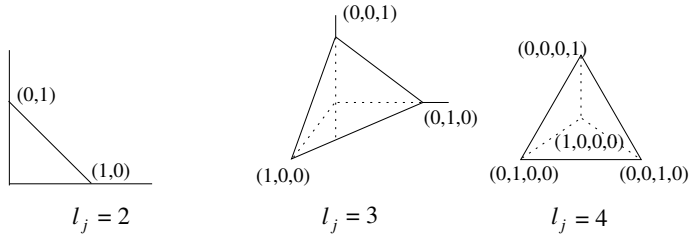

Figura 5.5.1:

Proposición 5.5.2. *La correspondencia L es superiormente semicontinua, convexa y, para toda X en M, $L(X)$ es no vacío.*

Demostración. Sea X en M. Por la continuidad de la función $E_j(X \mid \quad)$, existen mejores respuestas mixtas de j a X, para todo jugador j y, por lo tanto, $L(X)$ no es vacío.

Sean Z_1 y Z_2 en $L(X)$. Entonces, para toda $j \in N$,

$$E_j\left(X \left|Z_1^j\right.\right) = E_j\left(X \left|Z_2^j\right.\right) = \max_{X^j \in M_j} E_j\left(X \left|X^j\right.\right).$$

Consideremos $tZ_1 + (1-t)Z_2$, con $t \in [0,1]$.

$$E_j\left(X \left|\left(tZ_1^j + (1-t)\,Z_2\right)\right.\right) = tE_j\left(X\left|Z_1^j\right.\right) + (1-t)\,E_j\left(X\left|Z_2^j\right.\right) =$$

$$t \operatorname*{máx}_{X^j \in M_j} E_j\left(X\left|X^j\right.\right) + (1-t) \operatorname*{máx}_{X^j \in M_j} E_j\left(X\left|X^j\right.\right) = \operatorname*{máx}_{X^j \in M_j} E_j\left(X\left|X^j\right.\right).$$

Es decir, $tZ_1 + (1-t)Z_2 \in L(X)$, por lo que $L(X)$ es convexo.

Por otro lado, pensemos en una sucesión convergente de puntos de la gráfica de L, $\{(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),...,(X_k,Y_k),...\}$, denotemos como (X,Y) al límite de la sucesión.

Para $i = 1,2,...$, $Y_i \in L(X_i)$, por lo que, para toda $j \in N$,

$$E_j\left(X_i\left|Y_i^j\right.\right) \geq E_j\left(X_i\left|Z^j\right.\right), \forall Z^j \in M_j.$$

Por la continuidad de E_j tenemos que

$$\operatorname*{lím}_{(X_i,Y_i)\to(X,Y)} E_j\left(X_i\left|Y_i^j\right.\right) = E_j\left(X\left|Y^j\right.\right).$$

Entonces, para $i = 1,2,...$ y para toda $Z^j \in M_j$,

$$E_j\left(X\left|Y^j\right.\right) \geq \operatorname*{lím}_{X_i\to X} E_j\left(X_i\left|Z^j\right.\right) = E_j\left(X\left|Z^j\right.\right).$$

Esto quiere decir que $Y \in L(X)$, o dicho en otra forma (X,Y) está en la gráfica de L, por lo que dicha gráfica es cerrada. ∎

Todas estas propiedades de la función de mejor respuesta T, de la correspondencia de mejor respuesta L y del conjunto de perfiles de estrategias mixtas M están vinculadas a la existencia de puntos fijos de T y de L. Como vimos en la sección dichos puntos son los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

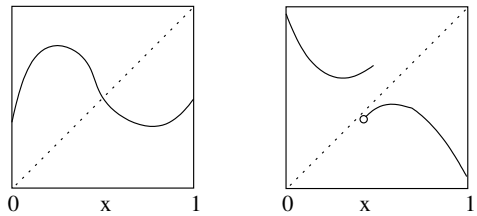

Figura 5.5.2:

Expondremos a continuación los teoremas de punto fijo de Brouwer y de Kakutani y veremos que las propiedades que hemos estudiado garantizan la existencia de equilibrios en estrategias mixtas en los juegos finitos.

Teorema de Punto Fijo de Brouwer *Sea $S \subset R^m$ compacto y convexo y $f\colon S \to S$ continua. Entonces, existe $\widehat{X} \in S$ tal que $f\left(\widehat{X}\right) = \widehat{X}$.*

Para dar una idea intuitiva del teorema, pensémoslo para $m = 1$, entonces S tiene que ser un intervalo cerrado y el teorema de Brouwer se convierte en un conocido teorema del valor intermedio. En las figuras 5.5.2 y 5.5.3, se ilustran gráficas correspondientes a cuatro funciones definidas en S y que toman valores en S, donde $S \subseteq [0, 1]$. La gráfica de la izquierda en 5.5.2 corresponde a una función f continua con S compacto y convexo. Mientras que en la de la derecha el conjunto S también es compacto y convexo, pero f no es continua. Las gráficas de 5.5.3 son de funciones continuas, pero el S de la izquierda no es un conjunto compacto y el de la derecha no es convexo.

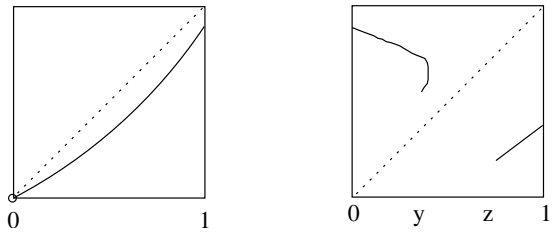

Figura 5.5.3:

Teorema de Punto Fijo de Kakutani. *Sea $S \subset R^m$ compacto y convexo y $\psi\colon S \multimap S$ superiormente semicontinua, convexa y para toda X en S, $\psi(X)$ es no vacío. Entonces, existe $\widehat{X} \in S$ tal que $\widehat{X} \in \psi\left(\widehat{X}\right)$.*

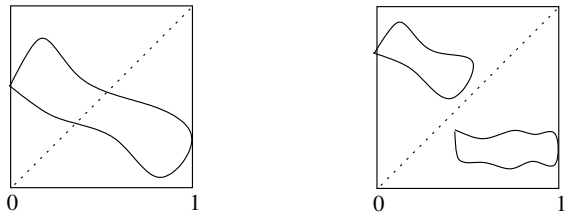

Figura 5.5.4:

El Teorema de Kakutani es una generalización del teorema de Brouwer. En la figura 5.5.4, a la izquierda, se ilustra lo que pasa cuando se cumplen todas las hipótesis y a la derecha cuando la correspondencia no es superiormente semicontinua.

Estamos listos para establecer teoremas de existencia de equilibrios de Nash. Sin embargo, es interesante mencionar que las demostraciones clásicas de los teoremas de punto fijo de Brouwer y de Kakutani no son constructivas. Basándonos en ellas tendremos una demostración de existencia que no permite calcular los equilibrios mismos. Lemke, Scarf y otros autores, cambiaron este panorama. Buscando la construcción de equilibrios de Nash en estrategias mixtas y precios de equilibrio competitivos, encontraron una demostración constructiva, de los dos teoremas de punto fijo, basada en algoritmos de tipo combinatorio. A continuación exponemos brevemente una de las versiones del algoritmo desarrollado por Scarf [46] para encontrar un punto fijo de una función continua.

5.5.1. Un Algoritmo de Scarf para Calcular Puntos Fijos

El surgimiento de los algoritmos para el cálculo de puntos fijos de funciones y correspondencias, a finales de la década de los 60, en la que participaron Scarf y otros autores, se relacionó con la búsqueda de calcular los equilibrios de Nash de juegos rectangulares finitos y precios de equilibrio competitivo. Sin embargo, al lograr calcular puntos fijos de funciones y correspondencias para cualquier contexto teórico en el que se presenten, tienen una aplicación mucho más amplia y fueron desarrollados en varias direcciones.

Hasta antes del desarrollo de estos algoritmos, las demostraciones de los teoremas de punto fijo eran lo que se llama demostraciones de existencia. Por ejemplo, la demostración del teorema de Brouwer basada en un lema combinatorio debido a Sperner. Scarf demostró constructivamente dicho lema y otro más que es una generalización del de Sperner y que utiliza aproximaciones lineales a pedazos a la función dada. Posteriormente se han logrado demostraciones constructivas basadas en otras demostraciones de existencia, tan clásicas como la que utiliza el lema de Sperner. En este trabajo, exponemos sólo las ideas relativas a las aproximaciones lineales a pedazos que recién mencionamos, obteniendo, con ello, demostraciones "constructivas" de los teoremas de Brouwer y de Kakutani y, por lo tanto, métodos generales para calcular puntos fijos, en particular los equilibrios de Nash de un juego rectangular finito.

Volvamos a pensar en una función continua f definida del intervalo $[0, 1]$

en sí mismo, para ilustrar la idea del algoritmo de Scarf (llamado de etiquetación vectorial) en el caso más simple. Los puntos fijos de f corresponden a los puntos de intersección de la diagonal del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ con la gráfica de f. Pensemos en una función continua, por ejemplo aquella cuya gráfica aparece en la figura 5.5.5, en ese caso x es el único punto fijo de f. Supongamos que x es desconocido, el algoritmo pretende acercarse lo más posible a éste y, para ello, considera particiones P_t del intervalo $[0,1]$ en subintervalos cada vez más pequeños. Se construye la sucesión de puntos fijos de las funciones lineales a pedazos f_{P_t}, determinadas por cada P_t. Dicha sucesión converge a x.

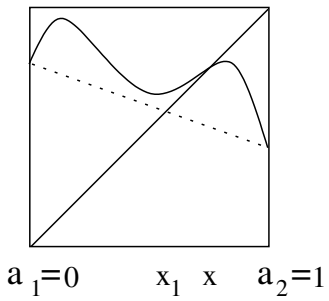

Figura 5.5.5:

Para considerar particiones del intervalo $[0,1]$ que está en la base del cuadrado, repitamos la figura izquierda de 5.5.2 una y otra vez. La primera repetición aparece en la figura 5.5.5. Pensemos que en ella se representa la primera partición (P_0) del intervalo $[0,1]$, la partición trivial, es decir, $\{a_1 = 0, a_2 = 1\}$. Sea f_{P_0}, la función lineal cuya gráfica es la recta l que une los puntos $(a_1, f(a_1))$ y $(a_2, f(a_2))$. Esta es la primera aproximación lineal a pedazos a la función f. Entonces, la primera aproximación al punto fijo de f es x_1 tal que $f_{P_0}(x_1) = x_1$. Este punto x_1 corresponde a la intersección de l con la diagonal del cuadrado.

Consideremos los elementos del conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ como los puntos extremos de la colección de subintervalos de la partición P_1,

$$\{(a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2)\}.$$

La función f_{P_1} es la poligonal, o función "lineal a pedazos" determinada por los puntos $\{a_i\}$, cuya gráfica consiste en los segmentos de recta que unen los puntos $(a_1, f(a_1))$, $(a_3, f(a_3))$, $(a_4, f(a_4))$, $(a_2, f(a_2))$ como en la figura 5.5.6.

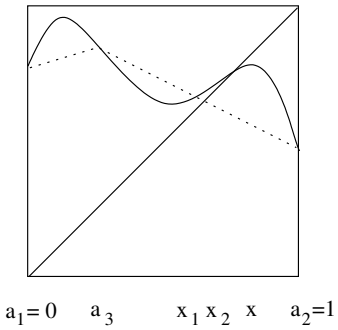

Figura 5.5.6:

La función f_P se irá "pareciendo" a f a medida que la partición P se hace más fina. Además, el punto fijo de f_P, x_P, se irá acercando a x, el punto fijo de f. Tanto x como x_2 pertenecen al subintervalo $[a_3, a_4]$. Si la partición es muy fina, también los puntos extremos de ese subintervalo serán muy cercanos a x. El algoritmo de Scarf trata de ir detectando, en particiones cada vez más finas, esos subintervalos que contienen a los punto fijos de las f_P y a x.

Por supuesto que estas ideas se manejarán en una forma mucho más general, no reducidas a funciones de un intervalo en sí mismo. Dada una función f definida de un subconjunto S, $S \subset R^m$ compacto y convexo, en sí mismo, consideramos una partición de S en conjuntos adecuados, "simplejos", y manejamos la función lineal a pedazos, determinada por dicha partición. Se considerarán particiones de S cada vez más finas, entonces las f_P correspondientes, cada vez se parecerían más y más a la función f, así como sus puntos fijos se irían acercando cada vez más a alguno de los puntos fijos de f.

Antes que nada definiremos a los simplejos en que se partirá el dominio de la función f.

Definición 5.5.3. Si $v_0, v_1, \ldots, v_m$ en R^m son *afinmente independientes*, es decir, si $v_1 - v_0$, $v_2 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ son *vectores linealmente independientes*, entonces al conjunto de todas las combinaciones convexas de esos vectores se le llama el n-simplejo de R^m, con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$.

Si S es un simplejo con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$, una $(m-r)$-cara de S es un simplejo de dimensión $m-r$ ($(m-r)$-simplejo), cuyos $m-r+1$ vértices son un subconjunto de $\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$. Los 1-simplejos son intervalos.

Definición 5.5.4. Una colección finita P de m-simplejos es una triangulación, si cumple:

1. Cada dos m-simplejos son ajenos o se intersectan en una cara común.
2. Cada $m-1$-cara de un m-simplejo de P es a lo mas cara de otro elemento de P.

Diremos que v es un vértice de P, si es un vértice de alguno de los simplejos de P.

Un $(m-r)-$simplejo es una $(m-r)-$cara de P, si lo es de uno de los simplejos de P. Denotaremos como Δ a un simplejo cualquiera en P y como $|P|$ a $\underset{\Delta\in P}{\cup}\Delta$ y diremos que P es una **triangulación** de S, o que P triangula a S, si $|P| = S$. Cuando tenemos una triangulación de S, podemos determinar un sistema de coordenadas para los elementos de S. Así para v en S, consideramos Δ, el $m-$simplejo de P al que pertenece v, o a la cara común de varios elementos de P, si v pertenece a ella. Escribamos a v como combinación lineal de los vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$ de Δ. Los coeficientes de esa combinación se llamarán las **coordenadas baricéntricas de v respecto de P**.

Dada una triangulación P de un $m-$simplejo S, resulta útil construir cierto tipo de triangulaciones $\bar{P}$ de $S\times[0,1]$, tales que las caras de $\bar{P}$ de dimensión m contenidas en $S\times t$, con $t\in[0,1]$ son una partición de S y a medida que t es más cercana a 1, la partición correspondiente es más fina, las caras en $S\times 1$ son de la forma $\sigma\times\{1\}$, con σ en P y, recíprocamente, para cada σ en P, $\sigma\times\{1\}$ es una cara de dimensión m de $\bar{P}$. Además, $S\times\{0\}$ es, también, una cara de dimensión m de $\bar{P}$. Cuando una triangulación $\bar{P}$ de $S\times[0,1]$ tiene las propiedades que acabamos de describir, decimos que está bien relacionada con P. En la figura 5.5.7 se representa el intervalo S, con partición. $P = \{[a_1,a_2],[a_2,a_3],[a_3,a_4],[a_4,a_5],[a_5,a_6],[a_6,a_7],[a_7,a_8],[a_8,a_9]\}$ y una partición $\bar{P}$ de $S\times[0,1]$ bien relacionada con P.

Sea una función continua g de S en R^m, donde S es un $m-$simplejo de R^m y $\{v_0, v_1, ..., v_m\}$ los vértices de S. Sea P una triangulación de S, con vértices $\{v_i\}$. Supongamos que ninguno de los vértices de P es un punto fijo de g y asociemos, a cada v_i, el vector $g(v_i)$.

Construimos g_P, la aproximación lineal a g respecto a P, de la manera siguiente: sea v un vector de S, para alguno de los simplejos de P, llamémosle Δ_v, $v\in\Delta_v$. Si los vértices de Δ_v son $\{w_0, w_1, ..., w_m\}$, entonces $v = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i w_i$, entonces $g_P(v) = \sum_{i=0}^{m}\alpha_i g(w_i)$.

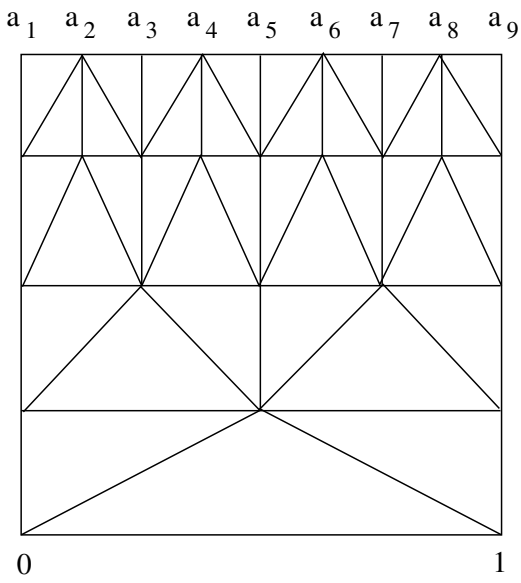

Figura 5.5.7:

Dada una función continua g: $S \to R^m$, donde S es un simplejo de R^m que tiene vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$ y está triangulado por P, decimos que g es regular respecto a P, si g_P no tiene ceros en ninguna cara de P de dimensión menor que m y decimos que g es **propia** si $\overrightarrow{0}$ es una combinación convexa de los vectores $g(u_i)$ para los vértices $m+1$ vértices $\{u_i\}$ de algún $m-$simplejo de P y si S' es una cara de P de dimensión menor que m, con vértices $\{w_0, w_1, .., w_l\}$, entonces $\overrightarrow{0}$ no es una combinación convexa de los vectores $g(w_i)$.

Por otro lado, consideremos que S está triangulado por P, una colección de $m-$simplejos, y g es una función continua de S en R^k, con $k < m$ y sea τ una cara de P de dimensión k con vértices $\{w_0, w_1, .., w_k\}$. Decimos que τ es **regular respecto** a g, o $g-$**regular**, si se cumplen:

1- Existe v tal que $v = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i w_i$ con $\lambda_i > 0$ para toda i, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ y $g_P(v) = \overrightarrow{0}$.

2- Para todo x que esté en una cara de τ de dimensión menor que k, se tiene que $g_P(x) \neq \overrightarrow{0}$.

Nuestro problema es encontrar los puntos fijos de una función continua f definida de S en S, con S un subconjunto compacto y convexo de R^m. Podemos transformar el problema en el de encontrar los ceros de $g = I - f$

(g es una función definida en S y que toma valores en R^m). Para construir un algoritmo relacionado a esa búsqueda, primero construiremos un algoritmo auxiliar que demuestra constructivamente un lema combinatorio tipo Sperner.

Teorema 5.5.5 (Lema de Sperner Vectorial Restringido). *Sea S un simplejo de R^m, con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$, P una triangulación de S, g una función de S en R^m continua, propia y regular respecto a P. Entonces existe en P al menos un m-simplejo regular respecto a g.*

Lema 5.5.6. *Si la función g de S en R^m es continua, regular y propia, respecto a P, entonces cada σ en $\bar{P}$ o tiene dos m-caras regulares respecto a g o no tiene ninguna, donde $\bar{P}$ es una triangulación de $S \times [0,1]$ bien relacionada con P.*

Demostración. Denotamos como g_σ a la función afín que coincide con g_P en σ.

Por la regularidad de g respecto a P, tenemos:

a) $g_\sigma^{-1}(\overrightarrow{0})$ es una recta que atraviesa interiormente una cara τ de dimensión m de σ y

b) dicha recta no puede cortar una cara de dimensión menor.

Entonces cortará interiormente otra cara de σ de dimensión m distinta que τ. ∎

El lema anterior es la clave para el algoritmo que sigue los pasos de la demostración del teorema 5.5.5 que se expone a continuación.

Demostración. Sea S un simplejo de R^m con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$ y P una triangulación de S. Si $g : S \to R^m$ es continua, propia y regular respecto a P, como exige el lema 5.5.6, construimos $\bar{P}$, una triangulación de $S \times [0,1]$, bien relacionada con P. Cada vértice v de $\bar{P}$ es de la forma $(v', 1)$, con $v' \in S$, a v le asociamos el vector $l(v) = g(v')$.

Como g es propia, $\overrightarrow{0} = g_P\left(\sum_{i=0}^{m} \alpha_i v_i\right)$, para algunas $\{\alpha_i\}$ todas positivas. Es decir, $\tau_1 = S \times \{0\}$ es una cara regular respecto a la función l que asocia vectores a cada vértice de P (diremos simplemente que es regular). τ_1 es cara de un solo $(m+1)$-simplejo σ_1 de $\bar{P}$, pues está en la frontera de $S \times [0,1]$. Por el lema 5.5.6, σ_1 tiene otra única cara τ_2 distinta a τ_1 que también es regular. Si τ_2 está en $S \times \{1\}$, $\tau_2 = \tau_2' \times \{1\}$, con τ_2' un m-simplejo regular de P y el algoritmo estaría terminado. Si τ_2 no está en $Sx\{1\}$, existe un único σ_2, $(m+1)$-simplejo de $\bar{P}$, distinto que σ_1 que tiene como cara a τ_2.

Supongamos que tenemos construidos $\{\tau_1, \sigma_1, \tau_2, \sigma_2, \ldots, \tau_k\}$ tal que τ_i es regular. τ_i es cara de σ_{i-1} y de σ_i, para $i = 2, 3, \ldots, k-1$. Por la regularidad de g, si τ_k es distinto de τ_1 y pertenece a la frontera de $S \times [0,1]$, entonces pertenece a $S \times \{1\}$, $\tau_k = \acute{\tau_k} \times \{1\}$, con $\acute{\tau_k}$ un m-simplejo regular de P y el algoritmo estaría terminado. Si τ_k no está en $S \times \{1\}$, existe un único σ_k, $(m+1)$-simplejo de $\bar{P}$, distinto que cada uno de los $m+1-$ simplejos del conjunto $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{k-1}\}$ y que tiene como cara a τ_k. Además, existe τ_{k+1}, una sola $m-$cara de σ_k distinta de τ_k.

El algoritmo termina encontrando un n-simplejo de P regular, respecto a g, en un número finito de pasos ya que P y $\bar{P}$ son finitas y no puede regresar a una cara ya visitada . ∎

En la figura 5.5.8 se pueden observar los pasos del algoritmo.

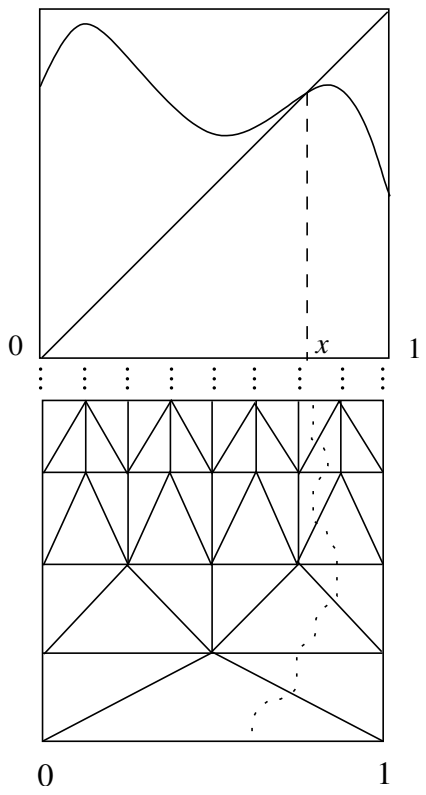

Figura 5.5.8:

El lema de Sperner, teorema 5.5.5, exige que la función g sea continua, regular y propia respecto de una partición de S y que éste sea un m-simplejo,

de ahí su carácter restringido. En relación con el teorema de Brouwer, las peticiones aún son más fuertes, pues las hipótesis de 5.5.5, se deben repetir respecto a una infinidad de particiones, cada vez más finas. Busquemos resolver este problema.

El teorema que sigue nos ayuda a generalizar el lema de Sperner vectorial.

Teorema 5.5.7. *Dadas P una triangulación finita, $g\colon |P| \to R^k$ una función continua y Y una matriz $k \times k$ invertible, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para toda ε en $[0, \varepsilon_0]$, $g - Y\left(\bar{\varepsilon}\right)$ es regular respecto a P, donde $\bar{\varepsilon} = \left(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^k\right)$.*

Demostración. Denotemos como P^l al conjunto de $l-$caras de P.

Sean $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k$ reales distintos, cada dos. Entonces

$$Y\left(\bar{\varepsilon}_1\right) - Y\left(\bar{\varepsilon}_0\right), Y\left(\bar{\varepsilon}_2\right) - Y\left(\bar{\varepsilon}_0\right), ..., Y\left(\bar{\varepsilon}_k\right) - Y\left(\bar{\varepsilon}_0\right)$$

son linealmente independientes. Por lo tanto, solo puede haber un número finito de vectores de la forma $Y(\bar{\varepsilon})$ en $g_P(\left|P^{k-1}\right|)$.

Para definir ε_0 tenemos dos casos:

i) existe v en $\left|P^{k-1}\right|$ tal que $g_P(v) = Y(\bar{\varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$; entonces definimos ε_0 como $min\{\varepsilon \in R \left| Y(\bar{\varepsilon}) \in g_P(\left|P^{k-1}\right|)\right.\}$;

ii) $g_P(v) \neq Y(\bar{\varepsilon})$ para toda $\varepsilon > 0$; entonces ε_0 es cualquier número. ∎

Definición 5.5.8. Si P es una triangulación, $g\colon |P| \to R^k$ una función continua y Y una matriz invertible, se dice que σ en P^k es (ε, Y)-regular respecto a g, si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para toda ε en $(0, \varepsilon_0)$, σ es regular respecto a $g - Y(\bar{\varepsilon})$. Si Y es la matriz identidad, se dice que σ es ε-regular respecto a g.

Definición 5.5.9. Si S es un m-simplejo de R^m con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$ y P es una triangulación de S, decimos que $g\colon P^0 \to R^m$ es una etiquetación de Sperner, si $\{g_P(v_0), g_P(v_1), \ldots, g_P(v_m)\}$ son afinmente independientes y $\overrightarrow{0} = \sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i g_P\left(v_i\right)$, con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum\limits_{i=0}^{m} \alpha_i = 1$.

Enunciamos, sin demostrar, una propiedad combinatoria para los simplejos (ε, Y)-regulares que juega un papel análogo al lema 5.5.6, en la demostración constructiva de un lema de Sperner vectorial más general que 5.5.5.

Lema 5.5.10. *Sea $g\colon S \to R^m$ continua, Y una matriz $m \times m$ invertible y σ en $\bar{P}$ con una cara de dimensión m que es (ε, Y)-regular respecto a la etiquetación de Sperner de $\bar{P}$ que induce g. Entonces σ tiene otra única m-cara distinta que la primera que es (ε, Y)-regular respecto a la etiquetación de $\bar{P}$ inducida por g.*

Teorema 5.5.11 (Lema de Sperner General). *Sea S un m-simplejo con vértices $v_0, v_1, \ldots, v_m$, P una triangulación de S y g una etiquetación de Sperner de P. Entonces existe al menos un elemento de P que es (ε, Y)-regular para alguna Y invertible.*

La demostración se realiza con un algoritmo tipo Scarf que resulta formalmente idéntico que el del lema de Sperner restringido (5.5.6).

Para demostrar, ahora, constructivamente los teoremas de punto fijo (Brouwer y Kakutani), pensémoslos, por el momento, restringidos a un simplejo S. Consideremos una sucesión de triangulaciones, cuyo diámetro tiende a cero y etiquetaciones relacionadas con la función o correspondencia de la que trata el teorema en cuestión. Gracias al lema de Sperner, encontramos una sucesión convergente de simplejos $(\varepsilon - Y)$ regulares que convergen a un punto fijo de la función f (correspondencia).

Para encontrar puntos fijos de una función continua f (correspondencia), resulta útil trabajar con una triangulación de $S \times [0,1]$, al estilo de la figura 5.5.7 que para diversos valores de t en $[0,1]$, cada vez más cercanos a 1, repite una copia de S en $S \times \{t\}$, pero triangulado con una triangulación más fina a medida que t se acerca a 1. Así, los simplejos $(\varepsilon - Y)-$regulares encontrados en esas copias de S son cada vez más pequeños y cada uno de sus puntos es "cercano" a un punto fijo de f. Si del teorema de Brouwer se trata, la etiquetación que se usa es la función $I - f$.

El problema de levantar la restricción de que el dominio de f no sea un simplejo, sino un subconjunto D compacto y convexo de R^m, para algún m, se resuelve encontrando un simplejo que contenga a D y extendiendo la función f a f' definida en todo S, de tal manera que las imágenes de f' estén contenidas en D, asegurando así que los puntos fijos de f' sean los mismos que los de f y que $S - D$ no contenga ningún punto fijo de f'.

La sección siguiente finaliza el capítulo con algunos teoremas de existencia de equilibrios de Nash.

5.6. Existencia de Equilibrios

Teorema 5.6.1 (Teorema de Nash). *Para cada juego rectangular finito* $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi\right)$ *existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Primera demostración (basada en la función de reajuste)

La función de reajuste T es continua en M y este conjunto es compacto y convexo. Por el teorema de Brouwer, T tiene al menos un punto fijo. Pero los puntos fijos de T son equilibrios de Nash en estrategias mixtas del juego $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi\right)$ (proposición **??**). Entonces, todo juego rectangular finito tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. □

Segunda demostración (basada en la correspondencia de mejor respuesta)

La correspondencia de mejor respuesta L es superiormente semicontinua en M y el conjunto imagen de cualquier X es no vacío y convexo (proposición **??**). Como, además, M es compacto y convexo, entonces el teorema de Kakutani nos asegura que L tiene al menos un punto fijo. Pero cada punto fijo de L es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, o sea que en todo juego rectangular finito, existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.□

Teorema 5.6.2. *Un juego rectangular infinito* $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ *tal que los conjuntos* D_j *son compactos y convexos y la función de pago* φ *continua tiene al menos un equilibrio de Nash.*

Las dos demostraciones del teorema 5.6.1 son válidas para el teorema 5.6.2.

Ya sabemos, entonces, que todo juego rectangular finito tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, y algunos juegos rectangulares infinitos tienen equilibrio de Nash. Tenemos, para los primeros, un método general para calcular todos los equilibrios, en el caso de juegos 2×2. Tenemos, además, dos algoritmos, el del juego ficticio y el de la función reajuste, pero éstos no convergen siempre.

El algoritmo debido a Scarf, expuesto al final de la pasada sección, permite calcular un equilibrio de Nash, tanto en el caso de estrategias mixtas, como en el de los juegos infinitos que cumplen las hipótesis de los teoremas de punto fijo. En realidad es un algoritmo para calcular un punto fijo de

una función continua y también sirve para calcular un punto fijo de una correspondencia superiormente semicontinua, resultando demostraciones constructivas de los teoremas de Brouwer y de Kakutani.

5.7. Ejercicios

Ejercicio 5.1. Considere que dos empresas se enfrentan en el ejemplo 1.3.3 c) que se repite a continuación.

$$\begin{array}{r} \\ \textit{re}\,\textit{galar muestras} \\ \textit{publicidad escrita} \\ \textit{publicidad en radio y tv} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{entrar} & \textit{no entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (60,0) \\ (40,-10) & (50,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Considere que la primera empresa ha decidido invertir la mitad de su capital en radio y tv y el resto en partes iguales entre las dos restantes opciones, mientras que la segunda ha decidido invertir en la competencia la tercera parte de su capital. Interprete dichas particiones como estrategias mixtas y calcule el pago esperado para cada empresa. ¿Cuál sería una mejor respuesta pura de cada empresa a dicho perfil? ¿Puede construir otro perfil de estrategias mixtas, en sentido estricto, para el que las mejores respuestas puras sean distintas?

Ejercicio 5.2. Considere que en el México de los años 50 los hombres y las mujeres están enfrentados en el conflicto

$$\begin{array}{r} \\ \text{Pepe el Toro } (P) \\ \text{Re}\,\text{gino Burrón } (R) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{La Borola } (B) & \text{La Chorreada } (Ch) \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-1,-10) & (5,2) \\ (0,5) & (1,4) \end{pmatrix} \end{array}$$

Considere una composición estratégica de la población de tal manera que todas las parejas de estrategias puras tengan probabilidad de ocurrir al elegir al azar a un hombre y a una mujer. Interprete dicha composición estratégica como un perfil de estrategias mixtas y calcule el pago esperado para cada hombre y para cada mujer. ¿Cuál sería una mejor respuesta pura de cada hombre (mujer) a dicho perfil? ¿Puede construir otro perfil de estrategias mixtas, en sentido estricto para el que las mejores respuestas puras sean distintas?

Ejercicio 5.3. a) Considere el juego

$$\begin{pmatrix} (1,2) & (5,-4) & (6,-1) & (3,1) \\ (3,3) & (2,1) & (-1,-5) & (2,10) \\ (0,0) & (0,-2) & (2,-3) & (-1,5) \\ (2,2) & (1,1) & (0,5) & (11,3) \end{pmatrix}$$

y las estrategias mixtas $X^1 = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}\right)$ y $X^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, para los jugadores 1 y 2, respectivamente.

Encuentre el pago esperado para cada jugador correspondiente a X^1 y X^2 y calcule las mejores respuestas puras de cada uno de los jugadores a dichas estrategias.

b) Considere el juego siguiente:

Un comité de tres miembros de un club tiene que elegir repetidamente a un representante de entre una lista de cuatro candidatos ($\{A, B, C, D\}$, en cada ocasión es elegido aquel candidato que obtuvo más votos. Suponiendo que los tres depositan su voto secretamente en una urna y que I prefiere al candidato A, en segundo lugar al B, en tercero al C y, por último, al D, mientras que II prefiere al B, después al C, en tercero al D y al final el A y III prefiere al C, en segundo lugar al D, en tercero al A y al final el B. Correspondiendo a estas preferencias asigne un pago a cada jugador, para cada terna de estrategias puras, en función del candidato elegido y las preferencias de los jugadores.

Si los jugadores I, II y III han estado votando de tal manera que las frecuencias con que han elegido candidatos corresponden a las estrategias mixtas $X^1 = (\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 0)$, $X^2 = (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2})$ y $X^3 = (\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0)$ respectivamente. Calcule los pago esperados y mejores respuestas puras para cada uno de los jugadores a $\left(X^1, X^2, X^3\right)$. ¿Tiene alguno de ellos una mejor respuesta mixta en la que le de probabilidad positiva a más de una estrategia pura?

Ejercicio 5.4. Demuestre los siguientes resultados:

a) Si X^* es un equilibrio de Nash (em) y $x^{*j}_{\widehat{\sigma}^j} > 0$, entonces $\widehat{\sigma}^j$ es una mejor respuesta pura de j a X^*.

b) Suponga que en un juego de n personas hay un cierto perfil X de estrategias mixtas y que, para el jugador j, las estrategias puras $\widehat{\sigma}^j$ y $\overset{-j}{\sigma}$ son mejores respuestas puras de j a X . Demuestre que cualquier estrategia mixta de j de la forma $y\widehat{\sigma}^j + (1-y)\,\overline{\sigma}$, con $y \in [0,1]$, es una mejor respuesta mixta de j a X.

c) Sea $D'_j \subset D_j$ el conjunto de mejores respuestas puras de j al perfil de estrategias mixtas X (D_j finito). Entonces cualquier estrategia de j de

la forma $\sum_{\sigma^j \in D'_j} y_{\sigma^j} \sigma^j$, con $y_{\sigma^j} \geq 0$ y $\sum_{\sigma^j \in D'_j} y_{\sigma^j} = 1$, es una mejor respuesta mixta de j a X.

Ejercicio 5.5. Usando los resultados del problema 5.4 calcule, para los juegos siguientes mejores respuestas mixtas de los jugadores al perfil dado.

a) $\begin{pmatrix} (5,0) & (3,1) \\ (2,2) & (4,0) \end{pmatrix}$, $X = \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)\right)$.

b) $\begin{pmatrix} (-1,-2) & (1,0) & (3,3) \\ (2,-1) & (1,-1) & (1,1) \\ (0,5) & (2,1) & (3,0) \end{pmatrix}$, $X = \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$.

Ejercicio 5.6. Considere el baile de Shapley,

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,1) & (0,0) & (1,2) & (-1,-1) \\ (1,2) & (2,1) & (0,0) & (-1,-1) \\ (0,0) & (1,2) & (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) & (-1,-1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Si el jugador dos ha elegido la estrategia mixta $\widehat{X}^2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ y $\widehat{X}^1$ es cualquier estrategia mixta del jugador 1. ¿Cuál es el conjunto de mejores respuestas mixtas del jugador 1 a $\left(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2\right)$?

Ejercicio 5.7. Utilizando el método de la cruz gamada, encuentre todos los equilibrios de Nash (em) de los juegos siguientes

a) $\begin{pmatrix} (1,5) & (3,0) \\ (2,4) & (7,-1) \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} (3,3) & (2,-1) \\ (-1,2) & (5,5) \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} (5,5) & (1,6) \\ (6,1) & (-1,-1) \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} (3,-3) & (2,-2) \\ (1,-1) & (5,-5) \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} (-1,-3) & (9,-2) \\ (2,2) & (9,4) \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5.8. Realice 5 pasos del algoritmo de juego ficticio para:

a) el juego del ejercicio 5.7 b), empezando con el perfil de estrategias puras $(1,2)$. Compare las estrategias mixtas de los dos jugadores correspondientes a las frecuencia obtenidas después de los 5 pasos con los equilibrios de Nash obtenidos con el método de la cruz gamada.

b) el juego del ejercicio 5.7 c), empezando con el perfil de estrategias puras $(2,2)$. Compare las estrategias mixtas de los dos jugadores correspondientes a las frecuencia obtenidas después de los 5 pasos con los equilibrios de Nash obtenidos con el método de la cruz gamada.

c) el juego del ejercicio 5.7 d), empezando con el perfil $(1,1)$. Compare las estrategias mixtas de los dos jugadores correspondientes a las frecuencia obtenidas después de los 5 pasos con el único equilibrio de Nash obtenido con el método de la cruz gamada.

Ejercicio 5.9. Realice lo mismo que en 5.8, pero utilizando la función de reajuste de Nash.

Ejercicio 5.10. El duopolio de Bertrand. Dos empresas controlan el mercado de un bien. Las empresas 1 y 2 eligen el precio p_1y p_2, respectivamente, al que venderán cada unidad del bien.

La cantidad demandada a la empresa i por los consumidores es

$q_i(p_1, p_2) = a - p_i + bp_j$.

$0 < b < 2$. c es el coste unitario, $0 < c < a$. La ganancia de la empresa j es $\varphi_j(p_1, p_2) = q_j(p_1, p_2)(p_j - c)$.

¿Cuál es la curva de reacción para cada empresa? ¿Cuál es la intersección de las dos curvas?

Demuestre que cada punto de la intersección de las curvas de reacción es un equilibrio de Nash del juego.

Ejercicio 5.11. Considere el modelo de Cournot para n empresas y suponga que $p = d - \sum_{i=1}^{n} q_i$ es el precio que hace que la oferta sea igual a la demanda.

La función de ganancia para la empresa E_j es

$$\varphi_j(q_1, q_2, ..., q_n) = q_j(p - c),$$

con c, el costo unitario, igual para cada empresa. Encuentre los puntos fijos de la correspondencia de mejores respuestas.

Demuestre que esos puntos fijos son equilibrios de Cournot-Nash del juego.

Ejercicio 5.12. En el juego de los artesanos con 3 jugadores $D_1 = D_2 = D_3 = \{O_1, O_2, O_3\}$ y para toda $j \in N$, $\varphi_j(\sigma) = \frac{d_s}{k_s}$, donde k_s es el número de artesanos que escogieron Os y $d_1 = 1000$, $d_2 = 750$ y $d_3 = 500$. Si los artesanos decidieron en el mes de noviembre no emplear todos los días del mes en la misma actividad y el primero trabajó 10 días en cada actividad, el segundo 25 días en la segunda y 5 días en la tercera, mientras que el tercero tres semanas en O_1 y el resto del mes en O_3.

¿Cuáles serían las estrategias mixtas de cada uno de los jugadores que expresen la frecuencia con que escogieron actividades?

a) Si los artesanos utilizan el método de juego ficticio a partir del primero de diciembre, partiendo de la estrategia mixta de frecuencias obtenida en noviembre ¿Cuáles son sus actividades en los primeros 5 días de diciembre?

b) Lo análogo, pero ahora considere que los artesanos utilizan la función de reajuste de Nash.

c) Conjeture cuáles serán en un equilibrio los pagos de los jugadores ¿se puede apreciar esto como una tendencia en los cálculos anteriores?

Ejercicio 5.13. Con los algoritmos de juego ficticio y de la función de Nash estudie los siguientes juegos (realice 5 pasos para cada juego y para cada algoritmo) :

a) Cinco inversionistas tienen que decidir entre si sacan su dinero de un país o lo mantienen invertido en éste. La ganancia de un inversionista que decide sacar su dinero (S), independientemente de lo que decidan los demás, será igual a cero, la de un inversionista que decida invertir (I), mientras que la mayoría también invierte, será igual a uno, pero el que invierte, mientras que la mayoría no invierte, tendrá pérdidas de 10.

Inicie el algoritmo de juego ficticio con el perfil de estrategias puras (S, S, S, I, I) y el de "reajuste con el perfil de estrategias mixtas consistente en que cada jugador escoge la estrategia mixta (1/5, 4/5).

b) Tres jugadores tienen que escoger en que ventanilla se forman ya sea en la C_1, en la C_2 o en la C_3, en la primera hay 300 pesos, en la segunda 200 y en la tercera 175. El dinero que hay en una ventanilla se reparte entre todos los que se hayan formado en ella.

Ejercicio 5.14. En cualquier juego de ventanillas simétrico, considere un perfil de estrategias mixtas tal que le dé el mismo pago a todos los jugadores, de tal manera que se reparten entre todos la ganancia total existente. ¿Es necesariamente un equilibrio de Nash (em) ese perfil?

Ejercicio 5.15. Demuestre la afirmación d) de la proposición 5.4.2.

Ejercicio 5.16. Supongamos que, en un juego rectangular finito, σ^* y σ^{**} son equilibrios de Nash en estrategias puras. Sea $\sigma^{***} = x\sigma^* + (1-x)\,\sigma^{**}$, con $x \in [0,1]$ ¿Es σ^{***} un equilibrio de Nash en estrategias mixtas? ¿Por qué?

Ejercicio 5.17. Conteste si cada una de las afirmaciones siguientes es falsa o verdadera y demuestre que su respuesta es correcta.

a) Un juego rectangular finito siempre tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.

b) Un juego rectangular infinito nunca tiene equilibrios de Nash en estrategias puras.

c) Si, en el algoritmo de reajuste de Nash, se ha llegado a un perfil X^*, para el que todos los números $c^j_{\sigma^j}$ son cero, X^* es un equilibrio de Nash del juego.

Ejercicio 5.18. Un problema de opción múltiple.

Elija la respuesta correcta y justifique por qué lo es.

a) Si en un juego de dos personas las parejas $(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \overline{X}^2)$ son equilibrios de Nash en estrategias mixtas, entonces también lo son $(\widehat{X}^1, \overline{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \widehat{X}^2)$.

b) Si en un juego de dos personas las parejas $(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \overline{X}^2)$ son equilibrios de Nash en estrategias mixtas, entonces $(\widehat{X}^1, \overline{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \widehat{X}^2)$ nunca son equilibrios.

c) Si en un juego de dos personas las parejas $(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \overline{X}^2)$ son equilibrios de Nash en estrategias mixtas, a veces $(\widehat{X}^1, \overline{X}^2)$ y $(\overline{X}^1, \widehat{X}^2)$ también lo son y a veces no lo son.

Ejercicio 5.19. Demuestre que si el jugador i tiene dos estrategias puras $\widehat{\sigma}^i$ y $\sigma'^{\,i}$ tales que $\varphi_i(\sigma \,|\, \sigma'^{\,i}) \geq \varphi_i(\sigma \,|\, \widehat{\sigma}^i)$ para toda $\sigma \in D$, con la desigualdad estricta para alguna $\overline{\sigma}$, entonces no puede existir un equilibrio de Nash (em) X^* tal que el jugador $x^{*\,i}_{\widehat{\sigma}^i} > 0$.

Utilice esta propiedad para encontrar todos los equilibrios de Nash (em) del juego

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{entrar} & \text{no entrar} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{regalar muestras} \\ \text{publicidad escrita} \\ \text{publicidad en radio y tv} \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (35, 25) & (80, 0) \\ (30, 10) & (60, 0) \\ (40, -10) & (50, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Ejercicio 5.20. Suponga un juego n-personal simétrico, donde cada jugador tiene como conjunto de estrategias a $\{1, 2\}$ y sea $x \in (0, 1)$ tal que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \left(\varphi_j \left(s_k \mid 1\right)\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \left(\varphi_j (s_k \mid 2)\right),$$

donde $\varphi_j (s_k \mid 1)$ significa el pago para el jugador j en una partida en que s_k personas, distintas que j, y j mismo eligieron la estrategia 1, mientras que $n-1-s_k$ eligieron la estrategia 2. $\varphi_j (s_k \mid 1)$ tiene un significado semejante, con j eligiendo la estrategia 2.

Demuestre que el perfil en estrategias mixtas donde cada jugador elige la estrategia mixta $(x, 1-x)$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Capítulo 6

Comportamiento Conservador

6.1. Discusión del Problema

Un jugador también puede comportarse en forma conservadora en estrategias mixtas. Es decir, tiene la opción de considerar que todos los demás jugadores están unificados en su contra, como si se tratara de un juego bipersonal de suma cero. Las estrategias conservadoras mixtas del jugador j son aquellas que le permiten ganar lo máximo posible, cuando se basan sólo en sus propias fuerzas, sin esperar apoyo de nadie más. A dicha máxima ganancia se le llama el máximo asegurable y es un marco de referencia que le permitirá decidir si es conveniente abandonar su "actuar solitario" para aceptar un pacto propuesto por otros jugadores.

Para algunos juegos, la actitud conservadora, de no confiar más que en sí mismo, no es propia de un paranoico, sino que significa actuar en forma óptima. Desde luego, entre estos juegos están los bipersonales de suma cero, pero existen muchos otros, y en este capítulo trataremos de caracterizarlos. Para dichos juegos, los perfiles de estrategias mixtas conservadoras guardan una estrecha relación con los equilibrios de Nash.

Como discutimos en el capítulo 1, cada jugador j puede imaginar que está involucrado en el juego bipersonal de suma cero que consiste en que él mismo es uno de los jugadores y el otro es un equipo formado por todos los demás.

Trabajaremos con conceptos, resultados y demostraciones formalmente análogos a los que aparecieron en las secciones 1.4 y 1.5, aunque, por supuesto, generalizados y con resultados más fuertes. De ahí, el interés en abordar la

problemática.

Para precisar las cosas, recordemos lo que hicimos en el capítulo 1. Pensemos que $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es el conflicto en el que un conjunto de jugadores está involucrado, y que cada jugador construye el juego siguiente:

$$\Gamma^j = (\{j, N - \{j\}\}, \{D_j, D_{-j}\}, \widetilde{\varphi}), \text{ donde}$$

$$D_{-j} = D_1 \times D_2 \times ... \times D_{j-1} \times D_{j+1} \times ... \times D_n.$$

Sea $\sigma^{-j} = \left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^{j-1}, \sigma^{j+1}, ..., \sigma^n\right)$, entonces
$\widetilde{\varphi}_j\left(\sigma^j, \sigma^{-j}\right) = \varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^{j-1}, \sigma^j, \sigma^{j+1}, ..., \sigma^n\right)$ y
$\widetilde{\varphi}_{-j}\left(\sigma^j, \sigma^{-j}\right) = -\varphi_j\left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^{j-1}, \sigma^j, \sigma^{j+1}, ..., \sigma^n\right)$.

También, la siguiente notación es útil para el caso de las estrategias mixtas.

$M_{-j} = M_1 \times M_2 \times ...M_{j-1} \times M_{j+1} \times ... \times M_n$,

$X^{-j} = \left(X^1, X^2, ..., X^{j-1}, X^{j+1}, ..., X^n\right)$,

$\widetilde{E}_j\left(X^j, X^{-j}\right) = E_j\left(X^1, X^2, ..., X^{j-1}, X^j, X^{j+1}, ..., X^n\right)$ y

$\widetilde{E}_{-j}\left(X^j, X^{-j}\right) = -E_j\left(X^1, X^2, ..., X^{j-1}, X^j, X^{j+1}, ..., X^n\right)$.

Por otro lado, al enfrentarnos, ahora, a conjuntos infinitos de estrategias, ya no resulta inmediato asegurar la existencia y validez de los conceptos, resultados y demostraciones de las secciones mencionadas del primer capítulo, sino que se requiere una matemática más compleja.

La estructura del capítulo es la siguiente: En la sección 6.2, definimos el máximo asegurable para cada jugador en estrategias mixtas y las estrategias mixtas conservadoras. En la sección 6.3, caracterizamos a los juegos en los que hay antagonismo entre los participantes, en el marco de las estrategias mixtas, y estudiamos la relación entre los perfiles de estrategias conservadoras y los equilibrios de Nash, en este tipo de juegos. Por último, en la sección 6.4 estudiamos algunos métodos para calcular las estrategias mixtas conservadoras y el máximo asegurable (em) en juegos rectangulares finitos.

6.2. Estrategias Mixtas Conservadoras

Generalizaremos a estrategias mixtas las definiciones y resultados que se obtuvieron para estrategias puras en las secciones 1.4 y 1.5 del capítulo 1. En primer lugar, encontraremos cuál es el "mejor"pago que un jugador puede obtener por sus propias fuerzas en este contexto.

Definición 6.2.1. El número real a es asegurable en estrategias mixtas (em) para el jugador j, si existe $\widehat{X}^j \in M_j$, tal que $E_j\left(X \middle| \widehat{X}^j\right) \geq a$ para toda $X \in M$.

Para empezar a entender la diferencia que hay entre lo que ocurre en estrategias mixtas y lo que ocurre en estrategias puras, observemos el juego del volado. Recordemos su matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{águila} & \textit{sol} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{águila} \\ \textit{sol} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

En el capítulo 1, pudimos saber que ambos jugadores, I y II, tenían como máximo asegurable, en estrategias puras, un pago de -1. Esto cambia en estrategias mixtas. Si los jugadores I y II escogen las estrategias mixtas $(x, 1-x)$ y $(y, 1-y)$, respectivamente, el pago esperado para el jugador I será $-4xy + 2x + 2y - 1$. Por lo que si eligiera $\widehat{x} \in (0,1)$, la ganancia más pequeña posible que obtendría I es:

$$\min_y \{-4\widehat{x}y + 2\widehat{x} + 2y - 1\} = \begin{cases} 0 > -1 & \text{si } \widehat{x} = \frac{1}{2} \\ 2\widehat{x} - 1 > -1 & \text{si } 0 < \widehat{x} < \frac{1}{2} \\ -2\widehat{x} + 1 > -1 & \text{si } \frac{1}{2} < \widehat{x} < 1 \end{cases}$$

Es decir, en estrategias mixtas, en sentido estricto, el jugador I siempre obtiene un pago esperado mayor que -1, el máximo que aseguraba en estrategias puras, para cualquier $x \in (0,1)$.

En el ejemplo 1.3.2 c), ocurre algo similar,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{cortés} & \textit{descortés} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{cortés} \\ \textit{descortés} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}$$

En estrategias puras, lo máximo que puede asegurar el jugador I es -1. Con estrategias mixtas, este jugador puede asegurar cantidades mayores. En este caso, no basta que x, la probabilidad con que el jugador I elige ser cortés, esté en el intervalo abierto $(0,1)$, para que asegure un pago esperado mayor que -1, pero si x está en $\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{8}\right]$, el jugador I asegurará un pago esperado mayor que -1.

Sea $\left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$ un juego rectangular finito cualquiera y consideremos $\widetilde{A}_j$, el conjunto de todas las cantidades asegurables para el jugador j en estrategias mixtas. Recordemos que en el capítulo 1, al conjunto de las

cantidades asegurables para el jugador j en estrategias puras, lo denotamos como $\widetilde{A'_j}$. Queremos ver si, también, se puede hablar del máximo de $\widetilde{A_j}$. Por lo pronto, como en la sección 1.4, podremos asegurar la existencia de su supremo.

Proposición 6.2.2. *Existe el supremo de $\widetilde{A}_j$.*

Demostración. $\widetilde{A}_j$ no es vacío, pues $\widetilde{A'_j} \subset \widetilde{A}_j$ ya que, si $a \in \widetilde{A'_j}$, existe $\widehat{\sigma}^j$ tal que $\varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq a$, para toda $\sigma \in D$.

Sea $X \in M$, $X = \left(X^1, X^2, ..., X^n\right)$, con $X^k = \sum\limits_{\sigma^j \in D_j} x^k_{\sigma^j} \sigma^j$. Para toda $\sigma \in D$, $\sigma = \left(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n\right)$,

$$x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} a$$

y

$$\sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} a$$

$$\sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} a = a \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} = a.$$

Pero, $\sum\limits_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j\left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) = E_j\left(X \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right)$.

Por lo que, para toda $X \in M$, $E_j\left(X \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right) \geq a$, o lo que es lo mismo, $a \in \widetilde{A}_j$ y $\widetilde{A'_j} \subset \widetilde{A}_j$. Es decir, $\widetilde{A}_j \neq \varnothing$.

Por otro lado, recordemos que Max_j denota a $\operatorname*{máx}\limits_{\sigma \in D} \varphi_j(\sigma)$ que es una cota superior de $\widetilde{A'_j}$. También Max_j es una cota superior de $\widetilde{A}_j$, pues si $a \in \widetilde{A}_j$, existe $\widehat{X}^j$ tal que $E_j\left(X \left|\widehat{X}^j\right.\right) \geq a$. Entonces,

$$E_j\left(X \left|\widehat{X}^j\right.\right) = \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... \widehat{x}^j_{\sigma^j} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j(\sigma) \leq \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... \widehat{x}^j_{\sigma^j} ... x^n_{\sigma^n} Max_j$$

$$= Max_j \geq a$$

Es decir, $\widetilde{A}_j$ es un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, por lo que existe el supremo de $\widetilde{A}_j$. ∎

Denotemos como v_j al supremo de $\widetilde{A}_j$.

Por otro lado, podemos seguir el enfoque en el cual los jugadores miden la bondad de sus estrategias por el riesgo que corren al elegirlas. Es decir,

comparando los peores pagos esperados que se pueden obtener con cada una de ellas y, entonces, buscar el mejor de todos esos malos pagos posibles. Esta es la famosa idea del maxmin que trabajamos para las estrategias puras en el capítulo 1 y que ahora extendemos para las estrategias mixtas. Veamos antes que este maxmin se puede definir, también para las estrategias mixtas.

Como habíamos visto en la sección 5.5, las funciones E y E_j (para toda j) son continuas. Dada $\overline{X} \in M$, las funciones $E_j\left(\overline{X} \mid \ \right) : M_j \to R$ definidas como

$$E_j\left(\overline{X} \mid \ \right)\left(X^j\right) = E_j\left(\overline{X} \ \middle| X^j\right)$$

son también continuas, pues son restricciones de las E_j. Además, los conjuntos M_j son compactos, así que todas las funciones mencionadas alcanzan sus respectivos mínimos. Podemos entonces considerar, para cada jugador j, las funciones de valor real h_j, con dominio en M_j, definidas como

$$h_j\left(\widetilde{X}^j\right) = \min_{X \in M} E_j\left(X \ \middle| \widetilde{X}^j\right).$$

En otras palabras, para cada estrategia mixta $\widetilde{X}^j$ del jugador j, existe el peor pago posible que puede obtener el jugador al usarla.

Ahora nos interesa la existencia de estrategias de j que le aseguren el mejor de los peores pagos. Por ello, nos ocupamos de la continuidad de h_j.

Proposición 6.2.3. *Las funciones h_j son continuas en M_j.*

Demostración. Sabemos que E_j es una función continua definida en el compacto M, así que es uniformemente continua.

Dada $\varepsilon > 0$, sea δ_ε el tamaño de la vecindad correspondiente a la continuidad uniforme de E_j. Sean Y^{j1} y Y^{j2} dos estrategias mixtas de j tales que $\left\|Y^{j1} - Y^{j2}\right\| < \delta_\varepsilon$, entonces para cada $X \in M$, $\left\|\left(X \left|Y^{j1}\right.\right) - \left(X \left|Y^{j2}\right.\right)\right\| < \delta_\varepsilon$, por lo que para cada $X \in M$, $\left\|E_j\left(X \ \middle| Y^{j1}\right) - E_j\left(X \ \middle| Y^{j2}\right)\right\| < \varepsilon$.

Asimismo, para cada $X \in M$,

$$\left\|E_j\left(X \ \middle| Y^{j1}\right)\right\| - \varepsilon < \left\|E_j\left(X \ \middle| Y^{j2}\right)\right\| < \left\|E_j\left(X \ \middle| Y^{j1}\right)\right\| + \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\left\|\min_{X \in M} E_j\left(X \ \middle| Y^{j1}\right)\right\| - \varepsilon < \left\|\min_{X \in M} E_j\left(X \ \middle| Y^{j2}\right)\right\| < \left\|\min_{X \in M} E_j\left(X \ \middle| Y^{j1}\right)\right\| + \varepsilon.$$

O lo que es lo mismo, dada $\varepsilon > 0$, existe δ_ε, tal que si $\left\|Y^{j1} - Y^{j2}\right\| < \delta_\varepsilon$, entonces $\left\|h_j\left(Y^{j1}\right) - h_j\left(Y^{j2}\right)\right\| < \varepsilon$, es decir h_j es continua en M_j. ∎

Tenemos, entonces, el siguiente corolario:

Corolario 6.2.4. *En cualquier juego rectangular finito, para $j \in N$, existe* $\max\limits_{X^j \in M_j} \left(h_j\left(X^j\right)\right)$.

Si X^{*j} es tal que $\max\limits_{X^j \in M_j} h_j\left(X^j\right) = h_j\left(X^{*j}\right)$, j logra alcanzar "de los males el menos" en X^{*j}.

El valor $\max\limits_{X^j \in M_j} h_j\left(X^j\right)$ se denota como $\max\limits_{X^j \in M_j}\left(\min\limits_{X \in M} E_j\left(X \left| X^j\right.\right)\right)$ o bien como $\max\limits_{X^j \in M_j} \min\limits_{X \in M} E_j\left(X \left| X^j\right.\right)$, lo que, en el folklore, se conoce con el nombre de maxmin en estrategias mixtas.

De nuevo, como en estrategias puras, tenemos que estas dos formas conservadoras de actuar, la del supremo del conjunto de las cantidades asegurables en estrategias mixtas y la del maxmin en estrategias mixtas conducen a lo mismo, es decir,

Proposición 6.2.5. $v_j = \max\limits_{X^j \in M_j}\left(\min\limits_{X \in M} E_j\left(X \left| X^j\right.\right)\right)$.

La demostración es formalmente idéntica a la proposición análoga para estrategias puras (1.4.3) y, en ella, se hace ver que cada jugador j tiene al menos una estrategia mixta que le garantiza un pago esperado al menos de

$$v_j = \max_{X^j \in M_j}\left(\min_{X \in M} E_j\left(X \left| X^j\right.\right)\right),$$

independientemente de lo que elijan los demás jugadores.

Diremos que v_j es **el máximo asegurable para j en estrategias mixtas** y que las **estrategias mixtas conservadoras de** j son aquellas que le garantizan un pago esperado al menos de v_j.

Dado un juego rectangular $\Gamma = \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$, denotamos como $C_j(\Gamma)$ al conjunto de estrategias mixtas conservadoras del jugador j. El conjunto $C_j(\Gamma)$ no es vacío.

Proposición 6.2.6. *Dado un juego rectangular $\Gamma = \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$, $C_j(\Gamma)$ es compacto y convexo.*

Demostración. Es claro que $C_j(\Gamma)$ es un conjunto acotado, pues está contenido en M_j que es acotado.

Consideremos una sucesión $\left(X^{\ j\ (1)}, X^{\ \ j(2)}, .., X^{\ j\ (k)}, ...\right)$, tal que converge a X^{j*}, con $X^{\ j\ (i)} \in C_j(\Gamma)$ para todo i.

Como E_j es continua, $\lim_{i\to\infty} E_j\left(X\left|X^{j\ (i)}\right.\right) = E_j\left(X\left|X^{j*}\right.\right)$.

Para todo $i = 1, 2, ...$y todo perfil X, $E_j\left(X\left|X^{j\ (i)}\right.\right) \geq v_j$, de modo que

$$\lim_{i\to\infty} E_j\left(X\left|X^{j\ (i)}\right.\right) \geq v_j.$$

Es decir, para todo $X \in M$, $E_j\left(X\left|X^{j*}\right.\right) \geq v_j$, por lo que $X^{j*} \in C_j(\Gamma)$. Es decir, $C_j(\Gamma)$ es cerrado, por lo tanto, es compacto.

Supongamos, ahora, que $\widehat{X}^j$ y $\overset{-j}{X}$ son estrategias mixtas conservadoras del jugador j y que $t \in [0,1]$. Consideramos $t\widehat{X}^j + (1-t)\overset{-j}{X}$.

Para todo $X \in M$,

$$E_j\left(X\left|t\widehat{X}^j + (1-t)\overset{-j}{X}\right.\right) =$$

$$tE_j\left(X\left|\widehat{X}^j\right.\right) + (1-t)\,E_j\left(X\left|\overset{-j}{X}\right.\right) \geq tv_j + (1-t)\,v_j = v_j.$$

Es decir, $t\widehat{X}^j + (1-t)\overset{-j}{X} \in C_j(\Gamma)$. O sea $C_j(\Gamma)$ es convexo. ∎

También podemos generalizar a estrategias mixtas la proposición 1.4.4. para establecer que, en los equilibrios de Nash en estrategias mixtas, los jugadores tienen un pago esperado al menos de v_j. La demostración es inmediata e idéntica a la de 1.4.4.

Proposición 6.2.7. *Si X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, entonces $E_j(X^*) \geq v_j$.*

En lo relativo al cálculo del máximo asegurable de un jugador j, un problema al que es frecuente enfrentarse es el gran tamaño de muchos juegos. Estudiamos, en el capítulo 1, que los jugadores se pueden deshacer de sus estrategias dominadas para calcular su máximo asegurable en un juego más pequeño que el original. En el caso de las estrategias mixtas, resulta mucho más fastidioso el trabajo con juegos grandes y, por ello, resulta útil generalizar el resultado y lo hacemos con la proposición siguiente.

Proposición 6.2.8. *En cualquier juego $\Gamma = (N, \{D_1, D_2, ..., D_n\}, \varphi)$:*

a) Si $\widehat{\sigma}^j$ está dominada por $\overset{-j}{\sigma}$, entonces el máximo asegurable(em) y las estrategias conservadoras(em) para j en Γ son los mismos que en

$$(N, \left\{D_1, D_2, ..., D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\}, ..., D_n\right\}, \varphi\left|\bar{D}\right.),$$

donde $\bar{D} = D_1 \times D_2 \times ... \times D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\} \times ... \times D_n$.

b) Consideremos el juego

$$\Gamma^j \ = (\{j, N - \{j\}\}, \{D_j, D_{-j}\}, \left\{\varphi_j, \varphi_{-j} = -\varphi_j\right\}),$$

si $\overset{\circ}{\sigma}^{-j}$ *domina a* $\overset{\circ}{\sigma}^{\circ -j}$, *ambas en* D_{-j}, *entonces el máximo asegurable y las estrategias conservadoras para* j *son los mismos en* Γ *que en*

$$(\{j, N - \{j\}\}, \{D_j, D_{-j} - \left\{\overset{\circ}{\sigma}^{\circ -j}\right\}\}, \left\{\varphi_j \left|\bar{D}\right. , -\varphi_j \left|\bar{D}\right.\right\}),$$

con $\bar{D} = D_j \times \left(D_{-j} - \left\{\overset{\circ}{\sigma}^{\circ -j}\right\}\right)$.

Demostración. a) $\varphi_j \left(\sigma \left|\overset{-j}{\sigma}\right.\right) \geq \varphi_j \left(\sigma \left|\widehat{\sigma}^j\right.\right)$ para toda $\sigma \in D$.

Sea $D_{-j} = D_1 \times ... \times D_{j-1} \times D_{j+1} \times ... \times D_n$.

Entonces, para toda $X \in M$,

$$\sum_{\sigma \in D_{-j}} x^1_{\sigma^1} ... x^n_{\sigma^n} \left(\sum_{\sigma^j \in D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\}} x^j_{\sigma^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right) + x^j_{\widehat{\sigma}^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\overset{-j}{\sigma}\right.\right) \right)$$

$$\geq \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^j_{\sigma^j} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right).$$

Por lo tanto, tenemos que para toda $X^j \in M_j$,

$$\min_{X \in M_{-j}} \sum_{\sigma \in D_{-j}} x^1_{\sigma^1} ... x^n_{\sigma^n} \left(\sum_{\sigma^j \in D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\}} x^j_{\sigma^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right) + x^j_{\widehat{\sigma}^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\overset{-j}{\sigma}\right.\right) \right) \geq$$

$$\min_{X \in M} \sum_{\sigma \in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^j_{\sigma^j} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right).$$

Entonces el máximo sobre las $X^j \in M_j$ de

$$\left(\min_{X \in M} \sum_{\sigma \in D-j} x^1_{\sigma^1} ... x^n_{\sigma^n} \left(\sum_{\sigma^j \in D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\}} x^j_{\sigma^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right) + x^j_{\widehat{\sigma}^j} \varphi_j \left(\sigma \left|\overset{-j}{\sigma}\right.\right) \right) \right)$$

es mayor o igual que el máximo sobre las $X^j \in M_j$ de

$$\min_{X \in M} \sum_{\sigma \in D_1 \times D_2 \times ..... \times D_n} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^{j-1}_{\sigma^{j-1}} x^j_{\sigma^j} x^{j+1}_{\sigma^{j+1}} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j \left(\sigma \left|\sigma^j\right.\right).$$

La desigualdad contraria es evidente, por lo que hemos llegado a que el máximo asegurable en estrategias mixtas para el jugador j y las estrategias conservadoras en el juego original son las mismas que en el juego que resulta de eliminar las estrategias puras combinadas de los jugadores restantes. La demostración del inciso b es análoga. ∎

A continuación, con el propósito de simplificar el cálculo de las v_j, obtenemos un importante resultado general que nos permite encontrar lo "peor" que le puede ocurrir a j al escoger una de sus estrategias mixtas, calculando únicamente los pagos que obtiene cuando el "jugador" $N - \{j\}$ se limita a elegir estrategias puras. Es decir,

$$\max_{X^j \in M_j} \left(\min_{X \in M} E_j \left(X \left| X^j \right. \right) \right) = \max_{X^j \in M_j} \left(\min_{\sigma \in D} E_j \left(\sigma \left| X^j \right. \right) \right).$$

El resultado será de gran utilidad para establecer, en la sección 6.4, algunos métodos para calcular el máximo asegurable y las estrategias conservadoras de un jugador y se desprende inmediatamente de la proposición siguiente.

Proposición 6.2.9. *Para toda X^j en M_j,* $\min_{X \in M} E_j \left(X \left| X^j \right. \right) = \min_{\sigma \in D} E_j \left(\sigma \left| X^j \right. \right)$.

Demostración. Para mantener, en forma explícita, las acciones de j y las de $N - \{j\}$, en lugar de utilizar las notaciones $\left(X \left| X^{-j} \right. \right)$ y $\left(X \left| X^j \right. \right)$, usemos $\left(X^{-j}, X^j \right)$.

Para toda $\overline{X}^{-j} \in M_{-j}$,

$$E_j \left(\overline{X}^{-j}, \widehat{X}^j \right) = \sum_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} \overline{x}^{-j}_{\sigma^{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right)$$

$$\geq \sum_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} \overline{x}^{-j}_{\sigma^{-j}} \min_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right) = \min_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right).$$

Es decir, $\min_{X^{-j} \in M_{-j}} E_j \left(X^{-j}, \widehat{X}^j \right) \geq \min_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right)$.

Pero, como $D_{-j} \subset M_{-j}$, entonces,

$$\min_{X^{-j} \in M_{-j}} E_j \left(X^{-j}, \widehat{X}^j \right) \leq \min_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right).$$

Por lo tanto , $\min_{X^{-j} \in M_{-j}} E_j \left(X^{-j}, \widehat{X}^j \right) = \min_{\sigma^{-j} \in D_{-j}} E_j \left(\sigma^{-j}, \widehat{X}^j \right)$. ∎

6.3. Equilibrio de Nash en Juegos Antagónicos

Cuando los jugadores estaban limitados a sus estrategias puras, se caracterizó a los juegos en los que existía un antagonismo de intereses entre los

participantes. Lo mismo haremos en el contexto de las estrategias mixtas. Es aquí donde puede establecerse plenamente el tan evidente antagonismo que caracteriza a los juegos bipersonales de suma cero. Recordemos que con las estrategias puras únicamente en un pequeño número de juegos bipersonales de suma cero, cuya matriz tenía punto silla, existía dicho antagonismo. Por otro lado estudiaremos el antagonismo, en estrategias mixtas, de otros juegos, para los que no resulta tan evidente. En los juegos antagónicos, podremos justificar que hay un subconjunto de equilibrios de Nash que deben ser desechados y otro subconjunto que debe ser seleccionado como "la solución del juego". Este último es el de los perfiles en los que todos los jugadores actúan conservadoramente en estrategias mixtas.

En el capítulo 1, denotamos como **Max** a la máxima ganancia conjunta en estrategias puras y utilizamos este número para clasificar a los juegos en antagónicos y no antagónicos, respecto a dichas estrategias. Es fácil probar que **Max** es también la máxima ganancia conjunta en estrategias mixtas y que también nos sirve para establecer una clasificación análoga entre los juegos.

Proposición 6.3.1. $\boldsymbol{Max} = \max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} \varphi_j(\sigma) = \max\limits_{X\in M} \sum\limits_{j\in N} E_j(X)$.

Demostración. Para cada $\sigma \in D$, $\sum\limits_{j\in N} E_j(\sigma) = \sum\limits_{j\in N} \varphi_j(\sigma)$.

Por lo que, $\mathbf{Max} = \max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} E_j(\sigma)$.

Como el conjunto de perfiles de estrategias puras es, en este contexto, un subconjunto del de perfiles de estrategfias mixtas, entonces

$\max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} E_j(\sigma) \leq \max\limits_{X\in M} \sum\limits_{j\in N} E_j(X)$.

Por otro lado, para toda X en M,

$$\sum_{j\in N} E_j(X) = \sum_{j\in N}\sum_{\sigma\in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n} \varphi_j(\sigma) = \sum_{\sigma\in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n} \sum_{j\in N} \varphi_j(\sigma)$$

$$\leq \sum_{\sigma\in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n} \max_{\sigma\in D} \sum_{j\in N} E_j(\sigma) = \max_{\sigma\in D} \sum_{j\in N} E_j(\sigma) \ .$$

Por lo que, $\max\limits_{X\in M} \sum\limits_{j\in N} E_j(X) \leq \max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} E_j(\sigma)$.

Es decir, $\max\limits_{X\in M} \sum\limits_{j\in N} E_j(X) = \max\limits_{\sigma\in D} \sum\limits_{j\in N} E_j(\sigma) = \mathbf{Max}$. ∎

De nuevo, podremos establecer nuestra vieja desigualdad, ahora en relación con las estrategias mixtas, aquella que decía que la suma de los máximos asegurables es menor o igual que la máxima ganancia conjunta que fue tan importante, en estrategias puras, para clasificar a los juegos entre antagónicos y no antagónicos.

Proposición 6.3.2. $\sum_{j\in N} v_j \leq$ ***Max.***

Demostración. Sea $\overset{\circ}{X} = \left(\overset{\circ}{X}^1, \overset{\circ}{X}^2, ..., \overset{\circ}{X}^n\right)$ tal que, para toda $j \in N$, $\overset{\circ}{X}^j$ es conservadora.

Por lo que, para toda $j \in N$, $E_j\left(\overset{\circ}{X}\right) \geq v_j$, entonces,

$$\sum_{j\in N} E_j\left(\overset{\circ}{X}\right) \geq \sum_{j\in N} v_j.$$

Pero **Max** $\geq \sum_{j\in N} E_j\left(\overset{\circ}{X}\right)$, entonces **Max** $\geq \sum_{j\in N} v_j$. ∎

Entonces, podemos dividir, otra vez, a los juegos en dos clases ajenas. Una clase, la de aquellos juegos en los que los jugadores, actuando cada uno con sus propias fuerzas, se reparten toda la máxima ganancia conjunta, la otra clase, la de los demás juegos, en los que con actuaciones conservadoras no pueden obtener una ganancia conjunta tan alta como Max, por lo que queda un "sobrante". Es natural esperar que la situación será la misma que la que se presentaba con las estrategias puras. Es decir, en la primera clase de juegos, los jugadores tienen intereses antagónicos, pues ninguno tiene esperanza de obtener una ganancia mayor que su máximo asegurable, ya que sólo sería posible obligando a otro jugador a obtener un pago menor que su propio máximo asegurable, cosa que nadie permitiría, pues cada uno tiene en sus manos la garantía de no ganar menos que este máximo.

Como en todo este capítulo, las definiciones, resultados y demostraciones son análogos a las de estrategias puras. Dejaremos varias de dichas demostraciones como parte de los ejercicios de este capítulo, para que el lector refresque el tema y la técnica utilizada.

Definición 6.3.3. Un juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es antagónico en estrategias mixtas (em) si se cumple que $\sum_{j\in N} v_j =$ **Max**.

Proposición 6.3.4. *Sea* $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ *antagónico (em).*

a) *Si* X^* *en* M *es un equilibrio de Nash (em), entonces* $E_j(X^*) = v_j$.

b) *Si* X^* *en* M *es un perfil de estrategias conservadoras (em), entonces* $E_j(X^*) = v_j$.

De nuevo el concepto de punto silla (em) está intimamente ligado al de antagonismo en estrategias mixtas.

Definición 6.3.5. a) $\widehat{X}$ en M es punto silla de la función de pago esperado E_j, si para toda $X \in M$ y para toda $X^j \in M_j$,

$$E_j\left(\widehat{X}\,|X^j\right) \leq E_j\left(\widehat{X}\right) \leq E_j\left(X\,\middle|\widehat{X}^j\right).$$

b) $\widehat{X}$ en M es punto silla (em) del juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ si es punto silla de las funciones de pago esperado de cada uno de los jugadores.

Observemos que, para los juegos bipersonales de suma cero, basta pedir que $\widehat{X}$ sea punto silla de la función de pago esperado del jugador 1, para que lo sea del jugador 2.

Proposición 6.3.6. *Si el juego $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$ es antagónico (em), entonces tiene punto silla (em).*

Proposición 6.3.7. *Un juego bipersonal de suma cero es antagónico (em) si y sólo si la función de pago esperado del jugador 1 tiene punto silla.*

Proposición 6.3.8. *En un juego bipersonal de suma cero, X^* es punto silla (em) del juego si y solo si X^* es equilibrio de Nash (em).*

Demostración. Si X^* es punto silla (em), entonces, para toda $X^1 \in M_1$ y para toda $X^2 \in M_2$, se cumplen:

$$E_1\left(X^1, X^{2*}\right) \leq E_1\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \tag{1a}$$

$$E_1\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \leq E_1\left(X^{1*}, X^2\right). \tag{1b}$$

Si X^* es equilibrio de Nash (em), para toda $X^1 \in M_1$ y para toda $X^2 \in M_2$, se cumplen:

$$E_1\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \geq E_1\left(X^1, X^{2*}\right) \tag{2a}$$

$$E_2\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \geq E_2\left(X^{1*}, X^2\right) \tag{2b}$$

Las desigualdades $1a$ y $2a$ son iguales. Como el juego es bipersonal de suma cero, podemos traducir a $2b$ en términos de la ganancia del jugador 1. Lo que la transforma en

$$-E_1\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \geq -E_1\left(X^{1*}, X^2\right).$$

Al multiplicar los dos lados de la desigualdad por -1, ésta se convierte, en

$$E_1\left(X^{1*}, X^{2*}\right) \leq E_1\left(X^{1*}, X^2\right).$$

Desigualdad que es la misma que $1b$. ∎

El siguiente resultado se conoce como el teorema de von Neumann [55] de los juegos bipersonales de suma cero.

Teorema 6.3.9 (von Neumann). *Todo juego bipersonal de suma cero es antagónico (em). O, lo que es equivalente, en un juego bipersonal de suma cero* $(\{1,2\},\{D_1,D_2\},\varphi)$, $(\varphi_2=-\varphi_1)$, *se cumple que*

$$\max_{X^1\in M_1}\left(\min_{X^2\in M_2} E_1\left(X^1,X^2\right)\right)=\min_{X^2\in M_2}\left(\max_{X^1\in M_1} E_1\left(X^1,X^2\right)\right).$$

Demostración. Para todo juego finito existe al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. En los juegos bipersonales de suma cero, cualquier equilibrio de Nash es punto silla (em) (proposición 6.3.8). Entonces, todo juego bipersonal de suma cero tiene al menos un punto silla y, recordando la proposición 6.3.7, sabemos que todo juego que tenga punto silla es antagónico (em).

Es decir, $v_1+v_2=0$. O lo que es lo mismo, $v_1=-v_2$.

$v_2=\max_{X^2\in M_2}\left(\min_{X^1\in M_1} E_2\left(X^1,X^2\right)\right)=\max_{X^2\in M_2}\left(\min_{X^1\in M_1}\left(-E_1\left(X^1,X^2\right)\right)\right).$

Recordemos que para cualquier función $f:S\to R$,

$$\min_{x\in S}\left(-f\left(x\right)\right)=-\max_{x\in S}f\left(x\right)\ \text{ y }\max_{x\in S}-f\left(x\right)=-\min_{x\in S}f\left(x\right).$$

Aplicando esta propiedad, tenemos:

$$\max_{X^2\in M_2}\left(\min_{X^1\in M_1}\left(-E_1\left(X^1,X^2\right)\right)\right)=\max_{X^2\in M_2}\left(-\max_{X^1\in M_1} E_1\left(X^1,X^2\right)\right)=$$
$$=-\min_{X^2\in M_2}\left(\max_{X^1\in M_1} E_1\left(X^1,X^2\right)\right).$$

Por lo tanto,

$$\max_{X^1\in M_1}\left(\min_{X^2\in M_2} E_1\left(X^1,X^2\right)\right)=\min_{X^2\in M_2}\left(\max_{X^1\in M_1} E_1\left(X^1,X^2\right)\right).$$

∎

En la jerga de teoría de juegos, este resultado se expresa diciendo que en los juegos bipersonales de suma cero el maxmin es igual al minmax o que el juego tiene valor.

Observación 6.3.1. En este texto hemos establecido la demostración del teorema de von Neumann como un corolario del teorema de existencia de equilibrios de Nash. Sin embargo, el segundo es de 1951, mientras que el

primero es de 1928. La primera demostración de von Neumann utiliza, también, el teorema de punto fijo de Brouwer. Existen otras demostraciones que no recurren a ningún teorema de punto fijo, sino a una matemática mucho más elemental. El mismo Von Neumann dio la primera demostración "elemental" en 1938. David Gale [21] da una elegante interpretación geométrica de dicha demostración que se basa en el teorema del hiperplano de apoyo, es decir en los teoremas de alternativa que fundamentan la teoría de la programación lineal.

La *demostración de J. von Neumann del teorema 6.3.9, con la interpretación geométrica de D. Gale* sigue las ideas siguientes: Las columnas de la matriz $A^{(j)}$, $j =$ I, II son vectores, $v_1, v_2, ..., v_m$, en R^{l_j}, l_j es el número de estrategias de j. Los vectores $\{v_i\}$ determinan un hiperpoliedro convexo C.

$$C = \left\{ x \in R^{l_j} \middle| x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \text{ con } \alpha_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Se considera una translación de C hasta un cierto C_w, de tal manera que un hiperplano de apoyo separe C_w del ortante negativo.

Para representar geométricamente los razonamientos, pensemos que I tiene sólo dos estrategias y II tiene m. Entonces $v_1, v_2, ..., v_m$ están en R^2 y determinan un polígono convexo (ver figura 6.3.1). Entonces, con la traslación wu, donde $u = (1, 1)$, se construye C_w, de tal manera que es posible escoger una recta L que pasa por el origen la cuál separa a C_w del primer cuadrante negativo $\left(R^2_-\right)$ (figura 6.3.2). Si $\overline{x}$ es un vector semipositivo perpendicular a L y situado del mismo lado que C_w, entonces $\overline{x}$ hace un ángulo no obtuso con todos los vectores de C_w $(\overline{x}\,(v_i - wu) \geq 0\ \forall i)$ y ningún ángulo agudo con vectores de R^2_- (figura 6.3.3).

El argumento algebraico general es el de un teorema de alternativa que dice que o bien

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i\,(v_i - wu) \leq \overrightarrow{0} \text{ tiene una solución no negativa}$$

o bien

$$\overline{x}\,(v_i - wu) \geq 0 \text{ para todo } i \text{ tiene solución semipositiva.}$$

Se puede, entonces, escoger $\overline{x}$ tal que $\sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i = 1$ y $\overline{x} v_i \geq w$ para todo i.

Por lo tanto, existe una estrategia mixta $\bar{X}^j$ de j, tal que,
$\bar{X}^j A^{(j)} \geq (w, w, ..., w) = w\,(1, 1, ..., 1)$.

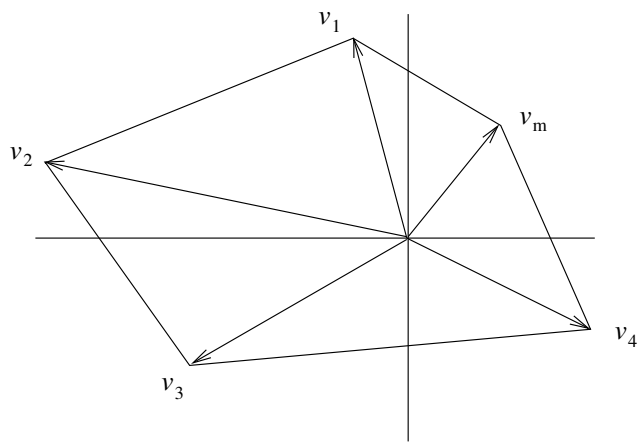

Figura 6.3.1:

Para toda X^{-j}, $\bar{X}^{j} A^{(j)} X^{-j} \geq w\,(1,1,...,1)\, X^{-j} = w$.
Análogamente, existe $\bar{X}^{-j}$ tal que
$A^{(j)} \bar{X}^{-j} \leq w\,(1,1,...,1)$ y,
para toda X^{j}, $X^{j}\ A^{(j)} \bar{X}^{-j} \leq w$.
Es decir, para toda $X^{j} \in M_j$ y para toda $X^{-j} \in M_{-j}$,

$$X^{j} A^{(j)} \bar{X}^{-j} \leq w \leq \bar{X}^{j} A^{(j)} X^{-j}.$$

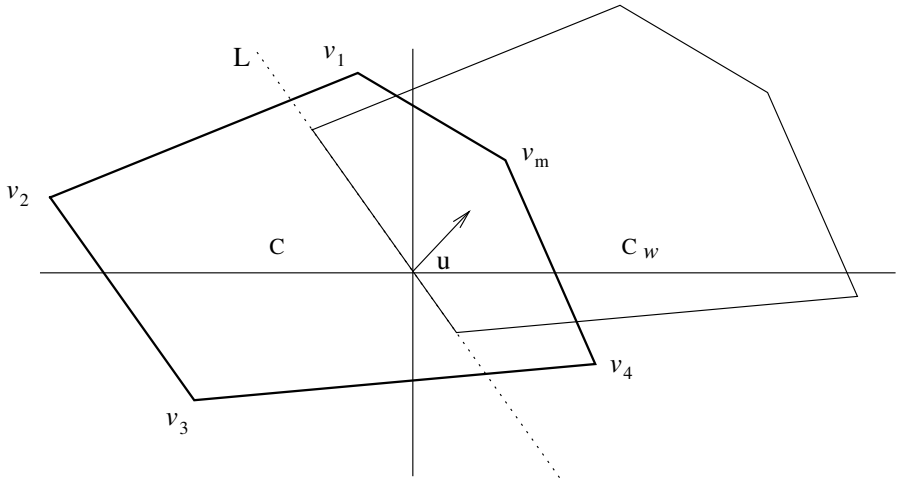

Figura 6.3.2:

Las siguientes proposiciones, 6.3.10 y 6.3.11, resumen la caracterización principal de los equilibrios de Nash (em) en los juegos antagónicos (em). La mayoría de los resultados está demostrado en las proposiciones anteriores y las demostraciones de los restan son formalmente iguales a las de las proposiciones análogas, con estrategias puras, de la sección 1.5. La primera proposición es sobre los juegos bipersonales de suma cero y la equivalencia entre punto silla (em), equilibrios de Nash (em) y parejas de estrategias conservadoras.

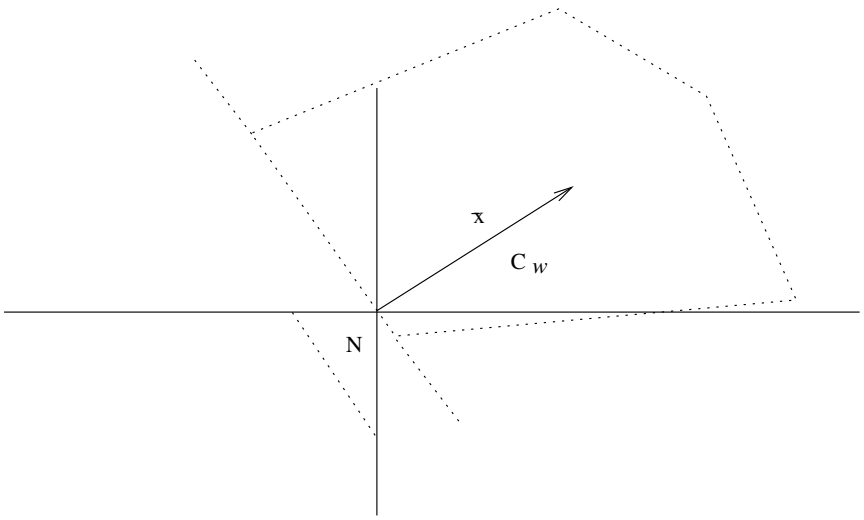

Figura 6.3.3:

Proposición 6.3.10. *En un juego bipersonal de suma cero las tres afirmaciones siguientes son equivalentes para un perfil de estrategias mixtas X^*:*

a) X^* es punto silla del juego.

b) X^* es equilibrio de Nash.

c) X^* está formado por estrategias conservadoras.

El resultado para juegos antagónicos no bipersonales es menos fuerte.

Proposición 6.3.11. *Si un juego es antagónico en estrategias mixtas, entonces se cumplen:*

a) X^* es punto silla (em) del juego si y solo si X^* es un perfil de estrategias mixtas conservadoras.

b) Si X^* es punto silla (em) del juego, entonces X^* es equilibrio de Nash (em).

Como en la sección 1.5, los equilibrios de Nash, ahora en estrategias mixtas, pueden no estar formados por estrategias conservadoras, sin embargo, el pago que obtiene el jugador j, en dichos equilibrios, es v_j. Esto significa que, en los equilibrios "no conservadores", el pago v_j no está garantizado contra los cambios de estrategias de los otros jugadores. Por lo que j preferirá los equilibrios de Nash (em) que son perfiles de estrategias conservadoras.

6.4. Calculando Estrategias Conservadoras

El enfoque del máximo asegurable, como ya hemos repetido, está basado en que cada jugador j construye un juego imaginario, bipersonal de suma cero; es un juego en el que j se concibe sólo contra el mundo, es decir, en ese juego, él mismo es el primer jugador y el segundo son todos los jugadores restantes unidos contra él, buscando lograr que j gane lo menos posible. Por ello, los métodos para calcular el máximo asegurable de un jugador son aquellos que resuelven los juegos bipersonales de suma cero. En aras de no complicar la notación, al exponer estos métodos de solución, aparecerán sólo dos jugadores, pero del segundo, excepto en el caso de que, en realidad, estemos frente a un juego bipersonal de suma cero, no nos interesan sus estrategias conservadoras y su máximo asegurable, pues es un jugador imaginario que únicamente existe en la mente del jugador j.

Establecemos, antes de entrar en materia, un resultado muy útil en los métodos que estudiaremos, pues permite reconocer cuando estamos frente a las estrategias conservadoras de algún jugador y a su máximo asegurable, en un juego bipersonal de suma cero.

Proposición 6.4.1. *Consideremos un juego bipersonal de suma cero. Sean X^* y Y^* estrategias mixtas del jugador 1 y 2, respectivamente, y v un número real. Una condición necesaria y suficiente para que X^* y Y^* sean estrategias conservadoras y v el máximo asegurable (em) del jugador 1 es que, para toda $\sigma^1 \in D_1$ y para toda $\sigma^2 \in D_2$, se cumpla que*

$$E_1\left(\sigma^1, Y^*\right) \leq v \leq E_1\left(X^*, \sigma^2\right).$$

Demostración. Si X^* y Y^* son conservadoras y v es el máximo asegurable (em) del jugador 1, tenemos:

$E_1\left(X^*, Y\right) \geq v$ para toda $Y \in M_2$. En particular, $E_1\left(X^*, \sigma^2\right) \geq v$ para toda $\sigma^2 \in D_2$.

$E_2(X, Y^*) \geq -v$ para toda $X \in M_1$. En particular, $E_2\left(\sigma^1, Y^*\right) \geq -v$ para toda $\sigma^1 \in D_1$. O lo que es lo mismo $E_1\left(\sigma^1, Y^*\right) \leq v$ para toda $\sigma^1 \in D_1$.

Juntando las dos desigualdades, tenemos que

$E_1\left(\sigma^1, Y^*\right) \leq v \leq E_1\left(X^*, \sigma^2\right)$ para toda $\sigma^1 \in D_1$ y toda $\sigma^2 \in D_2$.

Supongamos ahora que para X^*, Y^* y v se cumplen las desigualdades

$E_1\left(\sigma^1, Y^*\right) \leq v \leq E_1\left(X^*, \sigma^2\right)$ para toda $\sigma^1 \in D_1$ y toda $\sigma^2 \in D_2$.

Consideremos una estrategia mixta Y, arbitraria para 2, $Y = \sum\limits_{\sigma^2 \in D_2} y_{\sigma^2}\sigma^2$.

Entonces, por el lado derecho de la desigualdad, para toda $\sigma^2 \in D_2$,

$y_{\sigma^2} v \leq y_{\sigma^2} E_1\left(X^*, \sigma^2\right)$ y

$\sum\limits_{\sigma^2 \in D_2} y_{\sigma^2} v \leq \sum\limits_{\sigma^2 \in D_2} y_{\sigma^2} E_1\left(X^*, \sigma^2\right)$,

por lo que $v \leq E_1(X^*, Y)$ para toda $Y \in M_2$.

Esto quiere decir que

$$v \in \widetilde{A}_1 \quad \text{y} \quad v \leq v_1\,. \tag{6.4.1a}$$

Consideremos, ahora, el segundo lado de la desigualdad, es decir,

$E_1\left(\sigma^1, Y^*\right) \leq v$ para toda $\sigma^1 \in D_1$.

La desigualdad se traduce en $E_2(\sigma, Y^*) \geq -v$ para toda $\sigma^1 \in D_1$.

Si X es una estrategia mixta arbitraria para 1,

$X = \sum\limits_{\sigma^1 \in D_1} x_{\sigma^1}\sigma^1$ y procediendo como antes llegamos a que

$E_2(X, Y^*) \geq -v$ para toda $X \in M_1$.

Es decir

$$-v \in \widetilde{A}_2 \quad \text{y} \quad -v \leq v_2 = -v_1\,, \text{ por lo que } v \geq v_1\,. \tag{6.4.1b}$$

6.4.1a y 6.4.1b llevan a que v es el máximo asegurable para el jugador 1 y a que X^* y Y^* son estrategias conservadoras para 1 y 2, respectivamente. ∎

Ya es claro, para nosotros, que cuando la matriz $A^{(j)}$ del juego imaginario que construye un jugador j tiene un punto silla $\left(\sigma^{j*}, \sigma^{-j*}\right)$, entonces σ^{j*} es una estrategia conservadora de j y $a^{(j)}_{\sigma^{j*}\sigma^{-j*}}$ es su máximo asegurable. Nos interesan métodos para encontrarlos, cuando la matriz del jugador 1 no tiene punto silla.

El método algebraico para encontrar estrategias conservadoras en juegos 2×2

Supongamos que el "juego bipersonal de suma cero imaginario" que construye el jugador j tiene como matriz de pagos:

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}.$$

Si $A^{(j)}$ tiene un punto silla en $\left(\widehat{i}, \widehat{k}\right)$, $\widehat{i}$ es una estrategia pura conservadora de j y $a_{\widehat{i}\widehat{k}}$ es su máximo asegurable. Supongamos el caso en que la matriz no tiene punto silla.

Si j, el jugador del que calcularemos alguna estrategia conservadora y el máximo asegurable, elige la estrategia mixta $(x, 1-x)$ y el jugador imaginario elige $(y, 1-y)$, el pago para j será:

$E_j\left((x, 1-x), (y, 1-y)\right) =$

$xya_{11} + x(1-y)a_{12} + (1-x)ya_{21} + (1-x)(1-y)a_{22} =$

$y(xa_{11} + (1-x)a_{21}) + (1-y)(xa_{12} + (1-x)a_{22})$.

Cuando ambos "jugadores" han elegido una pareja de estrategias conservadoras, a las que denotamos como $(x^*, 1-x^*)$ y $(y^*, 1-y^*)$, respectivamente. Se tiene, por la proposición 6.3.4b, la igualdad 6.4.2:

$y^*(x^*a_{11} + (1-x^*)a_{21}) + (1-y^*)(x^*a_{12} + (1-x^*)a_{22}) = v_j$.

Pero, además,

$x^*a_{11} + (1-x^*)a_{21} \geq v_j$ y

$x^*a_{12} + (1-x^*)a_{22} \geq v_j$.

Ninguna de las dos desigualdades puede ser estricta pues 6.4.2 no podría cumplirse, así que tenemos las ecuaciones 6.4.3:

$$\begin{aligned} x^*a_{11} + (1-x^*)a_{21} &= v_j \\ x^*a_{12} + (1-x^*)a_{22} &= v_j \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^*(a_{11} - a_{21}) - v_j &= -a_{21} \\ x^*(a_{12} - a_{22}) - v_j &= -a_{22}. \end{aligned}$$

El determinante del sistema no puede ser cero, pues de lo contrario el juego tendría punto silla.

De donde, obtenemos las soluciones de x^* y v_j:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21-} a_{12} + a_{22}} \\ v_j &= \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{21-} a_{12} + a_{22}}. \end{aligned}$$

Si el "jugador" $N - \{j\}$ fuera realmente un jugador se puede hacer lo análogo con su pago y proceder como con j.

Recordemos el ejemplo 1.3.2 c del capítulo 1 que está expresado en la matriz

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Cortés} & \textit{Descortés} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Cortés} \\ \textit{Descortés} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix}. \end{array}$$

Como el conflicto es simétrico, el juego imaginario que construyen los dos jugadores es el mismo, el de la matriz

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Entonces la estrategia mixta conservadora para ambos es $(\frac{5}{8}, \frac{3}{8})$ y el máximo asegurable es $\frac{5}{8}$.

Otra forma de escribir las fórmulas anteriores es:

$$(x^*, 1 - x^*) = \frac{JA^{(j)*}}{JA^{(j)*}J^t}$$

$$v_j = \frac{\det\left(A^{(j)}\right)}{JA^{(j)*}J^t}$$

Donde J es el vector $(1,1)$, $A^{(j)*}$ es la matriz adjunta de $A^{(j)}$. Esta forma de escribir la estrategia conservadora y el máximo asegurable de un jugador en un juego 2×2 se puede generalizar.

Caracterización de las Estrategias Conservadoras de un Juego

Para cualquier juego rectangular finito tal que $JA^{(j)*}J^t \neq 0$, la fórmula anterior es válida para calcular estrategias conservadoras del jugador j. Para demostrarlo, necesitamos introducir, aunque no la demostraremos, una propiedad de los subconjuntos no vacíos, compactos y convexos de R^n.

Sea $S \subset R^m$, decimos que $K(S) \subset S$ es el **conjunto extremo** de S, si para cualquier punto z de $K(S)$, no es posible encontrar dos puntos distintos de S, tales que z es el punto medio entre ellos.

Teorema 6.4.2. *Sea $S \subset R^m$ no vacío, compacto y convexo, entonces su conjunto extremo $K(S)$ es no vacío y cualquier elemento de S es una combinación convexa de elementos de $K(S)$.*

Dado un juego rectangular Γ, el conjunto de estrategias conservadoras de j, $C_j(\Gamma)$, es no vacío, compacto y convexo, entonces cualquier elemento de $C_j(\Gamma)$ es una combinación convexa de elementos de $K\left(C_j(\Gamma)\right)$. Es clara la importancia de $K\left(C_j(\Gamma)\right)$ para caracterizar a todas las estrategias conservadoras del jugador j.

Teorema 6.4.3. *Supongamos que* $\left(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi\right)$ *es tal que el máximo asegurable en estrategias mixtas del jugador* j *no es cero. Sean* X^j *y* Y^{-j} *estrategias conservadoras de* j *y* $N-\{j\}$*, respectivamente,* X^j *está en* $K\left(C_j(\Gamma)\right)$ *y* Y^{-j} *está en* $K\left(C_{-j}(\Gamma)\right)$ *si y sólo si existe* B*, una submatriz cuadrada no singular de* $A^{(j)}$*, tal que* $v_j = \frac{\det(B^*)}{J_r B^* J_r^t}$*,* $\widehat{X}^j = \frac{J_r B^*}{J_r B^* J_r^t}$ *y* $\widehat{Y}^{-j} = \frac{J_r B^{*t}}{J_r B^* J_r^t}$*, donde* r *es el orden de* B*,* J_r *es el vector de coordenadas 1, de dimensión* r*, y los vectores* $\widehat{X}^j$ *(*$\widehat{Y}^{-j}$*) son los vectores* X^j *(*Y^{-j}*), después de suprimir las coordenadas correspondientes a los renglones eliminados (columnas eliminadas) de* $A^{(j)}$ *para obtener* B*.*

El lector interesado puede ver la demostración en el libro de J.C.C. McKinsey [36].

Consideremos un ejemplo. Supongamos que la matriz $A^{(j)}$ representa el juego imaginario construido por el jugador j dentro de un juego finito de cualquier tamaño y que nos proponemos encontrar el máximo asegurable de j y el conjunto de sus estrategias conservadoras.

$A^{(j)}$ podría ser, el ejemplo 6.4.1,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Cómo la matriz no tiene punto silla, el juego no tiene estrategias puras conservadoras y no tenemos que considerar submatrices de orden 1. Tenemos que trabajar con las 9 submatrices no singulares de orden 2 y con la matriz $A^{(j)}$. Las submatrices de orden 2 son: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Aplicando las fórmulas a la matriz $A^{(j)}$, llegamos al número -1, y a las estrategias $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$ y, por los teoremas **??** y 6.4.3, llegamos a la conclusión de que son el máximo asegurable de j y elementos de $K\left(C_j(\Gamma)\right)$

y $K\left(C_{-j}(\Gamma)\right)$, respectivamente. La estrategia de $N-\{j\}$ sólo interesa para hacer ver que -1 es el máximo asegurable del jugador j y $(\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5})$ es una de sus estrategias conservadoras, pero como $N-\{j\}$ es sólo un jugador imaginario, no nos dice nada sobre el comportamiento de algún otro jugador.

Examinando las matrices de orden 2, llegamos a la conclusión de que la única que nos sirve es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y nos lleva al vector $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. La submatriz en cuestión es el resultado de tachar el primer renglón, y la tercera columna de $A^{(j)}$, entonces $\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ y $(\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5})$ pertenecen al conjunto extremo de $C_1(\Gamma)$. Es decir,

$K\left(C_j(\Gamma)\right)=\left\{\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),(\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5})\right\}$ y

$C_j(\Gamma)=\left\{x\left(0,\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)+(1-x)\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)|x\in[0,1]\right\}=$

$\left\{\left(\frac{1-x}{5},\frac{x+9}{15},\frac{2x+3}{15}\right)|x\in[0,1]\right\}$ y $v_1=-1$.

El método geométrico para calcular estrategias conservadoras en juegos $2\times m$ y $m\times 2$

Ahora estudiaremos un método que se puede emplear cuando, en el juego imaginado por j, alguno de los dos jugadores, j o $N-\{j\}$, tiene solo dos estrategias. En ese caso, cómo hicimos en el método de la cruz gamada, podemos establecer una correspondencia biunívoca entre las estrategias mixtas del jugador con dos estrategias puras y el intervalo $[0,1]$.

Supongamos que es j el que tiene dos estrategias y que $A^{(j)}$ es su matriz de pago en el juego bipersonal de suma cero que construye, cuando piensa conservadoramente.

$$A^{(j)}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \end{pmatrix}.$$

Para cada estrategia pura σ^{-j} del "jugador" $N-\{j\}$, tenemos que la esperanza de pago de j, en función de la probabilidad x que j le daría a su primera estrategia, está dada por la ecuación de la recta $l\left(\sigma^{-j}\right)$. Es decir,

$$E_j\left((x,1-x),\sigma^{-j}\right)=xa_{1\sigma^{-j}}+(1-x)\,a_{2\sigma^{-j}}=\left(a_{1\sigma^{-j}}-a_{2\sigma^{-j}}\right)x+a_{2\sigma^{-j}},$$

de donde

$$y_{\sigma^{-j}}(x)=\left(a_{1\sigma^{-j}}-a_{2\sigma^{-j}}\right)x+a_{2\sigma^{-j}}.$$

Podemos encontrar fácilmente $\operatorname*{máx}_{X^j\in M_j}\left(\operatorname*{mín}_{X\in M}E_j\left(X\,|X^j\right)\right)$, determinando, para cada valor de $\widehat{x}$, el peor pago que puede recibir j, cuando $N-\{j\}$

elige dentro del conjunto de sus estrategias puras. Es decir, encontrar para cada $\widehat{x}$, el $\min\limits_{\sigma^{-j}} y_{\sigma^{-j}}(\widehat{x})$. Posteriormente encontrar la x que maximiza entre esos "peores", o sea $\max\limits_{x\in[0,1]}\left\{\min\limits_{\sigma^{-j}} y_{\sigma^{-j}}(\widehat{x})\right\}$. Ver figura 6.4.1

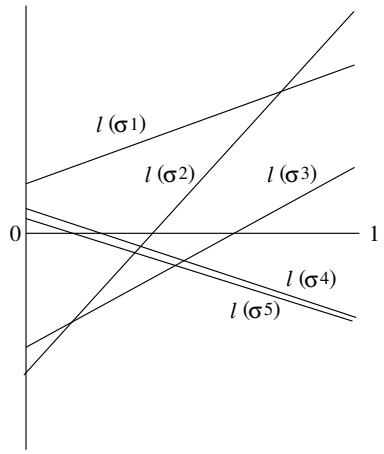

Figura 6.4.1:

El otro caso consiste en que j fuera el de más de dos estrategias puras y $N-\{j\}$ tuviera 2. Entonces encontraríamos el máximo asegurable v_{-j} del jugador ficticio $N-\{j\}$, como se realizó anteriormente para j y una estrategia mixta conservadora para ese jugador inventado y, con ello, conseguimos el máximo asegurable de j que es $-v_{-j}$ y una ecuación vectorial, cuya solución es una estrategia conservadora para j. Ilustremos con un ejemplo.

Ejemplo 6.4.1. Consideremos una versión ligeramente distinta del multicitado ejemplo del monopolio y su competidor. Cambiamos los pagos para que la matriz de pago del segundo jugador no tenga estrategias dominadas ni punto silla. Obteniendo, por ejemplo, la matriz

$$\begin{pmatrix} (35,25) & (80,0) \\ (30,10) & (90,0) \\ (45,-10) & (40,1) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que queremos encontrar el máximo asegurable y una estrategia conservadora para el competidor, entonces el juego imaginario es:

$$A^{(C)} = \begin{pmatrix} 25 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

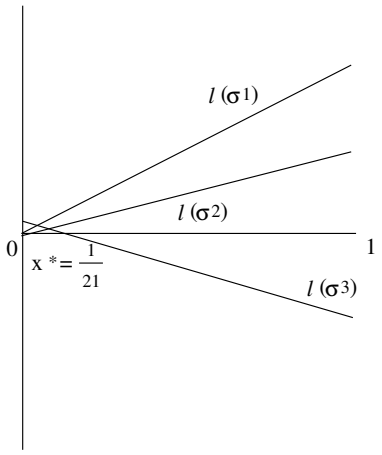

Figura 6.4.2:

Las rectas a tomar en cuenta son:
$y = 25x$,
$y = 10x$ y
$y = -10x + (1 - x) = -11x + 1$,
cuyas gráficas podemos observar en la figura 6.4.2.

El maxmin se alcanza para x^* tal que $10x^* = -11x^* + 1$, es decir $x^* = \frac{1}{21}$.

Es claro que el máximo asegurable de C es $\frac{10}{21}$ y su única estrategia conservadora es $(\frac{1}{21}, \frac{20}{21})$.

Estudiemos, ahora, el problema para el monopolio. La matriz del juego que imagina es

$$A^{(M)} = \begin{pmatrix} 35 & 80 \\ 30 & 90 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}.$$

El monopolio tiene más de dos estrategias puras, tenemos que resolver el juego para su oponente ficticio y usar esta solución.

Es decir, para

$$A^{(-M)} = \begin{pmatrix} -35 & -30 & -45 \\ -80 & -90 & -40 \end{pmatrix}.$$

Las rectas a que se da lugar y que se ilustran en la figura 6.4.3 son:
$y = -35x + (1 - x)(-80) = 45x - 80$,
$y = -30x + (1 - x)(-90) = 60x - 90$ y
$y = -45x + (1 - x)(-40) = -5x - 40$.

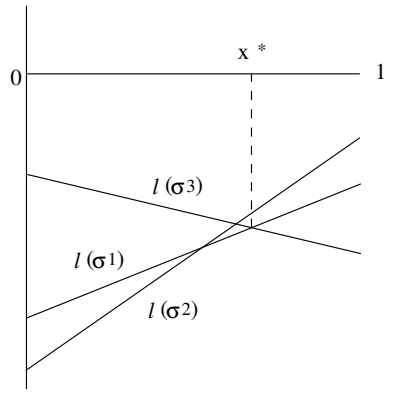

Figura 6.4.3:

Entonces, el máximo asegurable para $N - \{j\}$ se alcanza en x^* tal que $-5x^* - 40 = 45x^* - 80$, es decir, en $x^* = \frac{4}{5}$.

Por lo tanto, una estrategia conservadora para $N - \{j\}$ es $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ y su máximo asegurable es -44, y v_M el máximo asegurable para M es 44.

Y tenemos que $35y_1^* + 30y_2^* + 45\,(1 - y_1^* - y_2^*) = 44$ y

$80y_1^* + 90y_2^* + 40\,(1 - y_1^* - y_2^*) = 44$

Con solución $y_1^* = \frac{1}{10}$ y $y_2^* = 0$. O sea que la estrategia conservadora de M es $(\frac{1}{10}, 0, \frac{9}{10})$.

Realmente, lo que estamos haciendo, es resolver geométricamente un problema de programación lineal. El problema general de encontrar el máximo asegurable y una estrategia conservadora de un jugador para cualquier juego rectangular finito se puede establecer como un problema de programación lineal.

El Cálculo del Máximo Asegurable y de Estrategias Conservadoras como un Problema de Programación Lineal

Podemos decir brevemente que un programa lineal consiste en el problema de maximizar (o minimizar) una función lineal donde las variables del problema están sujetas a restricciones expresadas como desigualdades en términos, también, de funciones lineales.

Una presentación usual de un problema de programación lineal consistiría en buscar, dentro de un conjunto caracterizado por m restricciones de la forma $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}x_i \geq c_j$, un vector $(x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$, con coordenadas

no negativas, que maximice a una función de la forma $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. En forma taquigráfica esto se expresa de la manera siguiente:

PL1)

Maximizar $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}_i x_i$

Sujeto a

$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{i\ j} x_i \leq \widetilde{c}_j$ para $j = 1, 2, ...m$ y

$x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ...n$.

La función que se desea maximizar, osea $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}_i x_i$, se llama la función objetivo.

El conjunto de vectores $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en R^n que cumplen las restricciones $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_{i\ j} x_i \leq \widetilde{c}_j$ para $j = 1, 2, ...m$ y $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ...n$ se llama el conjunto factible del problema.

Supongamos que tenemos el problema de encontrar el máximo asegurable y las estrategias conservadoras de un jugador que tiene a la matriz $A^{(j)}$ como juego imaginario. Sabemos, por los resultados obtenidos en este capítulo, que $X^j = \left(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j\right)$ es una estrategia mixta conservadora para el jugador j y v_j es su máximo asegurable si y sólo si $X^{j\ t} A^{(j)} \geq v_j$ y v_j es el máximo elemento de $\widetilde{A}_j$, el conjunto de cantidades asegurables para j. Por el momento consideremos que v_j es no negativo.

Los supuestos descritos arriba nos permiten plantear nuestro problema como el de maximizar la función lineal $f\left(x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j, v_j\right) = v_j$ sujeta a las restricciones $X^{j\ t} A^{(j)} \geq v_j$ y $X^j \in M_j$. La función objetivo es lineal y el conjunto factible se puede expresar a través de desigualdades en las que sólo aparecen funciones lineales. Es decir, el problema de calcular estrategias mixtas conservadoras y el máximo asegurable se puede plantear como el siguiente problema de programación lineal

PLJ1)

Maximizar v_j

Sujeto a

$$\begin{aligned} -\sum_i a_{i\ k}^{(j)} x_i^j + v_j &\leq 0 \text{ para } k = 1, 2, ..., l_{-j}, \\ \sum_i x_i^j &\leq 1, \\ \sum_i -x_i^j &\leq 1, \\ x_i^j &\geq 0 \text{ para } i = 1, 2, ..., l_j \\ v_j &\geq 0 \end{aligned}$$

La proposición que enunciamos a continuación permite encontrar v_j en el caso general.

Proposición 6.4.4. *Sea* $\Gamma = \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi\right)$ *un juego rectangular finito. Consideremos el juego* $\bar{\Gamma} = \left(N, \{D_j\}_{j \in N}, \bar{\varphi}\right)$*, en el que los conjuntos de jugadores y de estrategias puras son los mismos que en* Γ *y, para todo jugador* i*, con* $i \neq j$*,* $\bar{\varphi}_i(\sigma) = \varphi_i(\sigma)$ *para toda* $\sigma \in D$*, y para* j*,* $\bar{\varphi}_j(\sigma) = \varphi_j(\sigma) + \alpha$ *para toda* $\sigma \in D$*. Entonces una estrategia* $\widehat{X}^j \in M_j$ *es conservadora para* j *en* Γ*, si y sólo si lo es en* $\bar{\Gamma}$*. Además, si* v_j *es el máximo asegurable de* j *en* Γ*, entonces* $v_j + \alpha$ *lo es en* $\bar{\Gamma}$*.*

El algoritmo usual para calcular soluciones de problemas de programación lineal es el llamado simplex que describimos a grandes rasgos a continuación. Supongamos que tenemos uno de estos problemas PL1 de maximizar $\sum_{i=1}^{n} d_i x_i$ y que el sistema de restricciones se puede escribir como

$$\begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + ... + b_{n1}x_n \leq c_1 \\ b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{n2}x_n \leq c_2 \\ ... \\ b_{1m}x_1 + b_{2m}x_2 + ... + b_{nm}x_n \leq c_m. \end{array}$$

Es claro que existe un vector de variables $(u_1, u_2, ..., u_m) \in R^m$ que permiten escribir las restricciones como igualdades:

$$\begin{array}{c} b_{11}x_1 + b_{21}x_2 + ... + b_{n1}x_n - c_1 = -u_1 \\ b_{12}x_1 + b_{22}x_2 + ... + b_{n2}x_n - c_2 = -u_2 \\ ... \\ b_{1m}x_1 + b_{2m}x_2 + ... + b_{nm}x_n - c_m = -u_m \end{array}$$

junto con $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ...n$.

A las u_i se les llama variables de holgura.

Caractericemos las soluciones del problema con el método siguiente: En primer lugar, escribimos el problema PL1 en forma de la tabla PL2.

PL2)

$$\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & ... & x_n & 1 & \\
b_{11} & b_{21} & ... & b_{n1} & -c_1 & = -u_1 \\
b_{12} & b_{22} & ... & b_{n2} & -c_2 & = -u_2 \\
... & .... & ... & ... & ... & ... \\
b_{1m} & b_{2m} & ... & b_{nm} & -c_m & = -u_m \\
d_1 & d_2 & ... & d_n & 0 & = w
\end{array}$$

La tabla representa un sistema de $m + 1$ ecuaciones con $n + m + 1$ incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m$ y w. A lo más que podemos aspirar es a resolver $m + 1$ en términos de las restantes.

Supongamos que tenemos la solución de $m + 1$ variables, por ejemplo $s_1, s_2, ..., s_m$ (variables básicas) y w, en términos de $r_1, r_2, ..., r_n$ (variables no básicas). Esto determina un problema equivalente que expresamos con una tabla análoga a la anterior.

PL3)

$$\begin{array}{cccccc}
r_1 & r_2 & ... & r_n & 1 & \\
b'_{11} & b'_{21} & ... & b'_{n1} & -c'_1 & = -s_1 \\
b'_{12} & b'_{22} & ... & b'_{n2} & -c'_2 & = -s_2 \\
... & .... & ... & ... & ... & ... \\
b'_{1m} & b'_{2m} & ... & b'_{nm} & -c'_m & = -s_m \\
d'_1 & d'_2 & ... & d'_n & \delta & = w
\end{array}$$

Supongamos que hemos llegado a un problema PLk en el que las $-c'_i$ y las d'_i resultaron no positivas, a este problema lo llamaremos PL*. El vector en el que todas las r_i son cero es la solución de PL*, ya que se cumplen: a) $(0, 0, ..., 0)$ pertenece al conjunto factible de PL3, b) $(0, 0, ..., 0)$ determina que todas las variables s_i sean no negativas pues son iguales a las c'_i y c) la función objetivo de PL*, $d'_1 r_1 + d'_2 r_2 + ... + d'_n r_n + \delta = w$, alcanza su máximo en $(0, 0, ..., 0)$. La solución de PL1 se encuentra a partir de la solución de PL*. Entonces necesitamos un método para construir el problema PL*. Este método es el llamado algoritmo simplex.

El conjunto de puntos que cumplen las restricciones de todos los problemas es el mismo en PL1 y en PL*, sólo que expresado en forma distinta. Dicho conjunto es un hiperpoliedro convexo. Los puntos correspondientes a que n de las variables sean cero representan a los vértices del hiperpoliedro. Entonces, interpretado geométricamente, el método simplex consiste en ir probando sistemáticamente si los vértices del poliedro son solución o no lo son. Nosotros hemos justificado que cuando la columna correspondiente a 1 y el renglón correspondiente a la función objetivo tienen todos los coeficientes no positivos, el vértice determinado por igualar a cero a las variables distintas de w y expresadas en términos de las restantes es la solución. La demostración de que en un problema de programación lineal, la solución siempre se encuentra en un vértice se puede consultar en cualquier libro de programación lineal.

Un paso pivote es un procedimiento para cambiar una sola de las variables básicas.

Supongamos que, después del paso s, hemos obtenido la forma PLs del problema y para el paso $s+1$ queremos convertir a la variable básica s_j en una no básica substituyéndola por una de las r_l. Habrá que tomar, entonces, como pivote el término jl, es decir, la variable l de la ecuación j-ésima.

Consideremos dicha ecuación,

$$\sum_{i=1}^{n} b'_{ij} r_i - c'_j = -s_j,$$

y supongamos que $b'_{lj} \neq 0$. Entonces

$$\sum_{i=1,\ i\neq l}^{n} \frac{b'_{i\ j}}{b'_{l\ j}} r_i + \frac{1}{b'_{l\ j}} s_j - \frac{1}{b'_{l\ j}} c'_j = -r_l.$$

Esta nueva ecuación será la j-ésima ecuación de PLs+1

¿Cómo cambian las restantes ecuaciones? Por ejemplo, en la ecuación $k-$ésima, $k \neq j$, hay que substituir la variable r_l por

$$\sum_{i=1,\ i\neq l}^{n} \left(-\frac{b'_{i\ j}}{b'_{l\ j}} \right) r_i - \frac{1}{b'_{l\ j}} s_j + \frac{1}{b'_{l\ j}} c'_j.$$

Entonces reagrupando términos y considerando a s_j la l-ésima variable no básica, tenemos para $k = 1, 2, ..., j-1, j+1, ..., n$

$$\sum_{i=1,\ i\neq l}^{n} \left(b'_{i\ k} - \frac{b'_{lk} b'_{i\ j}}{b'_{l\ j}} \right) r_i - \frac{b'_{kl}}{b'_{l\ j}} s_j - \left(c'_k - \frac{b'_{lk} c'_j}{b'_{l\ j}} \right) = -s_k.$$

Quedando la nueva tabla como:

$$
\begin{array}{ccccccc}
r_1 & \cdots & s_j & \cdots & r_n & 1 & \\
\frac{b'_{1\ 1}b'_{l\ j}-b'_{l1}b'_{1\ j}}{b'_{l\ j}} & \cdots & -\frac{b'_{1l}}{b'_{l\ j}} & \cdots & \frac{b'_{n\ 1}b'_{l\ j}-b'_{l1}b'_{nj}}{b'_{l\ j}} & \frac{c'_1 b'_{l\ j}-b'_{l1}c'_{\ j}}{b'_{l\ j}} & = -s_1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{b'_{1\ j}}{b'_{l\ j}} & \cdots & -\frac{1}{b'_{l\ j}}* & \cdots & \frac{b'_{\mathrm{l}nj}}{b'_{l\ j}} & \frac{c'_{lj}}{b'_{l\ j}} & = -r_l \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{b'_{1\ m}b'_{l\ j}-b'_{lm}b'_{1\ j}}{b'_{l\ j}} & \cdots & -\frac{b'_{ml}}{b'_{l\ j}} & \cdots & \frac{b'_{n\ m}b'_{l\ j}-b'_{lm}b'_{n\ l}}{b'_{l\ j}} & \frac{c'_m b'_{l\ j}-b'_{lm}c'_{\mathrm{j}}}{b'_{l\ j}} & = -s_m \\
\frac{d'_1 b'_{l\ j}-d'_l b'_{1\ j}}{b'_{l\ j}} & \cdots & \frac{d'_l}{b'_{l\ j}} & \cdots & \frac{d'_1 b'_{l\ j}-d'_l b'_{n\ j}}{b'_{l\ j}} & \frac{\delta b'_{l\ j}-d'_l c'_{\ j}}{b'_{l\ j}} & = w
\end{array}
$$

Ejemplo 6.4.2. Consideremos que el juego imaginario del jugador j está dado por la matriz:

$$
\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Supongamos que queremos encontrar el máximo asegurable y alguna estrategia conservadora del jugador I, plateando un problema de programación lineal y utilizando el algoritmo simplex.

Tendríamos el problema **PLJ1** siguiente:

Maximizar v_M

Sujeto a

$$
\begin{aligned}
-(3x_1 + 5x_2 + x_3 - v_M) &\leq 0 \\
-(6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - v_M) &\leq 0 \\
-(x_1 + 4x_2 + 3x_3 - v_M) &\leq 0 \\
-(4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - v_M) &\leq 0 \\
(x_1 + x_2 + x_3) - 1 &\leq 0 \\
-(x_1 + x_2 + x_3) - 1 &\leq 0 \\
x_i &\geq 0 \text{ para } i = 1, 2, 3 \\
v_M &\geq 0
\end{aligned}
$$

Construimos la tabla **PLJ2**:

x_1	x_2	x_3	v_M	
-3	-5	-1	1	$= -s_1$
-6	-2	-4	1	$= -s_2$
-1	-4	-3	1	$= -s_3$
-4	-2	-5	$1*$	$= -s_4$
-1	-1	-1	0	$= -1$

Los asteriscos marcan el término elegido para pivote.
PLJ3:

x_1	x_2	x_3	s_4	
1	-3	4	-1	$= -s_1$
-2	0	1	-1	$= -s_2$
3	-2	2	-1	$= -s_3$
-4	-2	-5	1	$= -v_M$
-1	-1	$-1*$	0	$= -1$

PLJ4:

x_1	x_2	1	s_4	
-3	-7	4	-1	$= -s_1$
-3	-1	1	-1	$= -s_2$
1	-4	2	-1	$= -s_3$
1	3	-5	1	$= -v_M$
1	1	-1	0	$= -x_3$

Colocamos la tabla en la forma usual para llegar a la solución con nuevos pasos de simplex PL4':

x_1	x_2	s_4	1	
-3	-7	-1	4	$= -s_1$
-3	-1	-1	1	$= -s_2$
1	-4	$-1*$	2	$= -s_3$
1	1	0	-1	$= -x_3$
-1	-3	-1	5	$= v_M$

PLJ5:

$$\begin{array}{rrrrl}
x_1 & x_2 & s_3 & 1 & \\
-4 & -3 & -1* & 4 & = -s_1 \\
-4 & 3 & -1 & 1 & = -s_2 \\
-1 & 4 & -1 & 2 & = -s_4 \\
1 & 1 & 0 & -1 & = -x_3 \\
-2 & 1 & -1 & 3 & = v_M
\end{array}$$

PLJ6:

$$\begin{array}{rrrrl}
x_1 & x_2 & s_1 & 1 & \\
4 & 3 & -1 & -2 & = -s_3 \\
0 & 6* & -1 & -3 & = -s_2 \\
3 & 7 & -1 & -4 & = -s_4 \\
1 & 1 & 0 & -1 & = -x_3 \\
2 & 4 & -1 & 1 & = v_M
\end{array}$$

PLJ7:

$$\begin{array}{rrrrl}
x_1 & s_2 & s_1 & 1 & \\
4* & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & = -s_3 \\
0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & = -x_2 \\
3 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & = -s_4 \\
1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & = -x_3 \\
2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 3 & = v_M
\end{array}$$

PLJ8:

$$\begin{array}{rrrrl}
s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & = -x_1 \\
0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & = -x_2 \\
-\frac{3}{4} & -\frac{19}{24} & \frac{13}{24} & -\frac{1}{8} & = -s_4 \\
-\frac{1}{4} & -\frac{1}{24} & \frac{7}{24} & -\frac{3}{8} & = -x_3 \\
-\frac{1}{2} & -\frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{13}{4} & = v_M
\end{array}$$

Entonces, una estrategia conservadora para I es $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$ y el máximo asegurable es $\frac{13}{4}$.

Otros métodos

Desde luego, todos los métodos para calcular equilibrios de Nash sirven para encontrar el máximo asegurable y algunas estrategias conservadoras para un jugador j, ya que en los juegos bipersonales de suma cero coinciden los equilibrios con las parejas de estrategias conservadoras. Por supuesto, que sólo servirá la estrategia y el pago de equilibrio de j. En particular, el de juego ficticio (sección 5.3) es un método usual para este propósito. En este último algoritmo se introducen cambios para encontrar una subsucesión convergente y, además, volverlo más rápido usando el hecho de que se trabaja con un juego bipersonal de suma cero (el imaginado por j). Consulte los libros de McKinsey [36], de Owen[43] y de Ventsel [54], en la bibliografía para estudiar diferentes versiones del algoritmo.

6.5. Ejercicios

Ejercicio 6.1. Considere el juego 1.3.2 c)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Cortés} & \textit{Descortés} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Cortés} \\ \textit{Descortés} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Demuestre que si el jugador I elige una estrategia mixta $(x, 1-x)$, con x en $\left(\frac{3}{5}, \frac{7}{8}\right]$, el jugador I asegurará un pago mayor que -1. ¿En que intervalo tiene que estar la probabilidad que el jugador II le otorgue a la estrategia Cortés para que asegure un pago mayor que $\frac{-3}{4}$?

Ejercicio 6.2. Para los juegos siguientes encuentre el máximo asegurable en estrategias mixtas y una estrategia conservadora mixta para cada jugador. En cada uno conteste las preguntas siguientes: ¿La pareja de estrategias conservadoras mixtas que encontró es un equilibrio de Nash? ¿El juego es antagónico en estrategias mixtas?

a)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} (5,-2) & (0,3) \\ (-6,9) & (3,0) \\ (4,-1) & (2,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

b)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,-3) & (5,3) & (4,2) & (3,7) \\ (5,1) & (-1,4) & (2,0) & (5,3) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ejercicio 6.3. Para los juegos siguientes encuentre el máximo asegurable en estrategias mixtas y una estrategia conservadora mixtas para cada jugador, primero con el método algebraico y después con el método geométrico ¿La eneada de estrategias conservadoras mixtas encontrada es un equilibrio de Nash? ¿El juego es antagónico en estrategias mixtas?

a) Ejemplo 1.3.1 b)

$$\begin{array}{c} \\ \textit{Águila} \\ \textit{Sol} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{Águila} & \textit{Sol} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

b) Ejemplo 1.3.2 b)

$$\begin{array}{c} \\ \text{Reducir} \\ \text{No Reducir} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Reducir} & \text{No Reducir} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (2,2) & (-2,1) \\ (1,-2) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ejercicio 6.4. Para los juegos siguientes encuentre el máximo asegurable en estrategias mixtas y una estrategia conservadora mixtas para cada jugador con el método general del que habla el teorema 6.4.3 ¿La eneada de estrategias conservadoras mixtas encontrada es un equilibrio de Nash? ¿El juego es antagónico en estrategias mixtas?

a) Ejemplo 1.3.5) **El supuesto ligue de Nash** $(N, \{D_j\}_{j\in N}, \varphi)$, donde $N = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$, conjunto de 4 estudiantes $D_j = \{Rubia, ch_1, ch_2, ch_3, ch_4\}$.

Si para $i \in D_j$, $n_i = \#\left\{\sigma^k = i\right\}$, la función de pago del jugador j se expresa con la función φ_j tal que $\forall \sigma \in D$,

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 1/n_{ch_k} & \text{si } \sigma^j = ch_k, \\ 0 & \text{si } \sigma^j = Rubia \text{ y } n_{Rubia} < 4, \\ 1/2 & \text{si } \sigma^j = Rubia \text{ y } n_{Rubia} = 4. \end{cases}$$

b) Ejemplo 1.3.7 *a* **Flexibilización del Trabajo.**
$N = \{obreros\ de\ una\ planta\ industrial\}$, $n = \#N, n \geq q > 1$,

$D_j = \{flexible, resiste\}$.

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j = resiste, \\ x - a > 0 & \text{si } \sigma^j = flexible \text{ y } n_f \geq q, \\ -a < 0 & \text{si } \sigma^j = flexible \text{ y } n_f < q. \end{cases}$$

c) **Contaminación Ambiental** $N = \{$*habitante de la ciudad de México* $|$*posee un automóvil*$\}$. Cada uno de ellos tiene que decidir si se transporta casi siempre en su automóvil o trata de limitar el uso de éste y utilizar el transporte público.

$D_j = \{$*uso intensivo del automóvil*, *uso de transporte público*$\}$.

Si una gran cantidad de personas utilizan intensivamente el auto, el tránsito se vuelve insoportable y la contaminación de la atmósfera se convierte en dañina para la salud. Denotemos como r a este tope del número de auto dependientes, $0 < r < n$.

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} 50 & \text{si } k_\sigma < r \text{ y } \sigma^j = transporte\ público, \\ -100 & \text{si } k_\sigma \geq r \text{ y } \sigma^j = transporte\ público, \\ 100 & \text{si } k_\sigma \leq r \text{ y } \sigma^j = auto, \\ -50 & \text{si } k_\sigma > r \text{ y } \sigma^j = auto, \end{cases}$$

donde k_σ = número de los que usan intensivamente el auto de acuerdo al perfil de estrategias σ.

Ejercicio 6.5. a) Sea $\Gamma = \left(N, \{D_k\}_{k\in N}, \varphi\right)$ un juego rectangular tal que existen estrategias puras del jugador j, $\sigma_1^j, \sigma_2^j, ..., \sigma_r^j$ y $\widehat{\sigma}^j$, para las que se cumple:

$\sum_{i=1}^{r} x_i \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma_i^j\right.\right) \geq \varphi_j\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^j\right.\right)$ para toda $\sigma \in D$ y para algunas $\{x_i\}_{i=1,...r}$, con $x_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{r} x_i = 1$. Demuestre que el máximo asegurable (em) y las estrategias conservadoras (em) para j en Γ son los mismos que en

$(N, \left\{D_1, D_2, ..., D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\}, ..., D_n\right\}, \varphi \left| \bar{D}\right.)$, donde

$\bar{D} = D_1 \times D_2 \times ... \times D_j - \left\{\widehat{\sigma}^j\right\} \times ... \times D_n$.

b) Sea $\Gamma = \left(N, \{D_k\}_{k\in N}, \varphi\right)$ un juego rectangular tal que existen estrategias puras del jugador $N - \{j\}$ $\sigma_1^{-j}, \sigma_2^{-j}, ..., \sigma_r^{-j}$ y $\widehat{\sigma}^{-j}$, para las que se cumple $\sum_{i=1}^{r} x_i \varphi_j\left(\sigma \left| \sigma_i^{-j}\right.\right) \leq \varphi_j\left(\sigma \left| \widehat{\sigma}^{-j}\right.\right)$. Demuestre que el máximo asegurable y las estrategias conservadoras para j son los mismos en Γ que en $(\{j, N - \{j\}\}, \{D_j, D_{-j} - \left\{\widehat{\sigma}^{-j}\right\}\}, \widetilde{\varphi} \left| \bar{D}\right.)$, *con* $\bar{D} = D_j \times \left(D_{-j} - \left\{\widehat{\sigma}^{-j}\right\}\right)$.

Ejercicio 6.6. Considere el juego $N = \{I; II, III\}$, $D_I = \{1, 2, 3\}$, $D_{II} = \{1, 2\}$, $D_{III} = \{1, 2, 3, 4\}$. La función de pago del jugador I, se muestra en la matriz siguiente:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 7 & 8 & 0 & 2 & -10 \\ \frac{11}{3} & -\frac{7}{3} & 1 & \frac{15}{3} & 4 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 4 & -6 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Calcule el máximo asegurable del jugador I.

Ejercicio 6.7. Encuentre el máximo asegurable en estrategias mixtas de los dos jugadores para el juego:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3,-3) & (-4,4) & (1,-1) & (5,-5) \\ (5,-5) & (-3,3) & (-2,2) & (-1,1) \\ (2,-2) & (-11,11) & (4,-4) & (-9,9) \\ (1,-1) & (1,-1) & (-1,1) & (1,-1) \\ (7,-7) & (0,0) & (6,-6) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ejercicio 6.8. Demuestre la proposición 6.2.6 que dice que si X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, entonces $E_j(X^*) \geq v_j$.

Ejercicio 6.9. Demuestre que en un juego antagónico (em),

a) si X^* es un punto silla, entonces $E_j(X^*) = v_j$ para toda j.

b) si X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, entonces $E_j(X^*) = v_j$ para toda j.

c) si X^* es tal que X^{*j} es conservadora para cada j, entonces $E_j(X^*) = v_j$ para toda j.

Ejercicio 6.10. Demuestre la proposición 6.3.6 que dice que si $(N, \{D_j\}_{j \in N}, \varphi)$ es antagónico (em), entonces tiene punto silla (em).

Ejercicio 6.11. Demuestre la proposición 6.3.7 que dice:
Un juego bipersonal de suma cero es antagónico (em) si y sólo si la función de pago esperado del jugador 1 tiene punto silla (em).

Ejercicio 6.12. Demuestre la proposición 6.3.10 que dice:
En un juego bipersonal de suma cero las tres afirmaciones siguientes son equivalentes para un perfil de estrategias mixtas X^*:

a) X^* es punto silla del juego.

b) X^* es equilibrio de Nash.

c) X^* está formado por estrategias conservadoras.

Ejercicio 6.13. Demuestre la proposición 6.3.11 que dice:
Si un juego es antagónico en estrategias mixtas, entonces se cumplen:

a) X^* es punto silla (em) del juego si y sólo si X^* es un perfil de estrategias mixtas conservadoras.

b) Si X^* es punto silla (em) del juego, entonces X^* es equilibrio de Nash (em).

Ejercicio 6.14. Justifique la validez del método geométrico para calcular las estrategias conservadoras y el máximo asegurable del jugador j en un juego $2 \times m$.

Ejercicio 6.15. Calcule el máximo asegurable y estrategias conservadoras de los jugadores de un juego de artesanos, con más de dos jugadores diseñado por usted.

Ejercicio 6.16. Construya un juego antagónico (em) que tenga dos jugadores, pero que no sea de suma constante y que no sea antagónico (ep).

Ejercicio 6.17. Construya un juego antagónico (em) que tenga más de dos jugadores y que no sea antagónico (ep).

Ejercicio 6.18. Considere los juegos siguientes y calcule para cada uno los máximos asegurables de todos los jugadores en estrategias puras. ¿Cuáles de estos juegos son antagónico (ep)?

Calcule para cada juego los máximos asegurables de todos los jugadores en estrategias mixtas. Utilice el método geométrico y el de programación lineal. ¿Cuáles de estos juegos son antagónico (em)?

a)

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0,4) & (7,-1) & (3,1) & (1,5) \\ (7,0) & (3,1) & (9,2) & (6,3) \end{pmatrix} \end{array}.$$

b) Los 3 capitalistas mayores de un país tienen gran cantidad de dólares invertidos en dicho país y están obteniendo enormes ganancias. Sin embargo, en los últimos días empiezan a correr fuertes rumores de que se aproximan acontecimientos políticos que pueden poner en peligro sus inversiones.

Tienen que decidir i) si sacan sus dólares del país para proteger su capital, aunque por algún tiempo sus ganancias desaparezcan (no habría pérdida de capital) o ii) si asumen el riesgo y dejan sus inversiones donde están.

La función de pago φ de este conflicto puede construirse como

$$\varphi_j\left(\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3\right)=\begin{cases}0 & \text{si } \sigma^j=\text{sacar},\\ 5 & \text{si } \sigma^j=\text{no sacar y la mayoría no saca},\\ -10 & \sigma^j=\text{no sacar y la mayoría saca.}\end{cases}$$

Ejercicio 6.19. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y justifique su respuesta.

a) Si $(N,\{D_j\},\varphi)$ es antagónico en estrategias puras, entonces es antagónico en estrategias mixtas.

b) Si σ^j es una estrategia conservadora del jugador j en estrategias puras, entonces lo es en estrategias mixtas.

c) Si σ^j es una estrategia conservadora del jugador j en estrategias mixtas, entonces lo es en estrategias puras.

Ejercicio 6.20. ¿Cuál de las cuatro afirmaciones contrapuestas siguientes es cierta? Justifique su respuesta.

a) El máximo asegurable en estrategias puras de cualquier jugador j, en un juego rectangular finito, es igual al máximo asegurable de j en estrategias mixtas.

b) El máximo asegurable en estrategias puras de cualquier jugador j, en un juego rectangular finito, es mayor al máximo asegurable de j en estrategias mixtas.

c) El máximo asegurable en estrategias puras de cualquier jugador j, en un juego rectangular finito, es menor o igual al máximo asegurable de j en estrategias mixtas.

d) La relación entre el máximo asegurable en estrategias puras de un jugador j y el máximo asegurable de j, en estrategias mixtas puede ser mayor, igual o menor, dependiendo del juego y/o del jugador.

Capítulo 7

Equilibrios Perfectos en Subjuegos

7.1. Planteamiento del Problema

Como se pudo apreciar en el capítulo 5, la forma normal de un juego puede ser enorme. Desde luego, no es práctico pasar un juego extensivo finito de información perfecta a su forma normal. El algoritmo de inducción hacia atrás o de Zermelo resultó muy útil, pues resulta más fácil construir un equilibrio en dichos juegos, con dicho algoritmo, en el contexto de las estrategias puras, en vez de pasar el juego a su forma normal. Además, los equilibrios que se pueden construir con dicho algoritmo, los llamados equilibrios perfectos en subjuegos, son preferibles a los que no lo son, pues protegen contra errores a los jugadores. Existen juegos con información no perfecta, que aparecieron en el capítulo 3, para los que también, resulta útil dicho algoritmo; pero, en general, cuando no hay información perfecta, puede haber problemas. Es muy común que surjan, en el proceso del algoritmo, subjuegos o juegos podados que no tengan equilibrio de Nash en estrategias puras y que, por ello, el algoritmo termine con un fracaso. En el contexto de las estrategias mixtas, en cambio, tenemos la ventaja de que todo juego finito tiene equilibrio de Nash ¿Podremos, entonces, examinar los subjuegos de un juego Γ, para construir un buen equilibrio de Γ?

En todo este capítulo, vamos a considerar juegos extensivos Γ que se pueden descomponer en un vértice B. Recordemos que, en esa situación, cualquier estrategia pura σ^j de un jugador, se puede descomponer en una estrategia para Γ_B, el subjuego que empieza en B y una estrategia para $\Gamma\,|B$, el "juego" que resulta del original Γ, después de podarle dicho subjuego.

Recíprocamente, dadas $\sigma^{j\,*}$ y $\sigma^{j\,**}$, estrategias puras de un jugador j, para el subjuego y para el juego podado, respectivamente, construimos la composición $(\sigma^{j\,*}, \sigma^{j\,**})$ para el juego Γ. Estas operaciones fueron la clave para la construcción del algoritmo de inducción hacia atrás o algoritmo de Zermelo y de los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras. Ahora, generalizamos esos conceptos para las estrategias mixtas.

Sin embargo, las estrategias mixtas de un juego Γ están construídas sobre su forma normal que ha perdido información sobre los subjuegos. ¿Qué relación podemos establecer entre las estrategias mixtas de Γ y las de los juegos Γ_B y Γ/B? Las operaciones de composición y descomposición de estrategias mixtas son difíciles y pueden introducirse en formas distintas, dando lugar a resultados distintos. Nosotros dejaremos este problema para la última sección del capítulo.

En los juegos de memoria o recuerdo perfecto, las estrategias mixtas toman la forma de estrategias de comportamiento que introdujo Kuhn [30] y son una generalización natural de las estrategias de un juego extensivo, como se definieron en **??**. En estos juegos (cuando son finitos), en los que las personas no olvidan lo que ya conocían, el algoritmo de Zermelo en estrategias de comportamiento siempre tiene éxito. Por lo que siempre se pueden construir los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias de comportamiento (o de la mano temblorosa), los que serían seleccionados según los que criterios de Harsanyi y Selten [26]. Estos temas los desarrollaremos en la sección **??** y la 7.3. En juegos de memoria no perfecta, los conceptos de estrategias de comportamiento y mixta no son equivalentes.

Algunos de los juegos más interesantes de memoria perfecta son los juegos repetidos. Es decir, aquellos juegos que consisten en repetir, ya sea con horizonte finito o infinito, un juego rectangular dado que se llama el juego estado. Como era de esperarse, en los juegos repetidos aparecen otros equilibrios adicionales a los del juego estado, pues resulta muy distinto que los jugadores se enfrenten en una ocasión única a que lo hagan en una enorme cantidad de ocasiones. Muy ilustrativo resulta el que en el dilema del prisionero repetido, con horizonte infinito, podamos encontrar equilibrios en los que se tiene un resultado cooperativo. En general, los juegos repetidos, los cuáles se estudian en las secciones 7.4 y 7.5, dan lugar a un enfoque dinámico de los conflictos. Es una dinámica distinta a aquellas que adelantamos en el capítulo 2 y que se estudiarán con más detenimiento en el capítulo 8.

7.2. Estrategias de Comportamiento

Definición 7.2.1. Una estrategia de comportamiento α^j del jugador j en el juego extensivo Γ es una función que a cada conjunto de información de j le asocia una distribución de probabilidad entre los índices correspondientes a ese conjunto de información.

Consideremos la versión del juego de demandas triviales que está en la figura 7.2.1. Esta versión es un juego finito de información no perfecta, a diferencia del ejemplo 2.2.11. En el juego de la figura 7.2.1, una estrategia de comportamiento del campesino es de la forma
$((x_1, 1-x_1), (x_2, x_3, 1-x_2-x_3), (x_4, 1-x_4),$
$(x_5, 1-x_5), (x_6, 1-x_6), (x_7, 1-x_7), (x_8, 1-x_8),$
$(x_9, 1-x_9), (x_{10}, 1-x_{10}), (x_{11}, 1-x_{11}), (x_{12}, 1-x_{12})),$
con $x_i \in [0,1]$, para $i = 1, 2, ..., 11, 12$.

Al conjunto de estrategias de comportamiento del jugador j lo denotamos como Ξ_j y al producto cartesiano de los conjuntos de estrategias de comportamiento de los jugadores, $\Xi_1 \times ... \times \Xi_n$, como Ξ. A los elementos de este último conjunto le llamaremos perfiles de estrategias de comportamiento.

Dado $\alpha^j \in \Xi_j$ e $i \in I_k^j$ denotamos como $P_{\alpha^j}\left(i \left| S_k^j\right.\right)$ a la probabilidad que la estrategia de comportamiento α^j le asocia al índice i, si el juego ha llegado a algún vértice $A \in S_k^j$. Es decir, $\alpha^j\left(S_k^j\right) = \left(P_{\alpha^j}\left(1 \left| S_k^j\right.\right), ..., P_{\alpha^j}\left(l\left(I_k^j\right) \left| S_k^j\right.\right)\right)$. Donde $l\left(I_k^j\right)$ es el número de índices en I_k^j.

En el mismo juego de la figura 7.2.1, las estrategias de comportamiento de la empresa, son de la forma

$$((y_1, 1-y_1), (y_2, 1-y_2), (y_3, 1-y_3), (y_4, 1-y_4), (y_5, 1-y_5), (y_6, 1-y_6)).$$

Las estrategias de comportamiento tienen un papel semejante a las estrategias de un juego extensivo finito y al igual que éstas determinan una distribución de probabilidad entre los vértices finales y se puede construir un segundo juego rectangular asociado a Γ, es decir una segunda forma normal que podríamos llamar de comportamiento. La construcción es totalmente análoga a la que hicimos en el capítulo 3.

Así, dados A y B vértices del juego Γ tales que $B \in Alt(A)$ y una estrategia de comportamiento α, $P_\alpha(B|A)$ se define como

$$P_\alpha(B|A) = \begin{cases} P(B|A) & \text{si } A \in S^0, \\ P_{\alpha^j}\left(i \left| S_k^j\right.\right) & \text{si } A \in S_k^j \text{ y } \epsilon(B) = i. \end{cases}$$

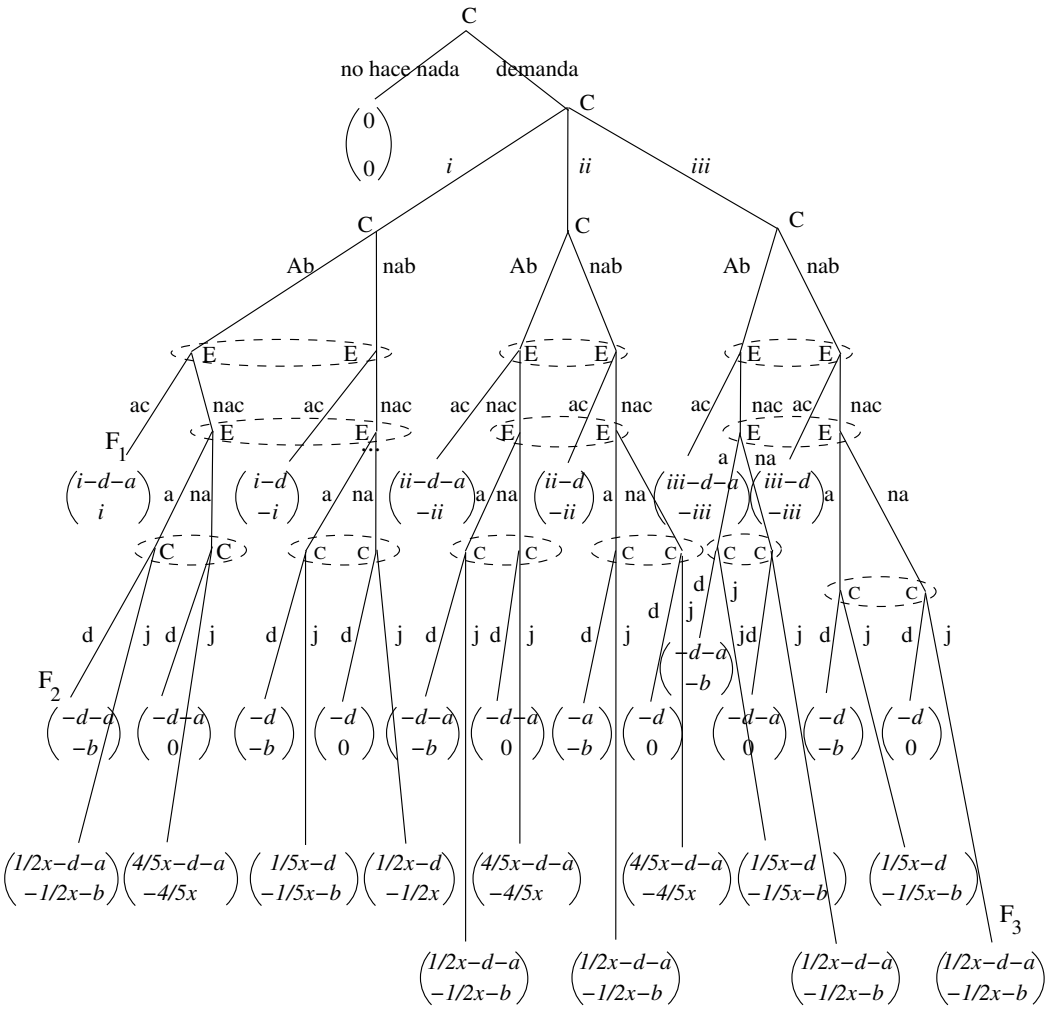

Figura 7.2.1:

Dados A y B vértices del juego Γ tales que $B > A$, consideramos la trayectoria que une al vértice A con el B, $\{C_1 = A, C_2, ..., C_r = B\}$ y definimos

$$P_\alpha\left(B\,|A\right) = P_\alpha\left(C_2\,|C_1\right) P_\alpha\left(C_3\,|C_2\right) ... P_\alpha\left(C_r\,|C_{r-1}\right).$$

Si $F \in T$, el conjunto de vértices finales de Γ, entonces $P_\alpha\left(F\right) = P_\alpha\left(F\,|U\right)$.

Proposición 7.2.2. *Sea A un vértice no final y $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\right)$ un perfil de estrategias de comportamiento de Γ. Si F es un vértice final mayor*

que A, entonces $P_\alpha(F\,|A) \geq 0$ *y* $\sum_{F\in T,\ F>A} P_\alpha(F\,|A) = 1.$

Demostración. Para cualquier $F \in T$, si $\{C_1 = U, C_2, ..., C_f = F\}$ es la trayectoria que une a U con F, es claro que $P_\alpha(F) \geq 0$, pues $P_\alpha(F) = P_\alpha(C_2\,|U)\,P_\alpha(C_3\,|C_2)\,...P_\alpha(C_f\,|C_{f-1})$ y cada $P_\alpha(C_{k+1}\,|C_k) \geq 0$.

Consideramos ahora que A es tal que $Alt\,(A) \subset T$. Es decir, l_A la longitud de la trayectoria menor que une al vértice A con algún vértice final F es igual a 1.

Si $A \in S^0$, entonces

$$\sum_{F\in T,\ F>A} P_\alpha(F) = \sum_{F\in T,\ F\in Alt(A)} P_\alpha(F) = \sum_{C_i\in Alt(A)} P(C_i\,|A) = 1.$$

Si $A \in S_k^j$,

$$\sum_{F\in T,\ F>A} P_\alpha(F) = \sum_{F\in T,\ F\in Alt(A)} P_\alpha(F) = \sum_{C_i\in Alt(A)} P_\alpha(C_i\,|A) =$$

$$\sum_{i_i\in I} P_{\alpha^j}\left(i\,\middle|\,S_k^j\right) = 1.$$

Supongamos que si l_A es menor que k, entonces

$$\sum_{F\in T,\ F>A} P_\alpha(F) = 1.$$

Sea A tal que l_A es k, entonces

$$\sum_{F\in T,\ F>A} P_\alpha(F) = \sum_{C\in Alt(A)} \sum_{F\in T,\ F>C} P_\alpha(F) =$$

$$\sum_{C\in Alt(A)} \left(\sum_{F\in T,\ F>C} P_\alpha(C\,|A)\,P_\alpha(F\,|C) \right) =$$

$$\sum_{C\in Alt(A)} P_\alpha(C\,|A) \left(\sum_{F\in T,\ F>C} P_\alpha(F\,|C) \right) = \sum_{C\in Alt(A)} P_\alpha(C\,|A) = 1.$$

∎

Corolario 7.2.3. *Dado* $\alpha = \left(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\right)$ *un perfil de estrategias de comportamiento del juego extensivo finito* Γ. *Para cada vértice* F *en* T, $P_\alpha(F) \geq 0$ *y* $\sum_{F \in T,\, F > A} P_\alpha(F \,|A) = 1$.

La demostración se obtiene aplicando la proposición 7.2.2 al caso $A = U$.

En el ejemplo de la figura 7.2.1, consideremos el perfil de estrategias de comportamiento

$$\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \left(\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right), \right. \\ \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), (0,1), (0,1), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)), \\ \left.\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), (0,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular $P_{\bar{\alpha}}(F)$ para todos los vértices finales del juego. Hagámoslo para F_1, F_2 y F_3

$P_{\bar{\alpha}}(F_1) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$,

$P_{\bar{\alpha}}(F_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{45}$,

$P_{\bar{\alpha}}(F_3) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{315}$.

La función de pago en estrategias de comportamiento es

$$\varphi^{(c)} : \Xi \to R^n,$$

definida como

$$\varphi^{(c)}(\alpha) = \sum_{F \in T} P_\alpha(F)\, \pi(F).$$

Podemos llamar la forma normal de comportamiento de Γ al juego rectangular $\left(N, \{\Xi_j\}_{j \in N}, \varphi^{(c)}\right)$. Este juego rectangular es infinito.

Podemos hacer la definición de equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento, en la forma natural. La notación $\left(\alpha \,|\widehat{\alpha}^j\right)$ tiene el significado acostumbrado, es decir, $\left(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^{j-1}, \widehat{\alpha}^j, \alpha^{j+1}, ..., \alpha^n\right)$.

Definición 7.2.4. $\alpha^* \in \Xi$ es un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento si, para todo jugador j, $\varphi_j^{(c)}(\alpha^*) \geq \varphi_j^{(c)}\left(\alpha^* \,|\alpha^j\right)$, para toda $\alpha^j \in \Xi_j$.

$\left(N, \{\Xi_j\}_{j \in N}, \varphi^{(c)}\right)$ es tan difícil de trabajar como $\left(N, \{M_j\}_{j \in N}, E\right)$. En realidad, al trabajar con estrategias de comportamiento no se pasa a ninguna forma normal. Cuando son realmente interesantes este tipo de estrategias es en los juegos de memoria perfecta que son una generalización muy importante de los juegos de información perfecta. Estos juegos son aquellos en los que cada jugador es una sola persona y no un equipo con más de

un componente y, además, dicha persona no tiene problemas de amnesia. En este contexto, podremos hablar de equilibrio perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento y, cuando los juegos de memoria perfecta son finitos, siempre existe uno de estos equilibrios, estableciéndose una generalización del teorema **??**. Los equilibrios, del caso finito, se pueden construir con una nueva versión del algoritmo de inducción hacia atrás (Zermelo).

Formalmente:

Definición 7.2.5. Decimos que un juego extensivo Γ es de memoria perfecta, si para cualesquiera dos vértices A y B del jugador j, tales que $A \leq B$, $A \in S_k^j$ y $B \in S_{k'}^j$, se cumple que $S_{k'}^j \subseteq S_{\overline{\iota}}$, donde $\overline{\iota} = \iota(C)$, $C \in Alt(A)$, $C \leq B$ y $S_{\overline{\iota}}$ es el conjunto de los vértices mayores o iguales que aquellas alternativas de vértices de S_k^j que tienen índice igual a $\overline{\iota}$.

Los juegos de información perfecta son de memoria perfecta. Juegos que no son de información perfecta, pero sí de memoria perfecta son el póker y, cómo adelantábamos, todos aquellos juegos en que cada jugador es una sola persona, sin problemas de amnesia. En cambio, si suponemos que las personas no tienen problemas con su memoria, para que un juego no sea de memoria perfecta es necesario que alguno de los jugadores sea un equipo con más de un componente y que todos ellos tengan que tomar sus decisiones, sin poder comunicarse entre sí. Por ejemplo, el dominó y el bridge no son de memoria perfecta. Para los que sí lo son, las estrategias mixtas resultan equivalentes a las de comportamiento, pero estas últimas resultan mucho más cómodas de manejar, pues no es necesario trabajar con ninguna forma normal del juego extensivo. El juego de la figura 7.2.1 es de información no perfecta, pero de memoria perfecta.

Dado un juego Γ que se puede descomponer en un vértice A y una estrategia de comportamiento $X^j \in \Xi_j$, la operación de descomponerla en una estrategia de comportamiento para Γ_A y otra para $\Gamma|A$ y la operación de componer dos estrategias de comportamiento, una para Γ_A y otra para $\Gamma|A$ y obtener una estrategia de comportamiento de Γ se definen en una forma muy similar a dichas operaciones para las estrategias de un juego extensivo (ver capítulo 3).

Definición 7.2.6. Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en un vértice A y sea X^j una estrategia de comportamiento de j en el juego Γ. Podemos considerar la descomposición de X^j en X_A^j y en $X^j|A$. Donde X_A^j es la restricción de X^j a la colección de conjuntos de información de j que pertenecen a Γ_A y $X^j|A$ es la restricción de X^j a la colección de conjuntos de información de j que pertenecen a $\Gamma|A$.

Definición 7.2.7. Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en un vértice A y sea $\widehat{X}^j$ una estrategia de comportamiento de j en el juego Γ_A y $\widehat{\widehat{X}}^j$ una estrategia de comportamiento de j en el juego $\Gamma\,|A$. Podemos considerar la composición de $\widehat{X}^j$ y $\widehat{\widehat{X}}^j$, para construir $\left(\widehat{X}^j, \widehat{\widehat{X}}^j\right)$ una estrategia de Γ, definida como

$$\left(\widehat{X}^j, \widehat{\widehat{X}}^j\right)\left(S_i^j\right) = \begin{cases} \widehat{X}^j\left(S_i^j\right) & \text{si } S_i^j \text{ pertenece a } \Gamma_A, \\ \widehat{\widehat{X}}^j\left(S_i^j\right) & \text{si } S_i^j \text{ pertenece a } \Gamma\,|A. \end{cases}$$

Definición 7.2.8. Un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de Γ es perfecto en subjuegos, si la restricción a cualquier subjuego de Γ es equilibrio en estrategias de comportamiento de dicho subjuego.

En forma natural, se puede generalizar el algoritmo de inducción hacia atrás a un juego de memoria perfecta finito, para construir un perfil de estrategias de comportamiento que tendrá la propiedad de ser equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento. Esto requiere una generalización del lema **??**, para justificar el nuevo algoritmo.

Lema 7.2.9. *Sea Γ un juego extensivo que se puede descomponer en el vértice A. Para todo perfil de estrategias de comportamiento $X \in \Xi$,*

$$\varphi^{(c)}(X) = \varphi^{(c)}\left|A_{\varphi_A^{(c)}(X_A)}\,(X\,|A)\right. .$$

Demostración. Toda $X \in \Xi$, se puede considerar como la composición $(X_A, X\,|A)$.

$$\varphi^{(c)}(X) = \sum_{F \in T_A} P_X(F)\,\pi(F) + \sum_{F \in T|A} P_X(F)\,\pi(F) =$$

$$P_X(A)\,\varphi_A^{(c)}(X_A) + \sum_{F \in T|A} P_X(F)\,\pi(F).$$

Por su lado,

$$\varphi\left|A_{\varphi_A^{(c)}(X_A)}\,(X\,|A)\right. = P_X(A)\,\varphi_A^{(c)}(X_A) + \sum_{F \in T|A} P_X(F)\,\pi(F).$$

∎

Teorema 7.2.10. *Sea Γ un juego que se puede descomponer en A, $\widehat{X}$ un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de Γ_A, y $\widehat{\widehat{X}}$ un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de $\Gamma\left|A_{\left(\varphi_A^c(\widehat{X})\right)}\right.$. Entonces $(\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})$ es un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de Γ.*

Demostración. Sea $j \in N$ y $X^j \in \Xi_j$, tenemos que $\varphi_j^{(c)}\left((\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})\left|X^j\right.\right) =$

$$P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X_A^j\right.\right)}(A)\,\varphi_{jA}^{(c)}\left(\left(\widehat{X}\left|X_A^j\right.\right)\right) + \sum_{F\in T|A} P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X^j\right.\right)}(F)\,\pi_j(F).$$

Como $\widehat{X}$ es equilibrio de Γ_A,

$$\varphi_{jA}^{(c)}\left(\left(\widehat{X}\left|X_A^j\right.\right)\right) \leq \varphi_{jA}^{(c)}\left(\widehat{X}\right).$$

Es decir,

$$\varphi_j^{(c)}\left((\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})\left|X^j\right.\right) \leq$$

$$P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X_A^j\right.\right)}(A)\,\varphi_{jA}^{(c)}\left(\widehat{X}\right) + \sum_{F\in T|A} P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X_A^j\right.\right)}(F)\,\pi_j(F).$$

Pero por el lema 7.2.9,

$$P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X_A^j\right.\right)}(A)\,\varphi_{jA}^{(c)}\left(\widehat{X}\right) + \sum_{F\in T|A} P_{\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X_A^j\right.\right)}(F)\,\pi_j(F) = \varphi^{(c)}\left|A_{\varphi_A^{(c)}(\widehat{X})}\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X^j\right.\right)\right..$$

Además, $\widehat{\widehat{X}}$ es un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de $\Gamma\left|A_{\left(\varphi_A^{(c)}(\widehat{X})\right)}\right.$, por lo que

$$\varphi_j^{(c)}\left|A_{\varphi_A(\widehat{X})}\left(\widehat{\widehat{X}}\left|X^j\right.\right)\right. \leq \varphi_j^{(c)}\left|A_{\varphi_A(\widehat{X})}\left(\widehat{\widehat{X}}\right)\right..$$

Aplicando de nuevo el lema 7.2.9, tenemos

$$\varphi_j^{(c)}\left|A_{\varphi_A(\widehat{X})}\left(\widehat{\widehat{X}}\right)\right. = \varphi_j^{(c)}\left((\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})\right).$$

Uniendo todos los resultados se obtiene, finalmente, que

$$\varphi_j^{(c)}\left((\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})\left|X^j\right.\right) \leq \varphi_j^{(c)}\left((\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})\right),$$

para todo jugador j y para toda $X^j \in \Xi_j$. Es decir, $(\widehat{X},\widehat{\widehat{X}})$ es un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento de Γ. ∎

7.3. Juegos de Memoria Perfecta

Construiremos, ahora, el algoritmo de Zermelo para juegos de memoria perfecta.

Algoritmo 4 (Inducción hacia atrás para estrategias de comportamiento). *Sea Γ un juego extensivo finito de memoria perfecta.*

Primer paso:Definimos Γ^0 como Γ.

Tenemos dos casos:

a) Si Γ^0 no se puede descomponer, Γ^0 es en esencia un juego rectangular. Cada jugador tiene un solo conjunto de información. Por el teorema de Nash, este juego rectangular tiene al menos un equilibrio en estrategias mixtas, se elige uno de ellos, digamos X^*. Este es un equilibrio en estrategias de comportamiento de $\Gamma^0 = \Gamma$; el algoritmo termina con el equilibrio buscado.

b) Si Γ^0 se puede descomponer en al menos un vértice, buscamos un subjuego $\Gamma^0_{A_1}$ que no se pueda descomponer (siempre existe pues Γ es finito). Como Γ^0 y $\Gamma^0_{A_1}$ son de memoria perfecta, entonces $\Gamma^0_{A_1}$ es en esencia un juego rectangular. Cada jugador tiene un sólo conjunto de información. Este juego rectangular tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Se elige uno, llamémosle $X^*_{A_1}$, y construyamos $\Gamma^0\Big|A_{1\left(\varphi^{(c)}_{A_1}\left(X^*_{A_1}\right)\right)}$. Definimos Γ^1 como $\Gamma^0\Big|A_{1\left(\varphi^{(c)}_{A_1}\left(X^*_{A_1}\right)\right)}$.

Paso general: Consideremos que se han dado k pasos del algoritmo, con lo que se han construido $\Gamma^0, \Gamma^1, ..., \Gamma^{k-1}$, Γ^k juegos de memoria perfecta, tales que, cada Γ^{i-1} se puede descomponer en un vértice A_i y $\Gamma^{i-1}_{A_i}$ no se puede descomponer y que se han elegido $X^*_{A_1}, X^*_{A_2}, ..., X^*_{A_k}$ perfiles, donde $X^*_{A_i}$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de $\Gamma^{i-1}_{A_i}$. Además, $\Gamma^i = \Gamma^{i-1}\Big|A_{i\left(\varphi^{(c)}_{A_i}\left(X^*_{A_i}\right)\right)}$.

Definimos Γ^{k+1} como

$$\Gamma\Big|A_{1\left(\varphi^{(c)}_{A_1}\left(X^*_{A_1}\right)\right)}\Big|A_{2\left(\varphi^{(c)}_{A_2}\left(X^*_{A_2}\right)\right)}\cdots\Big|A_{k\left(\varphi^{(c)}_{A_k}\left(X^*_{A_k}\right)\right)}$$

o, lo que es lo mismo, como

$$\Gamma^k\Big|A_{k\left(\varphi^{(c)}_{A_k}\left(X^*_{A_k}\right)\right)}.$$

Γ^{k+1} es de memoria perfecta y tenemos dos casos:

a) Γ^{k+1} *no se descompone. Como tanto* Γ^k *como* Γ^{k+1} *son de memoria perfecta, entonces* Γ^{k+1} *es en esencia un juego rectangular y tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Elegimos uno de ellos al que denotamos como* X^{**}*. El algoritmo termina con la composición de* $X^*_{A_1}, X^*_{A_2}, ..., X^*_{A_k}$, X^{**} *que es un equilibrio perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento de* Γ*.*

b) Γ^{k+1}*se puede descomponer en al menos un vértice; buscamos un subjuego* $\Gamma^{k+1}_{A_{k+1}}$ *que no se pueda descomponer (siempre existe pues* Γ *es finito).* $\Gamma^{k+1}_{A_{k+1}}$ *es en esencia un juego rectangular y tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Elegimos uno de ellos al que denotamos como* $X^*_{A_{k+1}}$ *y definimos* Γ^{k+2} *como*

$$\Gamma\Big|A_{1\left(\varphi^{(c)}_{A_1}\left(X^*_{A_1}\right)\right)}\cdots\Big|A_{k\left(\varphi^{(c)}_{A_k}\left(X^*_{A_k}\right)\right)}\Big|A_{k+1\left(\varphi^{(c)}_{A_{k+1}}\left(X^*_{A_{k+1}}\right)\right)}$$

o lo que es lo mismo $\Gamma^{k+1}\Big|A_{k+1\left(\varphi^{(c)}_{A_{k+1}}\left(X^*_{A_{k+1}}\right)\right)}$ *y continuamos con el paso general, ahora aplicado a* Γ^{k+2}*.*

Uno de los primeros criterios de selección de Harsanyi y Selten [26] es preferir los equilibrios perfectos en subjuegos a los que no lo son. La solución propuesta por Harsanyi y Selten es siempre un equilibrio perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento. Recordemos que estos equilibrios previenen a los jugadores contra errores, tanto suyos como de los demás jugadores, y contra algunas perturbaciones del juego.

Los equilibrios construidos con el algoritmo de Zermelo son perfectos en subjuegos.

Teorema 7.3.1. *El algoritmo de Zermelo o de inducción hacia atrás para juegos finitos de información perfecta termina en un número finito de pasos construyendo un equilibrio perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento.*

Demostración. Todos los pasos son realizables, no hay repeticiones y el número de vértices es finito. Por inducción y aplicando repetidamente el teorema 7.2.10, se obtiene la demostración. ∎

Tenemos, entonces, el siguiente corolario.

Corolario 7.3.2. *Todo juego de memoria perfecta tiene al menos un equilibrio perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento.*

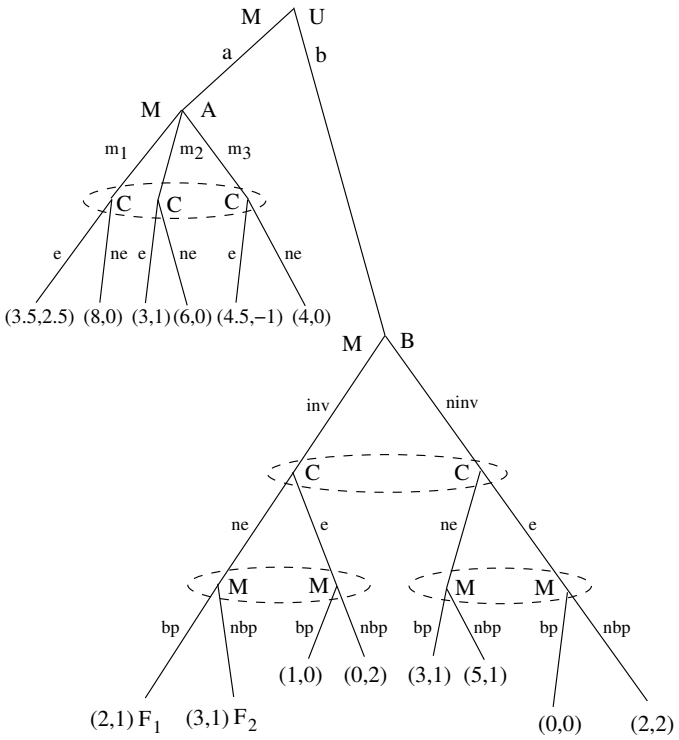

Figura 7.3.1:

Ejemplo 7.3.1. Consideremos un monopolio M que quiere decidir el tipo de conflicto que le conviene imponer a su posible competidor C: a) una versión con información no perfecta, pero memoria perfecta del ejemplo 2.2.2 (Γ_B) o b) el conflicto del ejemplo 1.3.3 c). considerado como juego extensivo de jugadas simultáneas (Γ_A). Ver la figura 7.3.1.

La forma normal de Γ_A es

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{Entrar} & \textit{No entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3.5, 2.5) & (8, 0) \\ (3, 1) & (6, 0) \\ (4.5, -1) & (5, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Eliminando la estrategia m_2 que está dominada, obtenemos

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{Entrar} & \textit{No entrar} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (3.5, 2.5) & (8, 0) \\ (4.5, -1) & (5, 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

cuyo único equilibrio de Nash es $\left(\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right),\left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)\right)$, luego el único equilibrio de Nash de Γ_A es $\left(\left(\frac{3}{5},0,\frac{2}{5}\right),\left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)\right)$.

Por otro lado, la forma normal del subjuego Γ_B es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (entrar) & (no\ entrar) \end{array} \\ \begin{array}{c} (inv,bp,bp) \\ (inv,bp,nbp) \\ (inv,nbp,bp) \\ (inv,nbp,nbp) \\ (ninv,bp,bp) \\ (ninv,bp,nbp) \\ (ninv,nbp,bp) \\ (ninv,nbp,nbp) \end{array} & \left(\begin{array}{cc} (1,0) & (2,1) \\ (1,0) & (2,1) \\ (0,2) & (3,1) \\ (0,2) & (3,1) \\ (0,0) & (3,1) \\ (2,2) & (5,1) \\ (0,0) & (3,1) \\ (2,2) & (5,1) \end{array}\right) \end{array}$$

El subjuego Γ_B tiene dos equilibrios en estrategias puras

$$((no\ invertir, bajar\ precios, no\ bajar\ precios), entrar) \text{ y}$$

$$((no\ invertir, no\ bajar\ precios, no\ bajar\ precios), entrar).$$

En cualquiera de ellos el pago es $(2,2)$. Tiene, además, otros equilibrios en estrategias mixtas. Supongamos que elegimos el primer equilibrio en estrategias puras .

Entonces, después de podar el juego, tanto en A como en B, obtenemos $\Gamma\left|A_{\left(\frac{209}{35},\frac{11}{35}\right)}\right|B_{(2,2)}$. En este juego sólo participa M y su forma normal es

$$\begin{array}{c} Elegir\ A \\ Elegir\ B \end{array}\left(\begin{array}{c} \frac{209}{35} \\ 2 \end{array}\right).$$

El único equilibrio de Nash de $\Gamma\left|A_{\left(\frac{209}{35},\frac{11}{35}\right)}\right|B_{(2,2)}$ es $(1,0)$.

En resumen, en Γ, un equilibrio de estrategias de comportamiento es

$\left(X^{C*},X^{M*}\right)$.

$X^{C*}\left(S_1^C\right) = \left(\frac{2}{7},\frac{5}{7}\right)$,

$X^{C*}\left(S_2^C\right) = (1,0)$,

$X^{M*}\left(S_1^M\right) = (1,0)$,

$X^{M*}\left(S_2^M\right) = \left(\frac{3}{5},0,\frac{2}{5}\right)$,

$X^{M*}\left(S_3^M\right) = (0,1)$,

$X^{M*}\left(S_4^M\right) = (1,0)$,

$X^{M*}\left(S_5^M\right) = (0,1)$.

Encontremos un equilibrio de subjuego perfecto en estrategias de comportamiento en un ejemplo de Okada y Sakakibara [41] que muestra las posibilidades de la Teoría de Juegos de hacer análisis social.

7.3.1. El Surgimiento de una Organización Social

Ejemplo 7.3.2 (Los miembros de una COMUNIDAD consideran la conveniencia de formar una ORGANIZACIÓN que los obligue a cooperar). Consideremos la comunidad N del dilema del prisionero del ejemplo 1.3.6b (El juego del parasitismo social). Este ejemplo trata sobre las familias de un barrio en el que no hay una escuela cercana y las autoridades se encargarán de establecerla si los vecinos construyen el edificio. Por cada familia que coopera, aumenta en β unidades de utilidad el beneficio recibido por cada familia, de parte de la escuela, β es menor que 1, pero mayor que $1/n$, donde n es el tamaño del grupo. Cooperar con la construcción implica la pérdida de una unidad de utilidad, por la distracción del esfuerzo para conseguir un mayor beneficio para la propia familia. Por sí misma la familia obtiene una utilidad de γ. Por supuesto, la cooperación es voluntaria, pero la escuela estará abierta para los hijos de todos, hayan cooperado o no. La función de pago para la familia j es como sigue:

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} \gamma + \beta(k_\sigma + 1) - 1 & si\ \sigma^j = Cooperar, \\ \gamma + \beta k_\sigma & si\ \sigma^j = No\ Cooperar, \end{cases}$$

donde k_σ es el número de miembros de la comunidad diferentes que j que escogieron cooperar de acuerdo a σ. Denotemos como G al juego

$$G = (N, \{D_j = \{Cooperar, No\ Cooperar\}\}, \varphi).$$

Como sabemos, el único equilibrio de Nash de G es

$$(No\ Cooperar, No\ Cooperar, ..., No\ Cooperar).$$

Es decir, no se construirá la escuela. Pero como hemos supuesto que β es mayor que $1/n$, estamos frente a una tragedia. En este juego, como ocurre en cualquier dilema del prisionero, el pago de cualquier miembro de la comunidad, cuando todos cooperan, es mejor que cuando nadie coopera.

Las familias de la comunidad envuelta en un conflicto como el que se describe quizá no se quede con los brazos cruzados ante la tragedia. Es natural que intenten formar un grupo que voluntariamente convierta en obligatoria la cooperación. El nuevo conflicto se puede expresar a través de un juego extensivo que consta de varias etapas.

Etapa de Formación de una Organización.

Cada familia considera si le conviene participar en una organización S que haga obligatoria la cooperación entre los miembros de S imponiendo un

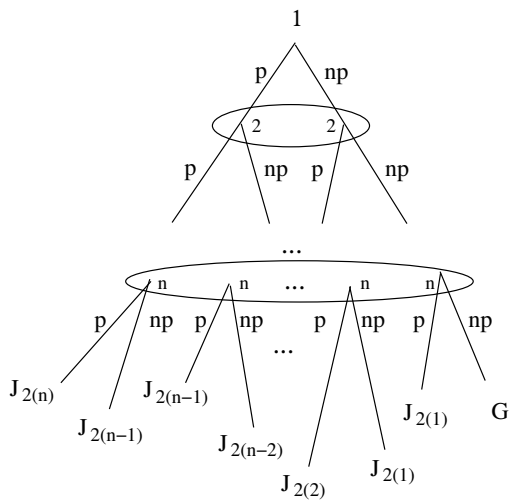

Figura 7.3.2:

castigo a las familias que habiéndose comprometido con S no cooperen. Si no hay por lo menos dos familias dispuestas a cooperar la comunidad desiste de organizarse y se juega G. Cuando se forma una organización, una de las familias (i^*) se encargará de vigilar la cooperación de los demás miembros de S y de castigarlos si no cumplen. i^* no podrá obtener ninguna utilidad por sí misma (ver figura 7.3.2).

Etapas de tipo 2. Se ha formado una organización S. Cada una de las s familias que pertenecen a S deben elegir un par de valores (p, θ), donde p es un real positivo que representa el castigo para los incumplidos y $\theta \in (0,\ 1)$ es la parte de la cantidad reunida por las familias que cooperan que servirá para sostener a la familia i^* encargada de vigilar y castigar. El castigo disminuye el pago del infractor, pero no afecta el de los demás. Si cada $j \in S$ ha elegido un par $\left(p^j, \theta^j\right)$, el acuerdo alcanzado será el mínimo θ^j y el máximo p^j (ver figura 7.3.3).

Etapas de tipo 3. Se ha formado una organización S y se ha elegido la pareja (p, θ). Al azar se elige a la familia i^* que debe decidir si acepta o no el salario $\theta\,(s-1)$. Si el elegido por el azar no acepta, se deshace la organización y se juega G; si acepta se pasa a una etapa final (ver figura 7.3.4).

Etapas finales. Caso a) s familias se organizaron tomaron los acuerdos p y θ y eligieron a i^* que ha aceptado el cargo. Entonces cada una de las familia de $N-\ \{i^*\}$ debe elegir si coopera o no.

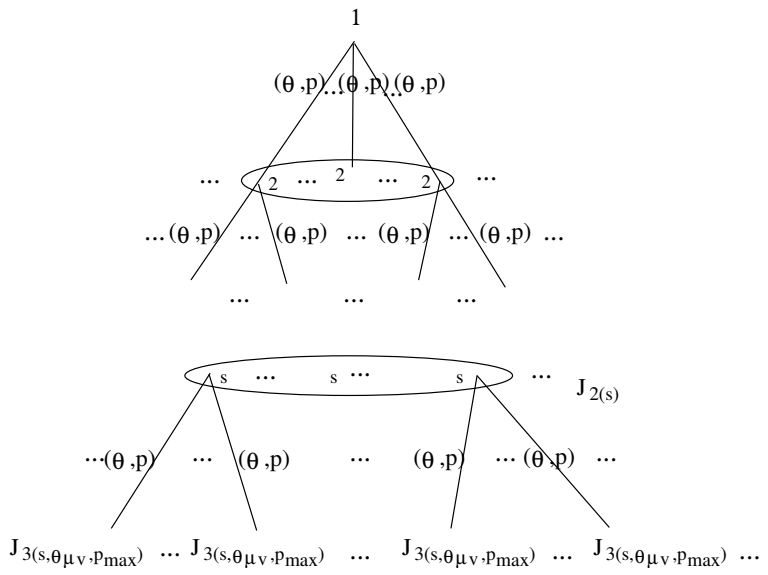

Figura 7.3.3:

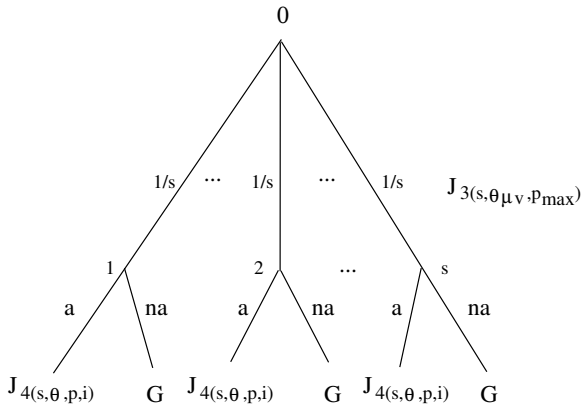

Figura 7.3.4:

El pago para $j \in N- \{i^*\}$ está dado por la función

$$\widetilde{\varphi}_{j(p,\theta)}(a) = \begin{cases} \gamma + \beta(1-\theta)(s_a+1) - 1 & \text{si } a^j = C, \\ \gamma + \beta(1-\theta)\, s_a & \text{si } a^j = NC \text{ y } j \notin S, \\ \gamma + \beta(1-\theta)\, s_a - p & \text{si } a^j = NC \text{ y } j \in S, \end{cases}$$

donde a es el vector de decisiones de los individuos de $N - \{i^*\}$ y s_a es el número de los que cooperan de acuerdo al vector a, sin contar a j. En este

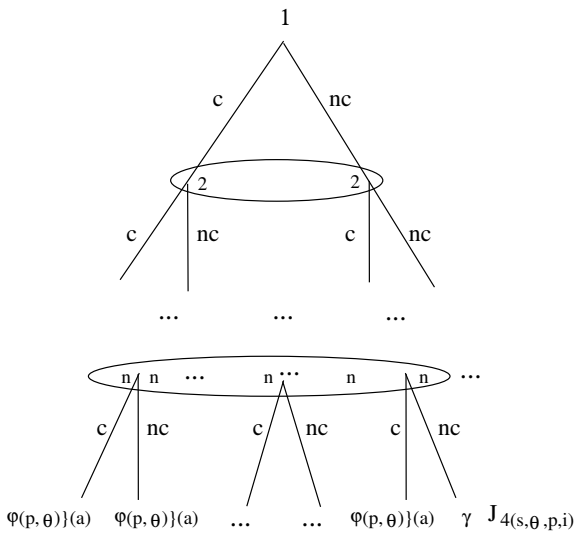

Figura 7.3.5:

caso el modelo extensivo es como la figura 7.3.5, pero con $n-1$ jugadores.

Caso b) Se juega G (ver figura 7.3.5).

El juego extensivo correspondiente al proceso que acabamos de describir estaría compuesto con figuras de los tipos 7.3.2–7.3.5.

Construcción de un Equilibrio Perfecto en Subjuegos en Estrategias de Comportamiento.

Llamemos Γ al juego completo. Este juego no tiene partidas infinitas, pero no es finito, pues algunos vértices tienen un número infinito de alternativas. Sin embargo, podemos construir un equilibrio de subjuego perfecto mediante el algoritmo de Zermelo para estrategias de comportamiento. A grandes rasgos el proceso seguiría el camino siguiente:

Análisis de los subjuegos correspondientes a las etapas finales.

Para el llamado caso b la solución es conocida, pues se trata del juego G que es el dilema del prisionero del ejemplo 1.3.6 b). Ninguna familia coopera y cada una gana γ.

Respecto al caso a:

Examinemos primero la conducta de una familia j que no pertenece a S. Denotemos como a_j a una estrategia arbitraria de j en el subjuego que

se analiza. A las estrategias de un jugador en un subjuego le llamaremos acciones, para distinguirlas de las estrategias en el juego completo. Dado un perfil de acciones a, denotemos como s_a al número de individuos, distintos a j, que eligieron cooperar de acuerdo al perfil a.

Si j elige cooperar ganará

$\gamma + \beta (1 - \theta) (s_a + 1) - 1$

y, si elige no cooperar, ganará

$\gamma + \beta (1 - \theta) s_a$.

El segundo pago es siempre mayor que el primero, pues $\beta (1 - \theta)$ es menor que 1, es decir las familias que no pertenecen a S no cooperan en el equilibrio de los subjuegos finales.

Supongamos que j está en S. Entonces

si j elige cooperar ganará

$\gamma + \beta (1 - \theta) (s_a + 1) - 1$

y, si elige no cooperar, ganará

$\gamma + \beta (1 - \theta) s_a - p$.

El segundo pago es mayor que el primero si y sólo si,

$p < 1 - \beta (1 - \theta)$.

Si $p = 1 - \beta (1 - \theta)$, a cada j en S le sería indiferente cooperar o no cooperar pues le producirían el mismo pago.

Es decir, en un equilibrio de Nash del subjuego:

Si $p < 1 - \beta (1 - \theta)$ los miembros de S no cooperan.

Si $p > 1 - \beta (1 - \theta)$ los miembros de S cooperan.

Si $p = 1 - \beta (1 - \theta)$ los miembros de S pueden cooperar o no hacerlo.

Suponemos que los jugadores se comportarían de acuerdo al equilibrio encontrado en las etapas finales y consideramos que al podar Γ en cada uno de los vértices en que inicia una etapa final, se pondría como pagos asociados los del equilibrio correspondiente. Obtenemos, entonces, el juego podado de todos los vértices que inician etapas finales (lo denotamos Γ^1). Los subjuegos de Γ^1que corresponden a etapas en que las que hay que elegir a i^* son como los de la figura 7.3.4, con los pagos que encontramos colocados en los vértices finales correspondientes. Los jugadores son los miembros de S y la primera jugada es de azar. Además, estos subjuegos se pueden cortar a su vez en otros subjuegos en los que un solo jugador i^*, el que ha sido elegido por el azar, toma la decisión de aceptar el cargo o no aceptarlo.

Analicemos dichos subjuegos con un solo jugador:

El pago de i^* es

$$\varphi^3_{i^*}(b^{i^*}) = \begin{cases} \gamma & \text{si } b^{i^*} = \textit{no aceptar}, \\ 0 & \text{si } b^{i^*} = \textit{aceptar} \text{ y } p < 1-\beta(1-\theta), \\ \theta\,(s-1) & \text{si } b^{i^*} = \textit{aceptar} \text{ y } p \geq 1-\beta(1-\theta), \end{cases}$$

donde b^{i^*} denota la acción de i^*.

En el caso de que $p < 1-\beta(1-\theta)$, claramente a la familia i^* le conviene no aceptar, pues ella puede ganar $\gamma > 0$. Lo mismo es cietro cuando

$$p \geq 1-\beta(1-\theta), \textit{pero } \theta\,(s-1) < \gamma.$$

En cambio, si $p \geq 1-\beta(1-\theta)$ y $\theta\,(s-1) > \gamma$, a i^* le convendría aceptar.

El único caso que falta es aquel en el que $p \geq 1-\beta(1-\theta)$ y $\theta\,(s-1) = \gamma$. A i^* le es indiferente aceptar o no hacerlo.

Tenemos, ahora, juegos de azar puro, nadie toma decisiones. Los vectores de pago esperado son de la forma

$$\varphi^3_j = \begin{cases} \gamma & \text{si } p < 1-\beta(1-\theta) \text{ o } \theta\,(s-1) < \gamma, \\ \vartheta & \text{si } p \geq 1-\beta(1-\theta) \textit{ y } \theta\,(s-1) \geq \gamma, \end{cases}$$

donde $\vartheta = \frac{1}{s}\theta\,(s-1) + \frac{(s-1)}{s}(\gamma + s\beta\,(1-\theta) - 1)$.

Obtenemos, con estos pagos de equilibrio, un nuevo juego al que podemos llamar Γ^2 que resulta de podarle a Γ^1 los subjuegos que empiezan en los vértices de azar y poner los pagos de equilibrio en esos nuevos vértices finales. Podemos, para proceder con el siguiente paso del algoritmo, considerar los subjuegos que no se pueden descomponer en Γ^2.

Estos subjuegos son aquellos en las que hay que tomar acuerdos sobre p y θ. Cuando el juego ha llegado a uno de los vértices en que hay que determinar dichos parámetros, algún subconjunto de s individuos, $s \geq 2$, habría formado la organización S.

Denotamos como c^j a las acciones de j, en esta etapa. La forma normal de este subjuego es $\left(S, \{D^2_j\}, \varphi^2\right)$, con

$$D^2_j = \{(\theta^j, p^j) \mid \theta^j \text{ está en } (0,1) \text{ y } p^j > 0\}$$

y, para toda j y toda $c \in D^2_j$,

$$\begin{aligned} \varphi^2_j\,(c) &= \left(\frac{1}{s}\right)\theta_{\text{mín}}\,(s-1) + (\frac{s-1}{s})(\gamma + (s-1)\,\beta\,(1-\theta_{\text{mín}}) - 1) \\ \text{si } \theta_{\text{mín}} &\geq \gamma/(s-1) \text{ y } p_{\text{máx}} \geq 1-\beta(1-\theta_{\text{mín}}); \end{aligned}$$

$$\varphi_j^2(c) = ((s-1)/s)(\gamma - p) \quad \text{si } \theta_{\text{mín}} \geq \gamma/s \text{ y } \; p_{\text{máx}} < 1 - \beta(1 - \theta_{\text{mín}} \; \text{ y}$$
$$\varphi_j^2(c) = \gamma \quad \text{ si } \; \theta_{\text{mín}} < \gamma/s.$$

Analicemos la conducta de cualquier jugador i. Si él aspira a ganar más que γ, sabe que tiene que elegir θ^i al menos tan grande cómo $\frac{\gamma}{(s-1)}$; de otra manera no será posible que ninguna familia acepte vigilar a las otras que pertenecen a S y castigarlas si es necesario. Por el análisis que se ha hecho de las etapas finales, también sabe que alguna de las p debe ser mayor o igual que $1 - \beta(1 - \theta_{\text{mín}})$. Supongamos que las familias han escogido acciones con esas características, así que cada una ganará

$$f(\theta_{\text{mín}}) = \left(\frac{1}{s}\right)\theta_{\text{mín}}(s-1) + (\frac{s-1}{s})(\gamma + (s-1)\beta(1 - \theta_{\text{mín}}) - 1).$$

Estudiemos a la función f. Su derivada tiene la forma siguiente:

$$f\,'(\theta_{\text{mín}}) = (\frac{s-1}{s})(1 - \beta(s-1)),$$

$f\,'(\theta)$ es negativa si y sólo si $s > \frac{1}{\beta} + 1$. Es decir, f es decreciente respecto a $\theta_{\text{mín}}$, si y sólo si $s > 1/\beta + 1$. Entonces si $s > 1/\beta + 1$, no hay un equilibrio en el que los jugadores elijan de tal manera que $\theta_{\text{mín}} > \frac{\gamma}{(s-1)}$.

Por otro lado, pensemos que c^* es de tal manera que $\theta^j = \theta_{\text{mín}} = \frac{\gamma}{s-1}$ y alguna de las p^i es mayor o igual que $1 - \beta(1 - \theta_{\text{mín}})$. Si algún jugador k distinto que j y que i, uno sólo, cambia de estrategia, la ganancia de k no cambia. En cambio, si i es el único que eligió un castigo mayor o igual que $1 - \beta(1 - \theta_{\text{mín}})$ y cambia hacia un castigo menor que la cota clave, la ganancia de i será $\gamma - p_{\text{máx}}$. Si j es la que cambia $\theta^j = \frac{\gamma}{(s-1)}$ por una participación menor para el aparato, entonces, la ganancia de j se volvería γ.

¿Cuándo el pago

$$(\frac{1}{s})\left(\frac{\gamma}{(s-1)}(s-1)\right) + (\frac{s-1}{s})\left(y + (s-1)\beta\left(1 - \frac{\gamma}{(s-1)}\right) - 1\right)$$

es mayor o igual que γ? La respuesta es que esto ocurre si, y sólo si, el tamaño del grupo organizado es mayor o igual que $1/\beta + 1 + \gamma$.

Es decir, si $s > 1/\beta + 1 + \gamma$, los perfiles $\widehat{c}$, con $\widehat{c^k} = \left(\theta^k,\ p^k\right)$, tales que $\theta_{\text{mín}} = \frac{\gamma}{(s-1)}$ y $p_{\text{máx}} \geq 1 - \beta(1 - Cm/s)$, son los únicos equilibrios de Nash del subjuego. El pago que recibe cada individuo en estos equilibrios es

$$(\frac{1}{s})\left(\frac{\gamma}{(s-1)}(s-1)\right) + (\frac{s-1}{s})\left(y + (s-1)\beta\left(1 - \frac{\gamma}{(s-1)}\right) - 1\right).$$

En cambio, si s es menor que $1/\beta + 1 + \gamma$ y $\widehat{\widehat{c}}$ es de tal manera que cada k eligió $\theta^k < \gamma/(s-1)$ y la misma p, como sea, entonces $\widehat{\widehat{c}}$ es un equilibrio de Nash del subjuego. Existen muchos de estos equilibrios, pero en todos ellos los jugadores ganan γ.

Si s es igual a $1/\beta+1+\gamma$, a las familias de S les es indiferente escoger una estrategia que lleve a una organización exitosa o provocar que esta aborte, de todas maneras, cada una ganaría γ. Elijamos el equilibrio en el que las familias de S llevan a que la organización y, a la postre, la cooperación salgan adelante.

Definimos a s^* como el menor de los enteros que sea mayor que $1/\beta+1+\gamma$ al que denotamos como $[1/\beta + 1 + \gamma]_+$.

Por su lado, las familias de la comunidad que no pertenecen a S no juegan en este subjuego y ganan $\gamma + s\beta\,(1-\theta)$ o γ, dependiendo de las acciones de los miembros de S.

La continuación del algoritmo significa que el juego se ha reducido a un juego podado Γ^3 que es un juego de jugadas simultáneas, es decir un juego rectangular; los pagos en los vértices finales están determinados por los equilibrios que se escojan en el análisis previo.

La forma normal de Γ^3 es $\widehat{G} = \left(N,\ \{D_j^3\},\ \widehat{\varphi}\right)$, con $D_j^3 = \{Participar\ (P),\ No\ Participar\ (NP)\}$ para toda familia $j \in N$.

Supongamos que, en la etapa anterior, elegimos el equilibrio en donde los jugadores alcanzan más que γ.

Para toda $j \in N$ y $d \in \prod_{j \in N} D_j^3$, si s_d es el número de las familias distintas de j que escogen participar de acuerdo a d, entonces la función de pago $\widehat{\varphi}$ se define de la manera siguiente.

$$\begin{aligned}
&\widehat{\varphi}_j\,(d) = \gamma + \tfrac{s_d}{(s_d+1)}\left(s_d\beta\left(1-\tfrac{\gamma}{s_d}\right)-1\right) \quad \text{si } d^j = P \ \text{ y } \ s_d \geq s^*-1;\\
&\widehat{\varphi}_j\,(d) = \gamma \ \text{ si } d^j = P \ \text{ y } \ s_d < s^*-1;\\
&\widehat{\varphi}_j\,(d) = \gamma + (s_d-1)\,\beta\left(1-\tfrac{\gamma}{s_d-1}\right) \quad \text{si } d^j = NP \text{ y } s_d \geq s^*;\\
&\widehat{\varphi}_j\,(d) = \gamma \quad \text{si } d^j = NP \text{ y } s_d < s^*.
\end{aligned}$$

Hay varios equilibrios de Nash de $\widehat{G}$, pero supongamos que nos limitamos a los equilibrios simétricos.

Un primer resultado inmediato que se puede establecer es que si la comunidad es "pequeña", es decir, con menos familias que s^*, todas rechazarán organizarse. En cambio, si el tamaño de la comunidad es exactamente igual a s^*, todos los miembros de la población estarían de acuerdo en participar en la organización.

¿Qué ocurre cuando la comunidad tiene más familias que s^*?

El que todas las familias participen no es un equilibrio de Nash, pues cada una ganaría $\gamma + ((n-1)/n)((n-1)\beta(1-\gamma/(n-1))-1)$ y la familia que decidiera cambiar, bajo el supuesto de que las demás permanecieran participando, ganaría $\gamma + (n-2)\beta(1-\gamma/(n-2))$ que es un pago mayor.

El que nadie participe en la formación de la organización sí es un equilibrio de Nash de Γ^3; en este equilibrio todos ganan γ.

Cuando el número de familias es mayor que s^*, resulta que existe un equilibrio simétrico en estrategias mixtas en el que los jugadores ganan más que γ.

Sea $X^* = ((\alpha^*, 1-\alpha^*), (\alpha^*, 1-\alpha^*), ..., (\alpha^*, 1-\alpha^*))$, con $\alpha^* \in (0,1)$.

El perfil X^* es equilibrio de Nash del juego Γ^3 si y sólo si, para toda familia j, $E_j(X^* \mid P) = E_j(X^* \mid NP)$. Tenemos que

$$E_j(X^* \mid P) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha^{*\,i} (1-\alpha^*)^{n-1-i} \varphi_j^4 (i \mid P) \quad \text{y}$$

$$E_j(X^* \mid NP) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \alpha^{*\,i} (1-\alpha^*)^{n-1-i} \varphi_j^4 (i \mid NP),$$

donde i es el número de familias que ha decidido cooperar, distintas de j, $(i \mid P)$ significa que, en estas condiciones, j elige P; por último $(i \mid NP)$ significa que j elige NP, mientras i han elegido P.

Existe una α única que cumple la ecuación anterior. Los detalles de la demostración se pueden revisar en el artículo de Okada y Sakakibara (1991).

Con el análisis anterior hemos encontrado, con el algoritamo de Zermelo, varios equilibrios perfectos en subjuegos. Algunos de estos equilibrios son en estrategias puras y otros en estrategias de comportamiento, en particular uno uno de estos últimos es simétrico y el vector de pagos que determina no está dominado.

Pensemos en el equilibrio perfecto en subjuegos, simétrico y no dominado en estrategias de comportamiento y veamos que nos enseña sobre la conducta de la comunidad.

Observaciones.

1. Una organización no puede ser sólida si el castigo que decide imponerle a sus miembros infractores es más pequeño que lo que ellos esperan incrementar sus respectivas ganancias por no cooperar. Es decir, p

debe ser mayor o igual a $(1-\beta(1-\theta))$. Por otro lado, $1-\beta(1-\theta)$ es la cantidad que provoca que los que no pertenecen a S no cooperen.

En el equilibrio los que no participan en S no cooperan, pero se benefician de las aportaciones de los que sí participan en ella.

2. La persona encargada de realizar las tareas de vigilar y castigar es un empleado al servicio de la comunidad y el ingreso que recibe por dicha tarea es un salario. En el equilibrio ninguna persona aceptaría ese "empleoÂ´Â´ si el salario es menor a lo que dicha persona podría conseguir por su cuenta que es γ. A los demás miembros de la comunidad, a pesar de que cada uno de ellos tendrá el puesto con probabilidad positiva, no les conviene pagar más, por lo que el salario es exactamente γ.

3. Existe un tamaño especial del grupo organizado s^*, por debajo del cuál dicho grupo ya no es eficiente. Si las familias de la comunidad que quieren organizarse son muy pocas, menos que s^*, no vale la pena su esfuerzo.

4. La interpretación de s^* es la siguiente: Supongamos que un grupo S tiene un número de familias tal que:

   a) Una de ellas, i^*, se puede dedicar a cumplir las tareas de vigilar y castigar.

   b) S tiene suficientes familias, distintas que i^*, para reunir, con sus aportaciones el salario de i^*, es decir γ familias.

   c) Existe otro número de familias miembros de S, tales que, debido a su cooperación, se puede construir la cantidad de obra común suficiente para que cada persona de la comunidad, en particular cada una de las pertenecientes a S, pueda obtener al menos una unidad adicional, es decir, $1/\beta$ unidades de obra común.

   Si $1/\beta + 1 + \gamma$ fuera un entero igual al número de miembros de S, entonces, a cada una de éstas le daría lo mismo permanecer organizada que actuar por su cuenta, pues de las dos formas ganaría γ. Por eso s^* es el entero más pequeño que es mayor que $1/\beta + 1 + \gamma$.

5. Por último, reflexionemos sobre el sentido que tiene elegir en la etapa inicial una estrategia mixta. Esto no tiene que interpretarse como que cada individuo de la comunidad elige una probabilidad para, de acuerdo con ella, en cada ocasión, participar o no en una organización.

Puede haber interpretaciones más intuitivas de X^*. Por ejemplo, que el comportamiento de cada familia y el de la comunidad en su conjunto, en el equilibrio, son de tal manera que si se hiciese una estadística sobre estos, parecería obedecer a que cada familia eligió la estrategia $(\alpha^*, 1-\alpha^*)$. Es decir, las familias podrían estar cambiando su forma de actuar de acuerdo a la experiencia que van adquiriendo y lo que obtenemos es una ley del comportamiento de la comunidad, en su conjunto.

7.4. Juegos Repetidos

Los juegos repetidos introducen un contexto más dinámico dentro de un conflicto. La mayoría de los conflictos interesantes se repiten más de una vez y esto cambia notablemente los resultados obtenidos. La idea que muchos autores consideraron intuitiva es que, al repetirse un conflicto, los jugadores terminarían alcanzando una "buena solución". Por eso los resultados que sustentan la teoría de los juegos repetidos fueron llamados teoremas del folklor o de la tradición oral. En forma específica, la preocupación surgió vinculada al dilema del prisionero. Era creencia común que este juego, de dos o más personas, cuando se jugaba una única vez, tenía un resultado nefasto; pero que, seguramente, si el mismo grupo de personas jugaban repetidamente, podrían llegar a confiar unos en otros y alcanzar un "buen" resultado para todos.

La filosofía de los juegos no cooperativos está tomada de las ciencias sociales clásicas, cuyo autor más característico fue Adam Smith. En esta filosofía, los hechos históricos, políticos, sociales y económicos son una especie de resultante de las decisiones libres de los individuos (ciudadanos, agentes o como quiera llamárseles) que se mueven en la sociedad. Sin embargo, para la concepción smithiana las acciones de los individuos egoístas que sólo buscan su propio bienestar conducen siempre, sin proponérselo, al bien común y sólo la acción de fuerzas externas a los individuos, aún tratando de actuar por el interés colectivo, puede torcer esa resultante feliz. Por el contrario, en los juegos no cooperativos, no es extraño que las acciones egoístas conduzcan a la catástrofe social. El dilema del prisionero es el ejemplo más famoso y es también el más efectivo para mostrar dicha afirmación. Para enfrentar este resultado que molesta a tantos autores, se ha recurrido a considerar que el juego en cuestión no se realice una sola vez, sino que los mismos jugadores lo repitan una y otra vez. Aunque en este juego repetido el perfil formado por la estrategia indeseable para todos los jugadores

sigue siendo uno de los equilibrios que se obtienen, aparecen otros equilibrios del juego que significan un mejor resultado, socialmente hablando. En particular, las estrategias "ojo por ojo, diente por diente", llenas de espíritu de venganza logran ese objetivo. Usando este tipo de estrategias se suelen demostrar diversas versiones del teorema de la tradición oral que asegura que para todo vector de pago v "alcanzable" por los jugadores y que tenga la propiedad de dar a cada jugador un pago mayor que su minmax (o mayor que algún otro tope máximo que le puedan imponer los demás jugadores) podemos construir un perfil de equilibrio, por ejemplo el de la mencionada ley del talión que tiene como vector de pago a v. El pago tope, al que nos acabamos de referir, juega el papel de una amenaza de que se recibirá dicho pago como un castigo, si se abandona la búsqueda de v.

7.4.1. Los Equilibrios de un Conflicto Repetido

La mayoría de los conflictos importantes de la vida se presentan repetidamente. En general, la forma en que se comportan las personas involucradas en un conflicto que se presenta una sola vez en la vida es distinta a la que adoptarían si ellas, vez tras vez, tienen que enfrentarse en el mismo conflicto con los mismos oponentes.

Pensemos en el juego representado por la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} p & np \end{array} \\ \begin{array}{c} p \\ np \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (-2,1) \\ (1,-2) & (-3,-3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Los equilibrios del juego son los perfiles de estrategias puras (p, np) y (np, p) y, además, el de estrategias mixtas $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. En el ultimo equilibrio, la esperanza de pago es de -1, para cada jugador.

Pensemos en que el conflicto, al que llamaremos juego estado, se realiza dos veces, en el sentido de que después de que los dos jugadores eligen simultáneamente sus estrategias, de nuevo tienen que volver a hacerlo. En el juego extensivo resultante, el pago puede ser la suma total o el promedio recibido por ocasión. En la figura 7.4.1 se ilustra la situación, ahorrándonos los pagos y simbolizando los enfrentamientos del juego rectangular estado con los cuadrados JE.

Cuando en un juego repetido Γ se utiliza el mismo equilibrio del juego estado en cada repetición o una combinación de equilibrios, se obtiene un equilibrio de Γ, pero pueden aparecer otros equilibrios nuevos que no existían

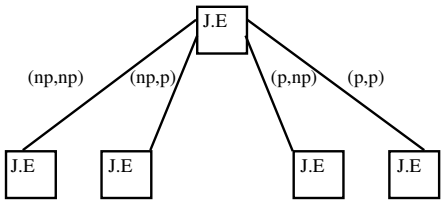

Figura 7.4.1:

cuando el juego tenía lugar en una sola ocasión. En particular, uno de estos equilibrios expresaría un pacto entre los jugadores que consistiría en que en el primer periodo elegirían de acuerdo al equilibrio que conviene al primer jugador y en el segundo, si ambos cumplieron con el pacto, el que conviene al segundo jugador. En la inteligencia de que, si cualquiera de ellos no cumplió, el otro lo castigaría obligándolo a ganar a lo más -2 que es el maxmin de ambos jugadores en el juego estado. Con este equilibrio cada uno gana, en promedio, $-\frac{1}{2}$.

Si el juego se realiza tres veces, uno de los equilibrios de subjuego perfecto otorga, a cada uno de los jugadores, ganancias promedio de $-\frac{1}{3}$, siguiendo las estrategias que se describen a continuación: Los jugadores deciden llevar a cabo un pacto que consiste en que, en el primer periodo, los dos escogen la estrategia p, en el segundo, escogen de acuerdo al equilibrio que le conviene al que elige renglones y, en el tercero, de acuerdo al equilibrio que es mejor para el que elige columnas. En las "historias" correspondientes a que alguien ha traicionado el acuerdo, éste será castigado haciendo que gane a lo más -2.

Si el juego se jugara 1000 veces, existe un equilibrio del juego repetido que consiste en un pacto de que en los 998 primeros periodos, ambos escogerán la estrategia p, en el penúltimo el equilibrio que prefiere el jugador 1 y en el último el que prefiere el jugador 2. Y en cualquier historia en la que alguno se ha salido de lo acordado, a éste se le obliga a ganar a lo más -2. Con este equilibrio ganan por juego jugado $-\frac{1}{1000}$, así nos hemos ido acercando al pago de 0, que es el pago "equitativo" más grande posible. Esto no es casual, si en un juego bipersonal, cada jugador tiene un equilibrio con el que domina su minmax, cada vector de pago factible individualmente racional, es decir en los que los jugadores ganan más que su maxmin, se puede alcanzar como límite de vectores de pago de equilibrio de juegos repetidos k veces, cuando k tiende a infinito. Dicho resultado se conoce como teorema del folklor (o de la tradición oral) del que existen numerosas versiones, en esta sección, expondremos la que se debe a J. Friedman [18]. Antes, motivemos

en forma más concreta el problema, analizándolo en el dilema del prisionero bipersonal.

7.4.2. La Tradición Oral y el Espíritu de Venganza

¿COOPERAR O NO COOPERAR? REPETICIÓN INFINITA.

Pensemos en el dilema bipersonal de suma cero que aparece en la introducción del trabajo y cuya matriz es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Confesar & No\ confesar \end{array} \\ \begin{array}{c} Confesar \\ No\ confesar \end{array} & \begin{pmatrix} (-10,-10) & (0,-20) \\ (-20,0) & (-2,-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

El que los dos confiesen es la conducta no cooperativa y conduce a la desgracia de ambos, pero es el único equilibrio de Nash del juego.

Sigamos dándole vueltas al dilema del prisionero, para introducir la problemática de los juegos repetidos, porque es, como decíamos, el ejemplo más motivador de ella. Todos los teóricos aceptan que si el famoso dilema ocurriera una sola vez, sin fuerzas externas de por medio, ambos jugadores confesarían, pero ¿qué ocurre si los mismos jugadores lo repiten una gran cantidad de veces? La intuición nos hace aceptar que ambas personas podrían aprender de su experiencia y llegar a confiar el uno en el otro. Además, les parecería importante cuidar su prestigio de hombres de palabra, etc. Así, quizá abandonarían el pago fatal de -10, por juego jugado, para obtener -2. Es decir, la repetición se convertiría en un mecanismo que llevaría a un resultado de bienestar común, sin necesidad de una fuerza de coerción externa sobre los jugadores o una constuida por ellos mismos, como en el ejemplo 7.3.2.

En el camino de dar forma a esta idea, construyamos un juego extensivo tal que en cada vértice en que se puede cortar el juego, tenemos una repetición del dilema del prisionero, en su forma extensiva, con la diferencia de que en los vértices finales, en lugar de pagos, tendríamos una nueva repetición, los pagos finales serían la acumulación, con algún tipo de descuento para el periodo t.

Una primera observación es que si el enfrentamiento se repite un número finito de veces, por muy grande que sea este número, no habrá ningún cambio en el comportamiento previsible de los jugadores. Suponiendo que éstos tienen el acuerdo de no confesar, en cada período, al llegar a la última etapa, volverían a las andadas y tratarían de aprovechar el que ya no hay prestigio que cuidar, desertando de su acuerdo. Peor aún, esto provocaría que los jugadores confesaran en cada etapa, pues cada uno de ellos sería consciente

de la segura traición del otro en la última etapa y buscaría adelantarse, traicionando él mismo, en etapas anteriores.

Es decir, el único equilibrio perfecto en subjuegos es aquél en el que cada jugador, en cada uno de sus conjuntos de información, escoge confesar. Desde luego, existen equilibrios en los que alguno de los jugadores elige no confesar en uno o varios de sus conjuntos de información, pero sucede que la probabilidad determinada por esos equilibrios de llegar a cualquiera de dichos conjuntos de información es cero. O dicho con otras palabras, tenemos equilibrios que permiten que alguno de los jugadores elija cooperar con el otro, aunque desde el punto de vista egoísta esto sea una mala elección, pero solo en los conjuntos de información a los que no es posible llegar, en cambio en todos los conjuntos de información que tienen probabilidad positiva de ser alcanzados se responderá confesando. Por lo que los perfiles que tienen alguna respuesta de cooperación, en un dilema del prisionero que se repite un número finito de veces, no son equilibrios perfectos en subjuegos.

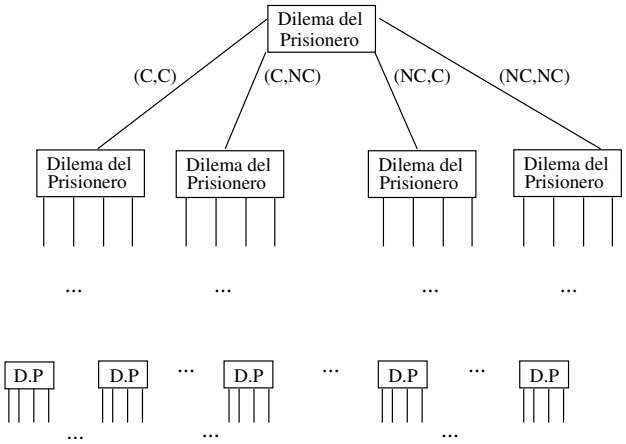

Figura 7.4.2:

Para obtener resultados distintos, los dos jugadores tienen que pensar, cada vez que tienen que tomar una decisión, que el proceso de enfrentamiento puede continuar, es decir que la probabilidad de que habrá un próximo enfrentamiento es positiva.

Supongamos que el dilema del prisionero va a repetirse, de tal manera que cada vez que termina una etapa hay una probabilidad α, $0 < \alpha < 1$, de que el juego vuelva a repetirse y, por lo tanto, una probabilidad $1 - \alpha$, también mayor que cero, de que el juego termine. En este horizonte infinito, es fácil hacer ver que el perfil de estrategias en el que los jugadores confiesan

en cada una de sus oportunidades sigue siendo un equilibrio perfecto en subjuegos. Sin embargo, ahora han aparecido otros equilibrios. Por ejemplo, los futuros prisioneros podrían llegar al acuerdo de moverse, cada uno, con la estrategia siguiente: 1) empezar no confesando y seguir haciéndolo hasta la primera vez que a su contrario se le ocurriera confesar, 2) si esto llegara a suceder, no volver a confiar en la capacidad de cumplir compromisos de dicho individuo, 3) vengarse del traidor, manteniéndose firme en confesar, período tras período y 4) si él mismo fuera el primero en abandonar la alternativa de no confesar, de allí en adelante confesar siempre, pues no podría recuperar su prestigio y sería castigado, sin remedio, por el otro prisionero. Este perfil de aplicar la ley del talión es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido, cuando la probabilidad de continuar el juego es suficientemente grande, como veremos en seguida.

Denotemos como $\widehat{\sigma}$ al perfil de estrategias del juego repetido en el que los dos jugadores escogen "ojo por ojo, diente por diente", los jugadores no confesarían nunca pues ninguno de ellos llegaría a los conjuntos de información en los que tendría que confesar, no habría motivos de venganza y el vector de pago esperado sería: $(1-\alpha)\sum_{i=0}^{\infty}(-2)\,\alpha^i = -2$.

Si alguno de los jugadores, por ejemplo el jugador 1, cambiara en el período t la elección no confesar por confesar, llamemos a la nueva estrategia de dicho jugador $\check{\sigma}^1$, su pago esperado sería:

$$(1-\alpha)\left(\sum_{i=0}^{t-1}(-2)\,\alpha^i + 0\alpha^t + \sum_{i=t+1}^{\infty}(-10)\,\alpha^i\right).$$

La diferencia del pago del jugador l, cuando elige $\widehat{\sigma}^1$, respecto a lo que recibe con $\check{\sigma}^1$ es

$$(1-\alpha)\left((-2)\,\alpha^t + \sum_{i=t+1}^{\infty} 8\alpha^i\right) =$$

$$(1-\alpha)\left((-2)\,\alpha^t + 8\alpha^{t+1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^i\right)\right) =$$

$$-2\alpha^t\,(1-\alpha) + 8\alpha^{t+1} = 10\alpha^{t+1} - 2\alpha^t = \alpha^t\,(10\alpha - 2).$$

Esta diferencia es mayor que cero si y sólo si $\alpha > \frac{1}{5}$.

Entonces, si la probabilidad de continuar el juego en cada periodo es mayor que $\frac{1}{5}$, la pareja de estrategias ojo por ojo, diente por diente es un equilibrio de Nash del juego repetido y es un equilibrio que determina que a lo largo de las partidas que tienen probabilidad positiva, los jugadores, en cada ocasión, escogen no confesar, es decir cooperan entre sí y obtienen,

los dos, un pago mejor que con la "traición" como hábito. El espíritu de venganza lleva a la cooperación de los dos prisioneros.

Dicho perfil es un equilibrio perfecto en subjuegos. El juego se puede descomponer en vértices en los que el subjuego que allí empieza es esencialmente el juego original, excepto quizá por una primera jugada de azar. Sin embargo, la restricción de la pareja de estrategias "ojo por ojo, diente por diente" a dicho subjuego depende de la historia que se ha seguido para llegar al vértice en cuestión. Así, la restricción es de nuevo una pareja de estrategias "ojo por..." en los vértices A que representan situaciones en que los jugadores han respetado hasta ese momento el acuerdo de no confesar y este perfil es un equilibrio del subjuego Γ_A. En cambio, en los vértices B para los que en el pasado alguno de los dos jugadores ha elegido en alguna ocasión confesar, la restricción es un perfil en que los jugadores confiesan siempre y este perfil es un equilibrio de Γ_B.

En resumen, la pareja de estrategias que consiste en confesar en cada ocasión continúa siendo un equilibrio perfecto en subjuegos, pero han aparecido nuevos de estos equilibrios que determinan comportamientos y pagos más razonables.

Nos propusimos estudiar si en un contexto no cooperativo era posible que, en un equilibrio de Nash, la conducta observada de los jugadores fuera no confesar, podemos contestar afirmativamente a ello. Aunque, por otro lado, no sabemos, si finalmente serán estos equilibrios "buenos" y no el "malo" el que se establecerá como conducta de los prisioneros en el juego repetido.

7.4.3. Los Juegos Repetidos en General

Ahora vayamos a una situación más general. Imaginemos un juego rectangular finito cualquiera (juego estado), con un conjunto de jugadores N, que repetirán un número de veces finito o infinito el conflicto expresado en el juego estado. Nos planteamos el problema de estudiar la forma de los equilibrios de Nash del juego "repetido".

Formalicemos un poco las cosas.

Sea $\Gamma = (N, \{D_i\}_{i\in N}, \varphi)$ un juego rectangular finito.

Definición 7.4.1. Para t en $\{0, 1, 2, \dots\}$ una historia $h(t)$ de tamaño t de repetición del juego Γ es un una n-ada $\big(h^1(t), h^2(t), \dots, h^n(t)\big)$, con $h^j(t)$ en $D_j \times D_j \times \cdots \times D_j = D_j^t$.

Por tanto, $h(t)$ es una matriz $t \times n$ cuya j-ésima columna es

$$h^j(t) = \begin{pmatrix} h_0^j = \sigma_0^j \\ h_1^j = \sigma_1^j \\ \dots \\ h_{t-1}^j = \sigma_{t-1}^j \end{pmatrix}.$$

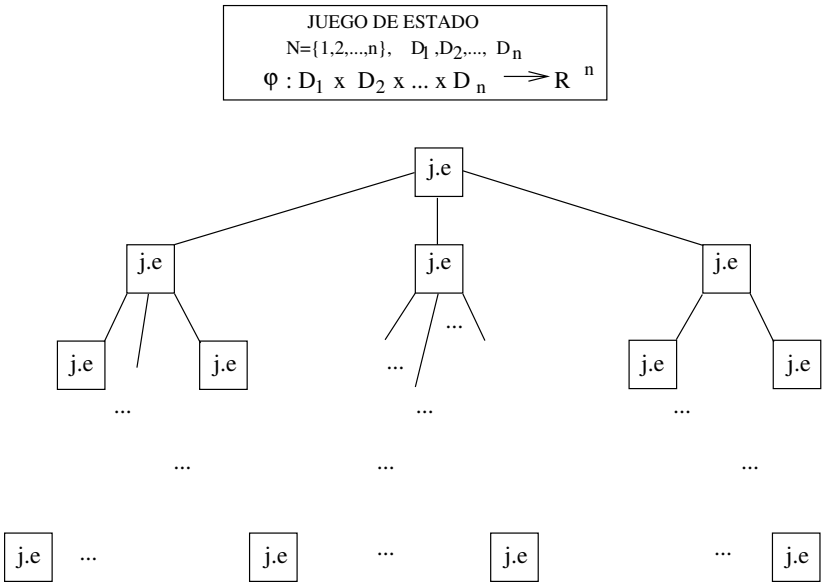

Figura 7.4.3:

El vector $h^j(t)$ representa la "historia" de lo que ha hecho el jugador j desde el período 0 hasta el período $t-1$. Es decir, las estrategias que escogió en dichos períodos. Mientras que el renglón i-ésimo representa el perfil que los n jugadores escogieron en el período i, es decir,

$$\left(h_i^1 = \sigma_i^1, h_i^2 = \sigma_i^2, ..., h_i^n = \sigma_i^n\right).$$

Denotamos como $H(t)$ al conjunto de historias de tamaño t y como H al conjunto $\underset{t}{\cup} H(t)$.

Definiremos el concepto de juego repetido para un juego rectangular $\Gamma = (N, \{D_i\}_{i \in N}, \varphi)$ y un número real δ en $(0,1)$.

Definición 7.4.2. El juego repetido (Γ, δ) que tiene como juego estado a Γ y como factor de descuento o probabilidad de continuación a δ consta, para cada j en N, de:

a) los conjuntos $\overline{\Sigma_j} = \{\overline{\sigma}^j : H \to D_j\}$ y $\overline{M_j} = \{\overline{X}^j : H \to M_j\}$ y

b) la función de pago $\overline{E}_j : \overline{M_1} \times \overline{M_2} \times ... \times \overline{M_n} \to R^n$ definida como

$$\overline{E}_j \left(\overline{X}^1, \overline{X}^2, .., \overline{X}^n\right) =$$

$$(1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t \sum_{h(t)\in H(t)} p\left(h\left(t\right)\left|\overline{X}\right.\right) \sum_{\sigma\in D} \prod_{k\in N} \overline{x}^k\left(h\left(t\right)\right)\left(\sigma^k\right)\varphi_j\left(\sigma\right)\right).$$

Por supuesto, para que el juego repetido (Γ, δ) esté bien definido, la serie involucrada debe converger.

Los elementos de $\overline{\Sigma_j}$ y de $\overline{M_j}$ se llaman, respectivamente, las estrategias puras y de comportamiento del jugador j en el juego (Γ, δ).

Algunos autores llaman a $\overline{M_j}$ el conjunto de estrategias mixtas de (Γ, δ); de hecho, como el juego es de memoria perfecta, ambos conceptos coinciden. Pero nosotros preferimos el enfoque de estrategias de comportamiento, pues, para construir los elementos de $\overline{M_j}$, no utilizamos el conjunto de estrategias puras del juego (Γ, δ), sino las del juego estado Γ. En realidad, cada $\overline{X}^j \in \overline{M_j}$ es una estrategia de comportamiento como las que se trabajaron en la sección anterior, ya que, intuitivamente, podemos pensar a (Γ, δ) como un juego extensivo. En dicho juego se estará repitiendo la forma extensiva de Γ, como juego de jugadas simultáneas, pero convirtiendo a cada vértice final de esta forma extensiva en un vértice de azar con dos alternativas, una de las cuáles es un vértice final del juego que tiene asociada la probabilidad $1-\delta$ y el vector de pago acumulado que le corresponde según Γ, y el otro será un vértice de continuación pues representa el hecho de que el juego sigue.

Más formalmente, los vértices del juego extensivo asociado a (Γ, δ) son las historias $h\left(t\right)$ y existen aristas desde una historia a otra, si la diferencia de sus tamaños es 1 y la mayor coincide en todas sus coordenadas con la otra excepto en la última coordenada. La raíz U de este juego extensivo es $h(0)$.

Las estrategias de comportamiento del juego extensivo asociado a (Γ, δ) corresponden a los elementos del conjunto $\overline{M_j}$ del juego repetido.

Definición 7.4.3. $\overline{X}^* \in \overline{M_1} \times \overline{M_2} \times ... \times \overline{M_n}$ es un equilibrio de Nash de (Γ, δ) si para cada $j \in N$ se cumple que $\overline{E}_j\left(\overline{X}^*\right) \geq \overline{E}_j\left(\overline{X}^* \left|\overline{X}^j\right.\right)$ para toda $\overline{X}^j \in \overline{M_j}$.

Un equilibrio perfecto en subjuegos de (Γ, δ) se define como siempre.

Es claro que para cualquier juego Γ y cualquier δ en $(0,1)$, si X^* es un equilibrio de Nash del juego estado Γ, entonces el perfil de estrategias de comportamiento consistente en que en cada historia cada jugador j elige X^{j*} es un equilibrio perfecto en subjuegos de (Γ, δ). Pero pueden existir otros de estos. Nos preocuparemos por algunos interesantes.

Definición 7.4.4. Un vector v de R^n es factible en Γ, si existe un perfil de estrategias de comportamiento para el que el vector de pago esperado correspondiente es v.

Consideremos un juego Γ para el que existe un vector de pagos v factible que domina, para cada jugador, a algún pago de un equilibrio (o al vector de pagos maxmin). Los teoremas de la tradición oral aseguran que existen un factor de descuento (o probabilidad de seguir jugando) δ y un equilibrio de Nash del juego repetido (Γ, δ) tales que el vector de pago correspondiente a este equilibrio es v. En particular, para los dilemas del prisionero, el vector

$$v = \varphi\,(\textit{No Confesar,No Confesar,...,No Confesar})$$

es factible y domina al vector de pago correspondiente al único equilibrio de Nash del juego (que también es, en ese juego, el vector de pagos maxmin).

Demostraremos, ahora, una versión del teorema del folklore debida a Friedman [18] y que está inspirada en el principio de "ojo por ojo, diente por diente" expuesto en esta sección para el dilema del prisionero repetido en horizonte infinito.

Teorema 7.4.5 (Teorema de Friedman). *Sea $\Gamma = (N, \{D_i\}_{i\in N}, \varphi)$ un juego que tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas X^{**} y un vector factible v tales que $v \geq E(X^{**})$. Entonces existen δ en $(0,1)$ y $\overline{X}^*$ un equilibrio perfecto en subjuegos del juego repetido (Γ, δ), con $\overline{E}(\overline{X}^*) = v$.*

Demostración. Como v es factible, existe un perfil de estrategias mixtas Z en Γ de tal manera que el vector de pago correspondiente es v. Ahora, construyamos el perfil de estrategias $\overline{X}^*$ de (Γ, δ) que para toda j en N se describe como,

$$\overline{X}^{*j}\,(h\,(k)) = \begin{cases} Z^j & \text{si } k = 0, \\ Z^j & \text{si } \forall i \in N \text{ y } \forall t < k,\ \overline{X}^{*i}\,(h\,(t)) = Z^i, \\ X^{j**} & \text{en cualquier otra historia.} \end{cases}$$

A $\overline{X}^*$ le podemos llamar el perfil de estrategias "ojo por ojo, diente por diente". Haremos ver que $\overline{X}^*$ es un equilibrio perfecto en subjuegos de (Γ, δ) que tiene asociado el vector de pago v, para valores adecuados de δ.

Con dicho $\overline{X}^*$, los jugadores empezarían el período 0 con el perfil Z. Y con Z seguirían en cada período, pues ningún jugador encontraría motivo para desviarse en algún momento, es decir la probabilidad de llegar a cualquier historia que contenga decisiones distintas de Z sería cero y, entonces, el pago para cada jugador j sería:

$$\overline{E}_j(\overline{X}^*) = (1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{h(t)\in H(t)}\delta^t p\left(h\left(t\right)\middle|\overline{X}^*\right)E_j\left(Z\right)\right) =$$

$$(1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t E_j\left(Z\right)\sum_{h(t)\in H(t)}p\left(h\left(t\right)\middle|\overline{X}^*\right)\right) = E_j\left(Z\right)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = E_j\left(Z\right) = v_j.$$

Supongamos que todos los jugadores menos el jugador k se mantienen eligiendo estrategias de "la ley del talión" y que el jugador k decide abandonarla y elegir $\widetilde{X}^k$, donde $\widetilde{X}^k(h(t)) = Z^k$ para toda $h\left(t\right)$, si $t < \tau$ y para al menos una $h\left(\tau\right)$, $\widetilde{X}^k(h(\tau)) \neq Z^k$. Entonces

$$\overline{E}_k(\overline{X}^*\left|\widetilde{X}^k\right.) = (1-\delta)\,(\sum_{t=0}^{\tau-1}\delta^t v_k +$$
$$\delta^\tau p\left(h\left(\tau\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(Z\left|\widetilde{X}^k h\left(\tau\right)\right.) +$$
$$\sum_{t=\tau+1}^{\infty}\sum_{h(t)\in H(t)}\delta^t p\left(h\left(t\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(X^{**}\left|\widetilde{X}^k h\left(t\right)\right.).$$

Además, $\left(\overline{E}_k(\overline{X}^*) - \overline{E}_k(\overline{X}^*\left|\widetilde{X}^k\right.)\right) =$

$$(\sum_{t=\tau+1}^{\infty}\delta^t\left(v_k - \sum_{h(t)}p\left(h\left(t\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(X^{**}\left|\widetilde{X}^k h\left(t\right)\right.\right)$$

$$+\delta^\tau\left(v_k - p\left(h\left(\tau\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(Z\left|\widetilde{X}^k h\left(\tau\right)\right.\right))\,(1-\delta)$$
$$= (1-\delta)\,(\delta^{\tau+1}$$
$$\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t\left(v_k - \sum_{h(t)\in H(t)}p\left(h\left(t\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(X^{**}\left|\widetilde{X}^k h\left(t\right)\right.\right)$$
$$+\delta^\tau\left(v_k - p\left(h\left(\tau\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(Z\left|\widetilde{X}^k h\left(\tau\right)\right.\right)) \geq$$
$$\delta^{\tau+1}\left(v_k - E_k\left(X^{**}\right)\right) +$$
$$(1-\delta)\,\delta^\tau\left(v_k - p\left(h\left(\tau\right)\middle|\left(\overline{X}^*\middle|\widetilde{X}^k\right)\right)E_k(Z\left|\widetilde{X}^k h\left(\tau\right)\right.\right)) \geq$$
$$\delta^{\tau+1}\left(\max_{X^j\in M_j}\left\{E_k\left(Z\left|X^j\right.\right) - E_k\left(X^{**}\right)\right\}\right) +$$
$$\delta^\tau\left(v_k - \max_{X^j\in M_j}\left\{E_k\left(Z\left|X^j\right.\right)\right\}\right).$$

Entonces
$\overline{E}_k(\overline{X}^*) - \overline{E}_k(\overline{X}^* \left| \widetilde{X}^k \right.) \geq 0$ si

$$\delta \left(\max_{X^j \in M_j} E_k \left(Z \left| X^j \right. \right) - E_k \left(X^{**} \right) \right) + \left(v_k - \max_{X^j \in M_j} E_k \left(Z \left| X^j \right. \right) \right)$$

es no negativo. Es decir, $\overline{E}_k(\overline{X}^*) - \overline{E}_k(\overline{X}^* \left| \widetilde{X}^k \right.) \geq 0$ si

$$1 > \delta \geq \frac{\max_{X^j \in M_j} E_k \left(Z \left| X^j \right. \right) - v_k}{\max_{X^j \in M_j} E_k \left(Z \left| X^j \right. \right) - E_k \left(X^{**} \right)}.$$

En consecuencia, para cualquier δ que cumpla las dos condiciones anteriores el juego repetido (Γ, δ) tiene un equilibrio de Nash con vector de pago v. Además, es claro que ese equilibrio es perfecto en subjuegos. En efecto, para los subjuegos que empiezan en vértices que corresponden a historias en las que cada $j \in N$ ha elegido su estrategia Z^j, en todos los periodos, la restricción del perfil ley del talión es de nuevo un perfil ley del talión del subjuego que es un equilibrio de éste, mientras que para los subjuegos correspondientes a historias en las que algún jugador k no ha elegido su estrategia Z^k, en algún período, la restricción es la adopción del equilibrio X^{**} en cada periodo y, por lo tanto, también es equilibrio del subjuego en cuestión. ∎

Existen otros teoremas de tradición oral, nosotros nos conformaremos con éste.

Veamos, ahora, un ejemplo en donde la repetición tiene un efecto semejante a los de los teoremas de tradición oral más conocidos. Este ejemplo está tratado en una forma un poco distinta al que se suele dar a los juegos repetidos en general. La exposición sigue la de un artículo que publicamos en *Aportaciones Matemáticas* [59]. Aquí sólo aparece la parte correspondiente al ejemplo del libro de Bierman y Fernández [3].

7.4.4. La Conjetura de Coase para un Monopolio en el Mercado de un bien durable

Todo mundo identifica con los grandes poderosos dentro de los mercados a los monopolios. Pero Ronald Coase [11], premio Nobel de Economía en 1992, consideraba que esto no era cierto para aquellos que se dedican a los bienes durables.

Para plantear el problema, comparemos lo que ocurre en tres tipos de mercados, uno competitivo, uno de bienes que duran un periodo, pero donde hay un monopolio y otro de bienes durables por muchos periodos, también monopolizados.

Hablemos de la diferencia entre los tres tipos de mercados que nos interesan, abusando del ejemplo con el que Jean Tirole [51] introduce la conjetura de Coase en su libro Organización Industrial.

a.- **El Mercado de Competencia Perfecta**

Supongamos un mercado en el que hay un sólo bien y 15 individuos, numerados del 1 al 15, quienes son los consumidores o compradores potenciales, cada uno de ellos, de una unidad del bien en cuestión. La relación entre sus preferencias y sus recursos son de tal manera que el consumidor q prefiere comprar la unidad del bien si y, sólo si, ésta tiene un precio menor o igual a q pesos. La función de demanda total sería, entonces, igual a $16 - p$, con $p = 1, 2, \ldots, 15$. Supongamos, además, que hay 5 empresas y que las técnicas y los recursos de cada empresa j le permiten producir a lo más x_j unidades, de tal manera que $\sum_{j=1}^{5} x_j = 15$. Pensemos que el costo de producir una unidad del bien es cero, para cada empresa, y que los precios son positivos. Como las empresas buscan maximizar su ganancia, la oferta social sería igual a 15 unidades, para todo precio $p = 1, 2, \ldots, 15$. La ganancia de la empresa j sería px_j.

El único precio que iguala la oferta con la demanda, el precio de equilibrio, es 1 y la ganancia total de equilibrio es 15. Si el precio máximo que está dispuesto a pagar el consumidor 1 fuera un real muy cercano a cero, el precio de equilibrio y la ganancia total serían también muy cercanos a cero.

b.- **El Mercado de un Bien Perecedero Monopolizado**

De nuevo, consideremos un mercado con un solo bien que dura un periodo y los mismos 15 consumidores, dispuestos a comprar, en las condiciones que describíamos en el mercado competitivo. Tendríamos la misma función de demanda social de $16 - p$, con $p = 1, 2, ..., 15$. En cambio, en cuanto a la producción, sólo hay una empresa, es decir un monopolio. Esta empresa puede decidir a que precio venderá la unidad de producto y cuanto producirá. Al escoger el precio, determina cuáles consumidores comprarán y, entonces, puede producir exactamente lo necesario para satisfacer esa demanda, en ese sentido, para cualquier

precio la oferta es igual a la demanda. Sin embargo, no en cualquier precio se alcanza la máxima ganancia del monopolio que está expresada en la función $16p - p^2$, $p = 1, 2, \ldots, 15$. El precio con el que el monopolio alcanza la ganancia máxima es de 8 pesos que provoca una ganancia de 64. El precio de equilibrio es 8, pues en éste el monopolio maximiza su ganancia los consumidores su utilidad y la oferta es igual a la demanda. Es evidente que no alteraríamos el precio de equilibrio, ni la ganancia del monopolista, si hiciéramos muy pequeño el precio con que el consumidor que está menos interesado en el bien valora la unidad.

c.- El Mercado de un Bien Duradero que se encuentra Monopolizado. La Conjetura de Coase

Pensemos en la misma situación que en el mercado anterior, con la única excepción de que el bien dura por varios periodos, por lo menos 4. El monopolio podría pensar que en el primer periodo tiene en sus manos la ganancia que se obtiene para los bienes que duran un solo periodo, es decir, que si en el primer periodo elige el precio de 8 pesos, seguramente comprarían 8 consumidores, con lo que podría ganar 64 pesos. Pero aún quedarían 7 compradores potenciales, el monopolista tendría una fuerte tentación de ir bajando el precio en periodos sucesivos para venderles a todos ellos y así acumular mayores ganancias. Si resolviese problemas de optimización, por periodo, vería que le convendría elegir el precio de 4 pesos, en el segundo, con el que comprarían otros 4 consumidores, el de 2 pesos, en el tercer periodo y el de uno en el cuarto. De esta manera, el monopolista quizá calcule que puede llegar a tener ganancias totales de 85 pesos, vendiéndole a todos los compradores potenciales.

Ronald Coase diría, ante esas elucubraciones del monopolio, que no son más que cuentas de la lechera y que la tentación del monopolio de venderle a todos, bajando el precio en los periodos siguientes, es su talón de Aquiles. Los consumidores se encargarían de romper la jarra, ya que ellos son capaces de anticipar todos los cálculos del monopolio y están seguros de que los precios bajarán en un futuro próximo, ¿por qué no esperar esa época? Coase no sólo conjeturó que la situación es distinta a la de los bienes perecederos monopolizados, sino que su previsión es más fuerte; él pensaba que se llegaría a una situación análoga a la del mercado de competencia perfecta, en donde el monopolio pierde todo su poder.

Ya que, en este conflicto, los consumidores van a tomar decisiones que no son obligadas y que afectan el resultado final, estamos en el terreno de la Teoría de Juegos.

Examinemos un modelo estacionario que generaliza el ejemplo numérico de Bierman-Fernández en el que un monopolista de la computación tiene frente a sí a dos tipos de compradores. Los que llamaremos de tipo 1 usan profesionalmente el producto y lo desean fervientemente, es decir, tienen una valoración relativamente alta de la unidad de software, digamos que es de p_1 pesos. Supongamos que ellos son s. Los otros m consumidores, los de tipo 2, lo usan para sus tareas escolares, tienen posibilidades de conseguirlo, en otras formas menos onerosas que a los profesionales les parecen arriesgadas y lo valoran a un pequeño precio de p_2 pesos, cercano al costo. Se pueden pensar esas valoraciones como un precio tope, cuando la negociación se realiza una sola vez. Cada consumidor solo desean una unidad del bien. En aras de simplificar la notación, suponemos que el costo de producción de una unidad es cero. Supongamos, además, que los que tienen una valoración muy alta del bien no son relativamente tan pocos, en el sentido de que $(m+s)\,p_2 < sp_1$.

El conjunto de estrategias del monopolio en el juego estado es el conjunto de precios que puede escoger, o sea el intervalo $[p_2, p_1]$. Para cada precio que elija el monopolio, los consumidores, en dicho juego estado, deben decidir si compran al precio exigido o no lo hacen. Es decir, el conjunto de estrategias de cada consumidor j es

$$\{\sigma^j : [p_2, p_1] \to \{\text{Comprar,No Comprar}\}\}.$$

La función de pago φ tiene la forma siguiente:

$$\varphi_M\left(p, \sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^s, \sigma^{s+1}, \sigma^{s+2}, ..., \sigma^{s+m}\right) = n_p p,$$

donde n_p es el número de consumidores que compran al precio p, de acuerdo a $\left\{\sigma^{\,j}\right\}$.

Para $j = \{1, 2, \ldots, s+m\}$,

$$\varphi_j\left(p, \sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^s, \sigma^{s+1}, \sigma^{s+2}, ..., \sigma^{s+m}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma^j(p) = \textit{no compra}, \\ p_j - p & \text{si } \sigma^j(p) = \textit{compra}, \end{cases}$$

donde p_j es igual a p_1 si el consumidor j es de tipo uno y es igual a p_2 si es de tipo 2.

Las estrategias del monopolio que están en el intervalo (p_2, p_1) están dominadas por p_1. Así que, en un equilibrio de Nash del juego estado, el monopolio tiene que escoger p_2 o p_1.

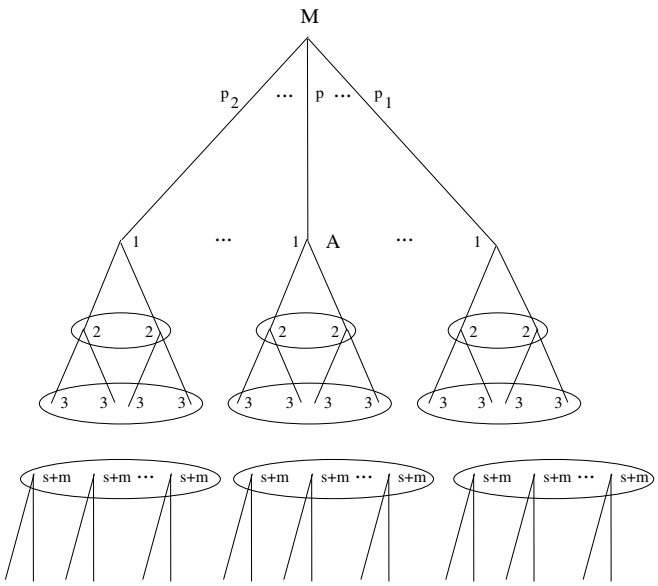

Figura 7.4.4:

Sea σ^* el perfil de estrategias

$$(p_2, compra \Leftrightarrow p = p_2, ..., compra \Leftrightarrow p = p_2)\,.$$

El perfil σ^* se puede interpretar como un pacto de los consumidores, para no comprar más que al precio más bajo y, por ello, el monopolista se ve obligado a vender a ese precio. σ^* es un equilibrio de Nash y es "bueno" para la sociedad (pues todos pueden comprar) y malo para el monopolista. Sin embargo, como ya decíamos, encierra una amenaza increíble de parte de los consumidores de tipo 1. Pensemos en la forma extensiva de ese conflicto, figura 7.4.4. La situación que representa el vértice A consiste en que el monopolio (M) pide un precio $p > p_2$, es claro que a los consumidores de tipo 1 les convendría comprar y de acuerdo a σ^* no comprarían. Siguiendo a σ^* no se llegará al vértice A, pero, los consumidores de tipo 1 no juegan en una estrategia de equilibrio en el subjuego que empieza en A cuando se utiliza σ^*. Es decir, σ^* no es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Hay otro equilibrio σ^{**}, que se puede construir con el algoritmo de Zermelo aplicado al juego de la figura 7.4.4, por lo que es un equilibrio perfecto en subjuegos. En σ^{**}, los consumidores de tipo 2 compran si y sólo si M eligió p_2; en cambio, los consumidores de tipo 1 compran a cualquier precio. Por último, a M le conviene elegir p_1. En σ^{**} M exige el precio más alto

posible. σ^{**} sólo conviene al monopolio, socialmente no es bueno ya que el software se vende al precio más alto posible y m compradores potenciales se quedan sin comprar.

Vayamos, ahora, a la generalización que hacemos del modelo de monopolio de bienes durables de Bierman-Fernández. El modelo solo considera estrategias estacionarias.

Pensemos que el software que produce M es tan bueno que dura toda la vida.

Queremos construir un juego que exprese el conflicto en que está involucrado M con sus consumidores, en esta nueva situación. Los consumidores sólo desean una unidad del bien, en cuanto la compran dejan de ser compradores activos.

Veamos como son afectados los resultados por la repetición del conflicto en el tiempo. Sin embargo, nos limitaremos a conjuntos de estrategias "estacionarias" de los jugadores, en el sentido de que, no importando el periodo, los jugadores solo se basan en la razón que existe entre el número de compradores activos de uno y otro tipo y su relación con los precios y con la tasa de descuento.

Precisando,

a) para los consumidores que ya tienen una unidad del bien, acordemos que su estrategia para todos los periodos posteriores a su adquisición es no comprar;

b) las decisiones de los demás jugadores, en el tiempo t, dependen sólo de c_{1t} y c_{2t}, los números de compradores activos de tipo 1 y de tipo 2, respectivamente, que hay en el periodo t, es decir, aquellos que aún no han comprado.

   b1) Así, las estrategias de M son funciones σ^M tales que a la pareja (c_{1t}, c_{2t}) de compradores activos que aparece en el periodo t, le asocian una sucesión de precios, $\{p_k\}_{k=t}^{\infty}$, que son los que piensa exigir M en cada uno de los periodos, a partir de t, debido a que hay c_{1t} del primer tipo y c_{2t} del segundo en el periodo t, $p_k \in [p_2, p_1]$ para toda k.

   b2) Las estrategias del consumidor activo j son funciones p^j de tal manera que a cada pareja (c_{1t}, c_{2t}) le asocia un "precio de reserva" $p^j(c_{1t}, c_{2t})$ situado en el intervalo $[p_2, p_1]$, de tal manera que j comprará cuando, en el periodo t, esté presente la pareja (c_{1t}, c_{2t}) y el precio que exige el monopolista sea menor o igual que $p^j(c_{1t}, c_{2t})$.

Supondremos, además, que las funciones de pago en este nuevo juego serán afectadas por un factor de descuento $\delta = e^{-r}$, pues no es lo mismo comprar o vender en un período t que hacerlo en uno posterior. Entonces $\widehat{\varphi}_M(\sigma) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} p_t n_{p_t}$, donde p_t es el precio que M escoge en el periodo t y n_{p_t} es el número de consumidores del tipo 1 y 2 que compran en el periodo t, al precio p_t. Los valores $\{p_t\}$ y $\{n_{p_t}\}$ están determinados por σ.

La función de pago de un comprador j de tipo $k = 1, 2$ es:

$$\widehat{\varphi}_j(\sigma) = \begin{cases} p_k - p_t & \text{si } j \text{ compra en } t \text{ al precio } p_t, \\ 0 & \text{si } j \text{ no compra en ningún periodo.} \end{cases}$$

El perfil de estrategias σ, especifica tanto los precios que escoge M en cada periodo, como el periodo t en que cada comprador j compra, o si no lo hace nunca.

Dado que cualquier perfil de estrategias determina un pago para cada jugador, tenemos un juego que modela la repetición del conflicto. Podemos considerar los juegos $\Gamma_{(c_{1t}, c_{2t})}$, que inician en el tiempo t, con la presencia de la pareja (c_{1t}, c_{2t}), como subjuegos del juego original. Un perfil de estrategias se puede restringir a esos subjuegos. Diremos que $\widetilde{\sigma}$, un equilibrio de Nash, es perfecto en subjuegos, si para todo subjuego $\Gamma_{(c_{1t}, c_{2t})}$, la restricción de $\widetilde{\sigma}$ es equilibrio de Nash de dicho subjuego.

Hagamos algunas reflexiones para conjeturar cómo podrían ser algunos de los equilibrios del juego. Observemos, en primer lugar, que en cualquier equilibrio, los compradores activos de tipo 2 tendrán que usar como precio de reserva a p_2. La estrategia de los compradores de tipo 1 y las de M pueden ser más complicadas.

Supongamos, por un momento, que los consumidores activos de tipo 1 no toman en cuenta que el tiempo puede favorecerlos y escogen p_1, para toda pareja (c_{1t}, c_{2t}), como precio de reserva. Entonces, el monopolio puede aprovechar esa coyuntura y decidir que, en cualquier t, si $c_{1t} \neq 0$ cobrará el precio más alto o sea p_1 y, en cuanto $c_{1t} = 0$ cobrará p_2, a partir de ese momento.

Llamemos σ^{**} a ese perfil. Es claro que de llevarse a cabo, el monopolio vendería, en el primer periodo, a todos los consumidores del primer tipo y a los demás, en el segundo periodo. Es claro que las estrategias propuestas cumplen las condiciones de equilibrio para todos los consumidores. Entonces la condición necesaria y suficiente para que σ^{**} sea equilibrio de Nash es que la ganancia que obtiene M, en ese perfil, sea mayor o igual que la que resulta de vender a todos los consumidores, en el primer periodo, a los precios más bajos, es decir, $sp_1 + \delta m p_2 \geq (s + m) p_2$. Esta desigualdad equivale a $m/s \leq$

$(p_1 - p_2) / (1 - \delta) p_2$. Sin embargo, es claro que, aún en ese caso, σ^{**} no es un equilibrio perfecto en subjuegos, pues encierra una amenaza increíble de M, para las parejas (c_{1t}, c_{2t}), tales que $c_{1t}/c_{2t} \geq (p_1 - p_2) / (1 - \delta) p_2$.

Tratemos de encontrar otros equilibrios. Adoptemos la hipótesis de que la desigualdad $m/s \leq (p_1 - p_2) / (1 - \delta) p_2$ se cumple. ¿Cómo podrían los fanáticos del software aprovechar la ventaja del tiempo y la existencia de compradores apáticos? Es claro que si, en el tiempo t, $c_{2t} = 0$, no hay esperanzas de que M baje el precio algún día y "los 1" tendrán que resignarse a tomar, en el periodo t, como precio de reserva a p_1. En cambio, si todavía permanecen activos compradores de tipo 2 y el comprador de tipo 1 cree que M puede bajar los precios en algún momento, considerará preguntas como ¿Cuál es el precio más alto que debería estar dispuesto a pagar en el tiempo t, si sabe que, en el periodo $t + 1$, el precio será p_2? Para encontrar la respuesta llegamos a la desigualdad:

$$\delta^t (p_1 - p_t) \geq \delta^{t+1} (p_1 - p_2).$$

Por lo que el comprador de tipo 1 estaría dispuesto a pagar, en el periodo que corre, un precio que sea menor o igual a $p_1 (1 - \delta) + \delta p_2$, en lugar de esperar otro periodo más para que M baje el precio a p_2.

Definamos $p(0) = p_2$ y

$$p(1) = p_1 (1 - \delta) + \delta p_2.$$

Entonces, el comprador j de tipo 1 puede escoger ese precio de reserva en t, si tiene esperanza de que M escogerá p_2 en el periodo siguiente.

Supongamos que en el periodo t, j no espera que en $t + 1$ el precio alcance un precio tan cercano al costo, pero tiene esperanza de que dentro de k periodos sí lo hará, pues en el mercado todavía existen compradores de tipo 2 que no poseen el software. ¿Cuál es el precio máximo que aceptarían, en t, los consumidores que tanto necesitan el producto? La pregunta nos lleva a la desigualdad:

$$\delta^t (p_1 - p_t) \geq \delta^{t+k} (p_1 - p_2)$$

o

$$p_t \leq p_1 \left(1 - \delta^k\right) + \delta^k p_2.$$

Si definimos

$$p(k) = p_1 \left(1 - \delta^k\right) + \delta^k p_2,$$

podríamos pensar que a nuestros profesionales del cómputo, les parecerá buena idea fijar como precio de reserva a $p(k)$, si piensan que M tardará k periodos en bajar el precio a p_2. Es claro que $p(k) \leq p(k+1)$ para toda k, y que la sucesión converge al precio p_1, cuando k tiende a infinito.

Veamos, ahora, la forma de actuar de M. Si en el periodo t no hay más que estudiantes, venderá a p_2. En cambio, si sólo quedan compradores con urgencia de contar con el software, el precio que exigirá es p_1. El problema más complicado que tiene es fijar el precio en t, cuando hay compradores de los dos tipos. Supongamos que conoce los precios de reserva de los compradores, ¿cuándo le conviene vender en t a todos los compradores, aunque sea al precio p_2, en lugar de vender sólo a los de alta valoración al precio $p(1)$ y esperar a $t+1$, para poner el precio en p_2? Es decir, ¿cuando es válida la desigualdad $\delta^t p_2 (c_{1t} + c_{2t}) \geq \delta^t p(1) c_{1t} + \delta^{t+1} p_2 c_{2t}$?

La desigualdad es válida si y sólo si la relación entre los compradores activos "aficionados" y los "profesionales" también activos cumple con

$$c_{2t}/c_{1t} \geq (p(1) - p(0)) / (1-\delta) p(0).$$

Definimos como l_1a $(p(1) - p(0)) / (1-\delta) p(0)$.

Si, por el contrario, la relación anterior no se cumple en el tiempo t, a M no le conviene pensar en elegir p_2 en t, sino que esperará algunos periodos para hacerlo y, en t, buscará un precio que estén dispuestos a pagar inmediatamente los "profesionales", aún a sabiendas de que en unos cuantos periodos el precio llegará a p_2. M podría cargar el precio de reserva $p(k)$ durante k periodos y bajar el precio a p_2 en $t+k$. O podría vender, en el periodo t, a un precio $p(j)$ menor que $p(k)$, a cambio de no tener que esperar tantos periodos, para vender a todo mundo. ¿Cuándo la primera decisión es mejor que la segunda? La desigualdad "extrema" en esa dirección es la siguiente:

$$\delta^t p(k) c_{1t} + \delta^{t+k} p(0) c_{2t} \geq \delta^t p(k-1) c_{1t} + \delta^{t+1} p(0) c_{2t}$$

lo que se cumple si y sólo si

$$\frac{c_{2t}}{c_{1t}} \geq \frac{p(k) - p(k-1)}{\left(\delta - \delta^k\right) p(0)}, \text{ para } k > 1.$$

Definamos como l_k a $(p(k) - p(k-1)) / \left(\delta - \delta^k\right) p(0)$. Cuando k tiende a infinito, l_k tiende a cero. Entonces, para cualquier pareja (c_{1t}, c_{2t}), existen números naturales k, tales que $c_{2t}/c_{1t} \geq l_k$. Consideremos $\overline{k}$, el menor k para el que se cumple la desigualdad, consideremos que en el tiempo t se encuentra

la pareja (c_{1t}, c_{2t}) de compradores activos y describamos la estrategia de M de la siguiente manera: a) cargar el precio $p(\overline{k})$ durante $\overline{k}$ periodos, si en cada uno de los periodos, desde t hasta $t+\overline{k}-1$, hay consumidores del tipo 1, b) cargar el precio $p(0)$, a partir del periodo $t+\overline{k}$, haya o no compradores del tipo 1 y c) cargar el precio $p(0)$, del periodo t' en adelante, $t < t' < t+\overline{k}$, si los últimos consumidores de tipo 1, compraron en el periodo $t'-1$.

Resumiendo, σ^* es el perfil de estrategias siguiente:

σ^{j*}, para j comprador activo de tipo 2, es actuar de acuerdo al precio de reserva p_2.

σ^{j*}, para j comprador activo de tipo 1, es actuar de acuerdo a los precios de reserva siguientes:

a) p_1, si $c_{2t} = 0$,

b) $p(1)$, si $c_{2t} \neq 0$ y $c_{2t}/c_{1t} \geq l_1$,

c) $p(k)$, si $c_{2t} \neq 0$, $c_{2t}/c_{1t} < l_1$ y $l_{k-1} > c_{2t}/c_{1t} \geq l_k$ $(k \geq 2)$.

$\sigma^{M*}(c_{1t}, c_{2t}) =$

$p(0)$ para todo $t' \geq t$ si $c_{1t} = 0$ o si $c_{1t} > 0$ y $c_{2t}/c_{1t} \geq l_1$,
$p(k)$ para todo t' tal que $t < t' < t+k$ si $c_{1t} > 0$, $l_{k-1} > c_{2t}/c_{1t} \geq l_k$,
$p(0)$ para todo t' tal que $t' \geq t+k$ si $c_{1t} > 0$, $l_{k-1} > c_{2t}/c_{1t} \geq l_k$,
$p(0)$ para todo t' tal que $t \leq t'$ si $c_{1t'} = 0$,
p_1 para todo t' tal que $t' \geq t$ si $c_{2t'} = 0$.

Proposición 7.4.6. *σ^* es un equilibrio perfecto en subjuegos del juego del monopolio de bienes durables.*

Demostración. Supongamos que en el periodo t, hay una pareja de compradores activos (c_{1t}, c_{2t}). Si alguno de los dos números, c_{1t} o c_{2t} es cero, es claro que ninguno de los jugadores puede esperar cambio con el que mejore.

Supongamos el punto (c_{1t}, c_{2t}) tal que ninguno de los dos números es cero. El pago desde ese punto, cuando se usa σ^*, es que los c_{1t} presentes compran al precio $p(k)$ correspondiente a la menor k tal que c_{2t}/c_{1t} es menor que l_k y cada uno gana $(p_1 - p(k))$; los compradores de tipo 2 compran al precio $p(0)$, en el periodo $t+1$ y cada uno gana 0; M obtiene la ganancia $\delta^t c_{1t} p(k) + \delta^{t+1} c_{2t} p(0)$.

Examinemos si, desde ese "vértice", existe algún cambio en la estrategia de alguno de los jugadores que le permita mejorar su ganancia. Resulta evidente que los "aficionados" activos no tienen ninguna opción con la que mejoren. ¿Qué pasa con un profesional? Él tiene, con σ^*, el precio de reserva $p(k)$. Si decidiera cambiar a un precio de reserva mayor, en el periodo t, con ello no alteraría, ni el periodo en que compra, que seguiría siendo t, ni su ganancia. Si, por el contrario, cambiara a un precio de reserva menor,

tendría que esperar k periodos para poder comprar, lo haría al precio $p(0)$ y obtendría la misma ganancia que con σ^*. Cambios en periodos posteriores al periodo t no tendrían ningún efecto pues ya habría comprado.

Por su parte, M podría cargar, en el periodo t, un precio mayor que $p(k)$, pero entonces nadie le compraría en ese periodo y, en $t+1$, se encontraría frente a la misma pareja de compradores activos, su ganancia habría sufrido un descuento y sería menor que la que le proporciona σ^*. Si, en cambio, cargara un precio p' menor que $p(k)$, obtendría la ganancia $\delta^t c_{1t} p' + \delta^{t+1} c_{2t} p(0)$, si $p' > p(0)$, o bien la ganancia de $\delta^t (c_{1t} + c_{2t}) p(0)$, cuando $p' = p(0)$. Por lo tanto, obtendría una ganancia menor o igual que la obtenida con σ^*. Los cambios en los periodos siguientes no afectan el pago de M. Entonces la restricción de σ^* es equilibrio en ese subjuego y, por lo tanto, es un equilibrio perfecto en subjuegos. ∎

Con ese equilibrio que hemos encontrado, el monopolio pierde su poder. Ya que, en la situación más desfavorable para los consumidores, aquella en que el número de los muy interesados es relativamente muy alto, todos los consumidores de tipo 1 compran a un precio relativamente bajo, $p(1) = p_1(1-\delta) + \delta p_2$, en el primer periodo. Mientras que los compradores menos interesados compran casi al costo en el segundo periodo. δ representa la impaciencia del monopolista por vender lo más pronto posible el producto. Cuanto más grande sea δ, más pequeño será $p(1)$. Además, si los compradores que no tienen un interés muy grande en el software son relativamente más que los que si lo tienen, en el sentido de que $(1-\delta) p_2 m \geq (p_1 - p_2) s$, M elegiría el precio p_2 desde el primer periodo y todos los consumidores comprarían en ese periodo al precio más bajo posible. Si p_2 es suficientemente pequeño estaríamos cercanos a la idea de Ronald Coase de que el monopolio termina compitiendo consigo mismo y se establece una situación análoga a la de la competencia perfecta. Nuestro juego es de memoria perfecta, no es de información perfecta, pues en cada periodo hay jugadas simultáneas. El equilibrio perfecto en subjuegos es en estrategias puras.

En el juego que acabamos de examinar la repetición ha provocado, como en los teoremas del folklore o de la tradición oral, la aparición de equilibrios buenos. En general, dichos teoremas se interpretan como una fundamentación, a pesar de que los equilibrios malos no han sido abolidos, de que si un juego con características tipo dilema del prisionero se repite por un grupo de contendientes racionales, éstos terminarían cooperando, estableciendo el bienestar de la sociedad. Es interesante observar que en su artículo Reputation in Bargaining and Durable Goods Monopoly, L. Ausubel y R. Deneckere [1] utilizan un teorema del folklore para fundamentar una

situación "antisocial". Ellos construyen un juego repetido que es una versión más sofisticada, pero más realista, del ejemplo del monopolio de bienes durables que acabamos de exponer. En el trabajo de dichos autores, un teorema de tradición oral relacionado con el problema, permite encontrar un equilibrio del juego repetido en el que el monopolio recupera su poder y obtiene una ganancia tan cercana como se quiera a la de un monopolio de bienes perecederos.

7.5. Inducción hacia atrás en estrategias mixtas

Para redondear el capítulo, exponemos un algoritmo de inducción hacia atrás para las estrategias mixtas, basado en una forma especial de introducir la descomposición y la composición de estrategias mixtas, respecto a un juego extensivo finito Γ que se puede descomponer en algún vértice no final A.

Supongamos que tenemos una estrategia pura σ^j del jugador j. Si el vértice A tiene probabilidad positiva de ser alcanzado por la elección de la estrategia pura σ^j, decimos que A está en $pos(\sigma)$ y que σ^j está en $P_j(A)$, el conjunto de estrategias puras de j que hacen posible que el juego llegue al vértice A.

Consideremos una estrategia mixta X^j del jugador j en el juego Γ. Daremos una forma para descomponer dicha estrategia en una parte para el subjuego Γ_A y otra parte para $\Gamma\,|A$.

Definición 7.5.1. Considérese un juego extensivo Γ que se puede descomponer en el vértice A. Decimos que la estrategia mixta X^j se descompone en X_A^j para Γ_A y en $X^j\,|A$ para $\Gamma\,|A$, si

a) Para $\widehat{\sigma}^j\,|A \in \Sigma^j\,|A$, se tiene $X^j\,|A\left(\widehat{\sigma}^j\,|A\right) = \sum\limits_{\sigma_A^j \in \Sigma_A^j} X^j\left(\sigma_A^j, \widehat{\sigma}^j\,|A\right)$;

b) Si X^j determina una probabilidad positiva de que ocurra A, entonces para $\widehat{\sigma}_A^j \in \Sigma_A^j$,

$$X_A^j\left(\widehat{\sigma}_A^j\right) = \frac{\sum\limits_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A,\ \sigma^j|A \in pos(A)} X^j\left(\widehat{\sigma}_A^j, \sigma^j\,|A\right)}{\sum\limits_{\sigma^j \in pos(A)} X^j\left(\sigma^j\right)};$$

b') Si X^j determina la probabilidad cero de que ocurra A, entonces para $\widehat{\sigma}_A^j \in \Sigma_A^j$, $X_A^j\left(\widehat{\sigma}_A^j\right) = \sum\limits_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A} X^j\left(\widehat{\sigma}_A^j, \sigma^j\,|A\right)$.

Definición 7.5.2. Sea $\widehat{X}^j$ una estrategia mixta del jugador j en el juego podado en el vértice A y $\widetilde{X}^j$ una estrategia mixta de j en el subjuego que empieza en A. Decimos que $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)$ estrategia mixta de j en Γ es la composición de $\widetilde{X}^j$ y $\widehat{X}^j$ si: para cada $\sigma^j \in \Sigma^j$, $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)(\sigma^j) = \widehat{X}^j\left(\sigma^j|A\right)\widetilde{X}^j\left(\sigma^j_A\right)$.

Claramente, la composición que hemos definido es una estrategia mixta para j en el juego completo, pues

$\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)(\sigma^j) \geq 0, \forall \sigma^j \in \Sigma^j$

y

$$\sum_{\sigma^j \in \Sigma^j}\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)(\sigma^j) = \sum_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A}\sum_{\sigma^j_A \in \Sigma^j_A}\widehat{X}^j\left(\sigma^j|A\right)\widetilde{X}^j\left(\sigma^j_A\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A}\widehat{X}^j\left(\sigma^j|A\right)\sum_{\sigma^j_A \in \Sigma^j_A}\widetilde{X}^j\left(\sigma^j_A\right) = \sum_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A}\widehat{X}^j\left(\sigma^j|A\right) = 1.$$

Proposición 7.5.3. *Sea $\widehat{X}^j$ una estrategia mixta del jugador j en el juego podado en el vértice A y $\widetilde{X}^j$ una estrategia mixta de j en el subjuego que empieza en A. Entonces $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)_A = \widetilde{X}^j$ y $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)|A = \widehat{X}^j$.*

Demostración. Para toda $\overline{\sigma}^j|A \in \Sigma^j|A$

$$\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)|A\left(\overline{\sigma}^j|A\right) = \sum_{\sigma^j_A \in \Sigma^j_A}\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\left(\sigma^j_A, \overline{\sigma}^j|A\right) =$$

$$\sum_{\sigma^j_A \in \Sigma^j_A}\widehat{X}^j\left(\overline{\sigma}^j|A\right)\widetilde{X}^j\left(\sigma^j_A\right) = \widehat{X}^j\left(\overline{\sigma}^j|A\right)\sum_{\sigma^j_A \in \Sigma^j_A}\widetilde{X}^j\left(\sigma^j_A\right) = \widehat{X}^j\left(\overline{\sigma}^j|A\right),$$

lo que es lo mismo $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)|A = \widehat{X}^j$. Para toda $\overline{\sigma}^j_A \in \Sigma^j_A$,

$$\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)_A\left(\overline{\sigma}^j_A\right) = \frac{\sum_{\sigma^j|A \in \Sigma^j|A,\ \sigma^j|A \in pos(A)}\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\left(\overline{\sigma}^j_A, \sigma^j|A\right)}{\sum_{\sigma^j \in pos(A)}\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)(\sigma^j)}.$$

Ahora, consideremos un perfil de estrategias mixtas tal que el jugador j elige su estrategia $\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)$; lo denotamos como $\left(X\left|\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\right.\right)$. La probabilidad de que ocurra A, dado dicho perfil, se calcula de la manera siguiente:

$$P_{\left(X|\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\right)}(A) =$$

$$\prod_{A_j \in S_0,\ A_{j+1} \in Alt(A_j) A \geq A_{j+1}} P\left(A_{j+1} \left| A_j\right.\right) \sum_{\sigma \in pos(A)} \left(X \left| \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\right.\right)(\sigma).$$

Consideramos para $A_j \in S_0$, $A_{j+1} \in Alt\left(A_j\right)$

$$\prod_{A_j \in S_0, A \geq A_{j+1}} P\left(A_{j+1} \left| A_j\right.\right) \left(\sum_{\sigma^1 \in pos_1(A)} \left(X \left| \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right) \right| X^1\right)(\sigma^1)\right) ...$$

$$\left(\sum_{\sigma^n \in pos_n(A)} \left(X \left| \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right) \right| X^n\right)(\sigma^n)\right)).$$

Pero si A está en $pos\left(\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\right)$,

$$\sum_{\sigma^j \in pos_j(A)} \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)(\sigma^j) = \sum_{\sigma^j \left| A, A \in pos(\sigma^j \left| A\right.\right.} \sum_{\sigma^j_A} \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\left(\sigma^j_A, \sigma^j \left| A\right.\right).$$

Por otro lado,

$$\sum_{\sigma^j \left| A, A \in pos(\sigma^j \left| A\right.\right.} \sum_{\sigma^j_A} \left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)\left(\sigma^j_A, \sigma^j \left| A\right.\right) = \sum_{\sigma^j \left| A, A \in pos(\sigma^j \left| A\right.\right.} \widehat{X}^j\left(\sigma^j \left| A\right.\right).$$

Combinando estos resultados y las definiciones de composición y descomposición de estrategias mixtas, tenemos que para cada $\overline{\sigma}^j_A$ en Σ_A,

$$\left(\widetilde{X}^j, \widehat{X}^j\right)_A \left(\overline{\sigma}^j_A\right) = \widetilde{X}^j_A\left(\overline{\sigma}^j_A\right).$$

∎

La proposición siguiente nos muestra que el juego podado en A, también en estrategias mixtas, es en cierto sentido el juego completo, cuando en el vértice B se ha "concentrado" el resultado de que los jugadores se hayan comportado de acuerdo a un perfil X.

Proposición 7.5.4. *Supongamos que Γ se descompone en A y que X es un perfil de estrategias mixtas. Entonces $E\left(X\right) = E\left|A_{(E_A(X_A))}\left(X\left|A\right.\right)\right.$, donde $E_A\left(X_A\right)$ es el vector de pago esperado asociado a $\Gamma\left|A_{E_A(X_A)}\right.$.*

Demostración.

$$E(X) = \sum_{F\in T} P_X(F)\,\pi(F) = \sum_{F\in T,\ F\geq A} P_X(F)\,\pi(F) + \sum_{F\in T,\ F\not\geq A} P_X(F)\,\pi(F).$$

Por su lado,

$$E\left|A_{(E_A(X_A))}(X\,|A)\right. = \sum_{F\in T,\ F\not\geq A} P_X(F)\,\pi(F) + P_X(A)\,E_A(X_A).$$

Pero si un vértice final no es mayor o igual que A,

$$P_X(F) = \sum_{(\sigma^1,\sigma^2,\ldots\sigma^n)} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} \ldots x^n_{\sigma^n} P_\sigma(F) =$$

$$\sum_{\sigma^j|A}\sum_{\sigma^j_A}(X^1\left(\left(\sigma^1_A,\sigma^1\,|A\right)\right)\ldots X^n\left(\left(\sigma^n_A,\sigma^n\,|A\right)\right)P_{\left(\sigma^j_A,\sigma^j|A\right)}(F)) =$$

$$\sum_{\sigma|A}\left(\prod_{j\in N}\left(\sum_{\sigma^j_A} X^j\left(\left(\sigma^j_A,\sigma^j\,|A\right)\right)\right)\right)P_{\sigma|A}(F) =$$

$$\sum_{\sigma|A} X\,|A\,(\sigma\,|A)\,P_{\sigma|A}(F) = P_{X|A}(F).$$

Además,

$$P_{X|A}(A) = \prod_{A_j\in S_0, A_{j+1}\geq A} P(A_{j+1}\,|A_j)\prod_{j\in N}\sum_{\sigma^j|A,\,A\in pos(\sigma^j|A)} X^j\,|A\left(\sigma^j\,|A\right) =$$

$$\prod_{A_j\in S_0, A_{j+1}\geq A} P(A_{j+1}\,|A_j)\prod_{j\in N}\sum_{\sigma^j|A,\,A\in pos(\sigma^j|A)}\sum_{\sigma^j_A} X^j_A\left(\sigma^j_A\right) =$$

$$\prod_{A_j\in S_0, A_{j+1}\geq A} P(A_{j+1}\,|A_j)\prod_{j\in N}\sum_{\sigma^j\in P_j(A)} X^j\left(\sigma^j\right).$$

Entonces $P_{X|A}(A) = P_X(A)$.
Tenemos dos casos:
i) $P_{X|A}(A) = 0$,
ii) $P_{X|A}(A) > 0$.
Supongamos que F mayor o igual que A.
Si i) es válido, $P_X(F) = 0$ y $P_X(F) = P_{X|A}(A)\,P_{X_A}(F\,|A)$.
Si ii) es válido,

$P_{X|A}(A)\,P_{X_A}(F\,|A) = P_X(A)\,P_{X_A}(F\,|A) = \sum_{\sigma\in\Sigma} X(\sigma)\,P_\sigma(F)$.

Por otro lado, $E_A(X_A) = \sum_{F\in T, F\geq A} P_{X_A}(F\,|A)\,\pi(F)$.

Juntando todas las igualdades, tenemos que

$$E(X) = E\left|A_{(E_A(X_A))}\,(X\,|A)\right..$$

∎

Como en los casos de las estrategias del juego extensivo (estrategias puras en su forma normal) y de las estrategias de comportamiento, la propiedad de que el juego podado, aunque ha perdido la información de lo que ocurre después de A, es "equivalente" al juego original, nos permite generalizar el teorema de que "la composición de equilibrios es un equilibrio" (teorema **??** para las estrategias puras, teorema 7.2.10 para las de comportamiento) a las estrategias mixtas y con ello, obtener un algoritmo de Zermelo o de inducción hacia atrás para el caso de las estrategias mixtas.

Teorema 7.5.5. *Supongamos que* Γ *se descompone en el vértice* A *y que* X_A^* *y* $X^*\,|A$ *son equilibrios de Nash(em) de* Γ_A *y* $\Gamma\left|A_{(E_A(X_A^*))}\right.$*, respectivamente. Entonces la composición* $(X_A^*, X^*\,|A)$ *es un equilibrio de Nash (em) de* Γ*.*

Demostración. Para cualquier estrategia mixta $\widehat{X}^j$ del jugador j, tenemos

$$E_j\left(\left((X_A^*, X^*\,|A)\left|\widehat{X}^j\right.\right)\right) = E\left|A_{(E_A(X_A))_j}\left(\left((X_A^*, X^*\,|A)\left|\widehat{X}^j\right.\right)|A\right)\right. =$$

$$\sum_{F\not\geq A} P_{(((X_A^*,X^*|A)|\widehat{X}^j)|A)}(F)\,\pi_j(F) +$$

$$P_{((X_A^*,X^*|A)|\widehat{X}^j)|A}(A)\,E_{A_j}\left(\left((X_A^*, X^*\,|A)\left|\widehat{X}^j\right.\right)_A\right) \leq$$

$$\sum_{F\not\geq A} P_{(((X_A^*,X^*|A)|\widehat{X}^j)|A)}(F)\,\pi_j(F) + P_{((X_A^*,X^*|A)|\widehat{X}^j)|A}(A)\,E_{A_j}((X_A^*)) =$$

$$E\left|A_{(E_A(X_A^*))_j}\left(\left((X_A^*, X^*\,|A)\left|\widehat{X}^j\right.\right)|A\right)\right. \leq$$

$$E\left|A_{(E_A(X_A^*))_j}((X_A^*, X^*\,|A)\,|A)\right. = E_j((X_A^*, X^*\,|A)).$$

Es decir, $(X_A^*, X^*\,|A)$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de Γ. ∎

El algoritmo de Zermelo (inducción hacia atrás) sería igual que en los otros casos, sólo que respetando las definiciones de composición que se han dado para las estrategias mixtas.

Estudiemos el ejemplo de la figura 7.5.1.

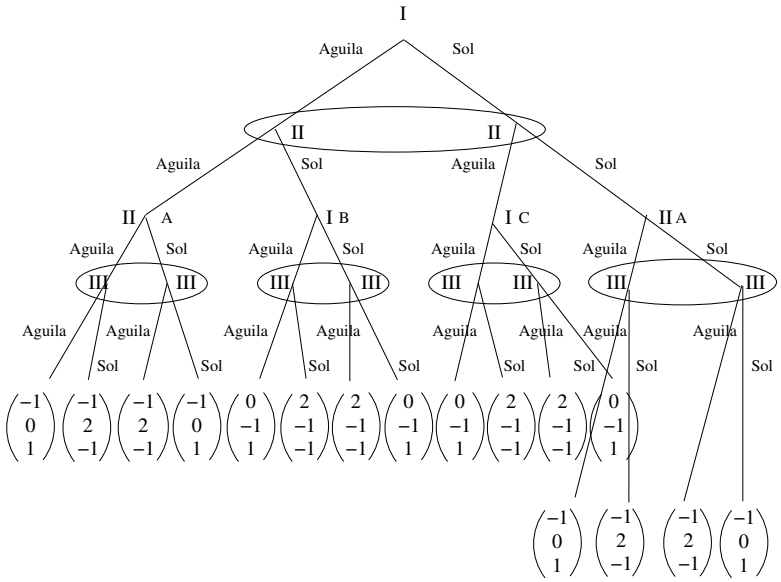

Figura 7.5.1:

Aplicándole el algoritmo, consideramos el subjuego Γ_A, cuya forma normal es $(N = \{II, III\}, \{D_j = \{1,2\}\}, \varphi_A)$, donde φ_A se describe en la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} (0,1) & (2,-1) \\ (2,-1) & (0,1) \end{pmatrix}.$$

El único equilibrio de Nash (em), referido a los jugadores involucrados II y III, es el perfil $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$. Dicho perfil determina el vector de pago esperado $(-1,1,0)$. Entonces asociamos dicho pago al vértice A y obtenemos el juego podado $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right.$. Consideremos el subjuego $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right._B$ cuya forma normal es $(N = \{I, III\}, \{D_j = \{1,2\}\}, \varphi_B)$, donde φ_B está representado por la misma matriz que φ_A. Es decir, también tiene como único equilibrio de Nash a $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ y el vector de pago esperado es $(1,-1,0)$. Arribamos al juego $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right|B_{(1,-1,0)}$ y consideramos el subjuego $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right|B_{(1,-1,0)}{}_C$, en el que participan de nuevo I y III, en el juego con la misma matriz que antes. Su único equilibrio es $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$, con vector de pago esperado $(1,-1,0)$. Construimos el juego $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right|B_{(1,-1,0)}\left|C_{(1,-1,0)}\right.$ y con-

sideramos su subjuego $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right|B_{(1,-1,0)}\left|C_{(1,-1,0)\,D}\right.$. En este subjuego participan los jugadores II y III y tiene la matriz de pagos considerada en los otros tres casos. El único equilibrio de Nash (em) de este juego es $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ que determina el vector de pago esperado $(-1,1,0)$. Tenemos, por último, el juego podado en los cuatro vértices, $\Gamma\left|A_{(-1,1,0)}\right|B_{(1,-1,0)}$ $\left|C_{(1,-1,0)}\right|D_{(-1,1,0)}$ (figura 7.5.2), en donde sólo juegan los jugadores I y II y cuya matriz de pago es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Águila} & \textit{Sol} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Águila} \\ \textit{Sol} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

El único equilibrio de Nash de este juego es, también, $((\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$.

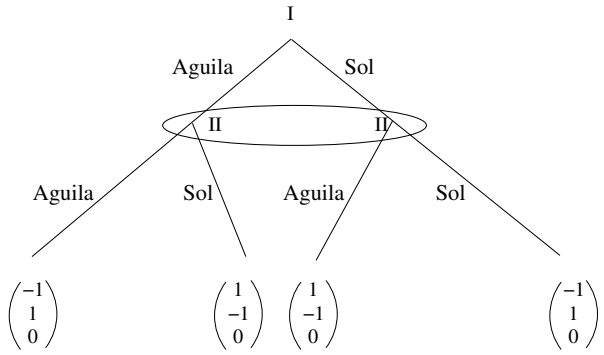

Figura 7.5.2:

¿Qué equilibrio en estrategias mixtas determina para el juego Γ, el algoritmo de Zermelo que hemos seguido?

En Γ, los jugadores I y II tienen 8 estrategias puras cada uno y el III tiene 16. Entonces el equilibrio de Nash del juego original será:

$X^{*I} = \left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$,

$X^{*II} = \left(\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right)$ y

$X^{*III} = \left(\frac{1}{16},\frac{1}{16},...,\frac{1}{16},...,\frac{1}{16},\frac{1}{16}\right)$.

En este juego, como en otros que tienen mayor interés, es más conveniente describir el único equilibrio de Nash del juego, a través de las estrategias de comportamiento. En ellas, en cada uno de sus conjuntos de información, cada uno de los tres jugadores escoge, con probabilidad un medio, el águila y con probabilidad un medio el sol.

No para todos los juegos es posible hacer esto, sólo en aquellos en los que los jugadores recuerdan todo lo que han hecho hasta el momento, es decir aquellos que hemos llamado de memoria perfecta.

7.6. Ejercicios

Ejercicio 7.1. Encuentre los vectores de pago correspondientes a los perfiles de estrategias de comporatamiento para el juego 7.5.1. La notación usada para describir estrategias de comportamiento en los juegos extensivos es análoga a la que usamos para las estrategias de dichos juegos.

$X^I = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right), (1,0)\right)$,
$X^{II} = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), (0,1), \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)\right)$,
$X^{III} = \left(\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right), \left(\frac{2}{15}, \frac{13}{15}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$
$X^I = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)\right)$,
$X^{II} = \left(\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), (0,1), \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)\right)$,
$X^{III} = \left(\left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right), \left(\frac{2}{15}, \frac{13}{15}\right), \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1,0), (0,1)\right)$.

Ejercicio 7.2. ¿Puede encontrar, para el juego de la figura 7.5.1 y un perfil de estrategias de comportamiento que sea equilibrio de Nash, pero no perfecto en subjuegos?

Ejercicio 7.3. Estudie todos los juegos extensivos que han aparecido en el libro y determine cuáles son de memoria perfecta y cuáles no lo son.

Ejercicio 7.4. Para los juegos de memoria perfecta finitos, lleve a cabo un algoritmo de Zermelo para encontrar un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento perfecto en subjuegos.

Ejercicio 7.5. Para esos mismos juegos encuentre un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en estrategias mixtas y compare los resultados obtenidos en el ejercicio 5.

Ejercicio 7.6. Para los juegos a los que se refiere el ejercicio 7.4, encuentre equilibrios de Nash en estrategias de comportamiento que no sean perfectos en subjuegos, si esto es posible.

Ejercicio 7.7. Estudie el juego de Cournot repetido por n periodos. Encuentre un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejercicio 7.8. Estudie el juego de Cournot repetido en horizonte infinito. Encuentre un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejercicio 7.9. Estudie el juego de Bertrand repetido por n periodos. Encuentre un equilibrio perfecto en subjuegos.

Ejercicio 7.10. Considere el siguiente juego:

Un grupo de 4 miembros está involucrado en el conflicto tipo dilema del prisionero siguiente:

$$G = (N = \{1, 2, 3, 4\}, \{D_j = \{Cooperar, No\ Cooperar\}\}, \varphi), \text{ con}$$

$$\varphi_j(\sigma) = \begin{cases} \gamma + \beta(s_\sigma + 1) - 1 & \text{si } \sigma^j = Cooperar, \\ \gamma + \beta s_\sigma & \text{si } \sigma^j = No\ Cooperar, \end{cases}$$

donde $s_\sigma = \#\left\{\sigma^i = Cooperar \,|\, i \neq j\right\}$, $\gamma = 1.2$, $\beta = .9$, $n = 4$.

Como hemos estudiado en el capítulo 1, el único equilibrio de Nash del juego es que nadie coopera.

El grupo considera la conveniencia de formar una organización. Cada uno, tiene que decidir si participa en ella o prefiere no hacerlo. Los que deciden participar se comprometen a cooperar, pero pueden decidir no hacerlo, y uno de ellos se encargará de vigilar si cumplen o no y castigar a los que no lo hagan. El que se encargue de vigilar y castigar no obtiene más ingreso que el salario que los miembros de la organización decidan pagarle por su tarea. Los otros miembros de la organización eligen el salario del vigilante dentro del conjunto $W = \{1, 1.2, 1.5\}$ y un castigo p al infractor dentro del conjunto $P = \{$menor que $.1 + .9\theta$, igual que $.1 + .9\theta$, mayor que $.1 + .9\theta\}$. Es decir, cada jugador j escoge $(w_j, p_j) \in W \times P$. El salario será el mínimo de $\{w_j\}$ y el castigo el máximo de $\{p_j\}$. Después de acordado el castigo y el salario, se elige al azar de entre los participantes al vigilante. El elegido acepta o rechaza el cargo, de acuerdo al salario que le pagarán. Si no lo acepta, la organización se deshace y los 4 miembros se enfrentarían en el dilema del prisionero. Si acepta, cada uno de los miembros de la comunidad deben decidir si cooperan o no lo hacen, en el entendido de que algunos de ellos serán castigados si no lo hacen. Los pagos son:

$$\varphi_{j(s,p,\theta)}(a) = \begin{cases} \gamma + \beta(1-\theta)(s_a + 1) - 1 & \text{si } a^j = C \text{ y } j \in N - \{i^*\}, \\ \gamma + \beta(1-\theta) s_a & \text{si } a^j = NC \text{ y } j \notin S, \\ \gamma + \beta(1-\theta) s_a - p & \text{si } a^j = NC \text{ y } j \in S - \{i^*\}, \\ \theta s_a & si \quad j = i^*. \end{cases}$$

El modelo extensivo se esboza en la figura 7.6.2.

Encuentre un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en estrategias de comportamiento que sea simétrico y con vector de pago no dominado.

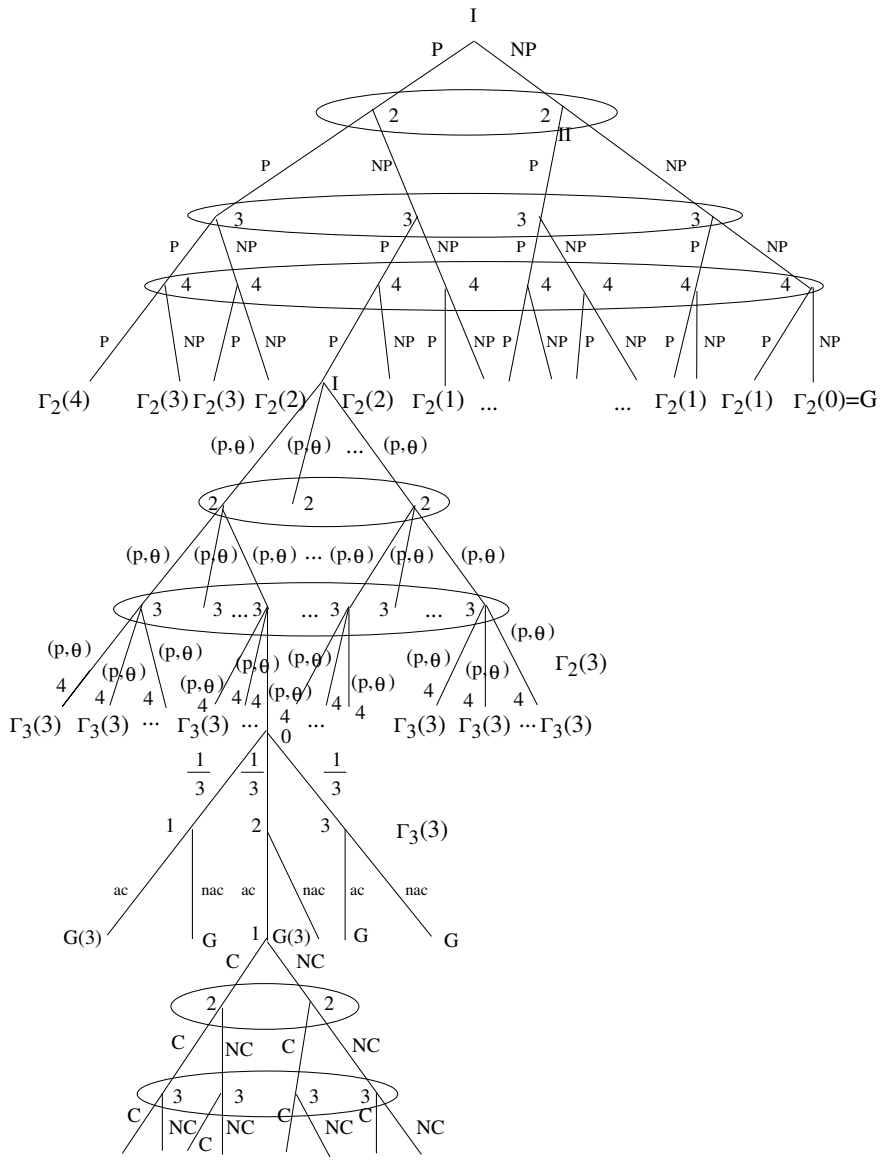

Figura 7.6.1:

Ejercicio 7.11. Estudie con cuidado el ejemplo 7.3.2 y elija un equilibrio para cada subjuego que pueda, elija equilibrios en estrategias mixtas y componga todos los equilibrios obtenidos para obtener un equilibrio de perfecto en subjuegos en estrategias mixtas. Esboce los dibujos de los subjuegos y de

los juegos podados, es decir, indique la estructura esencial.

Ejercicio 7.12. El juego con la matriz siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{agresivo} & \textit{conciliador} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{agresivo} \\ \textit{conciliador} \end{array} & \begin{pmatrix} (1,1) & (5,2) \\ (2,5) & (3,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

tiene tres equilibrios. ¿Cuántos equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias de comportamiento tiene el juego extensivo de la figura 7.6.2 que resulta de repetir 2 veces dicho juego? Los pagos de las dos etapas se suman.

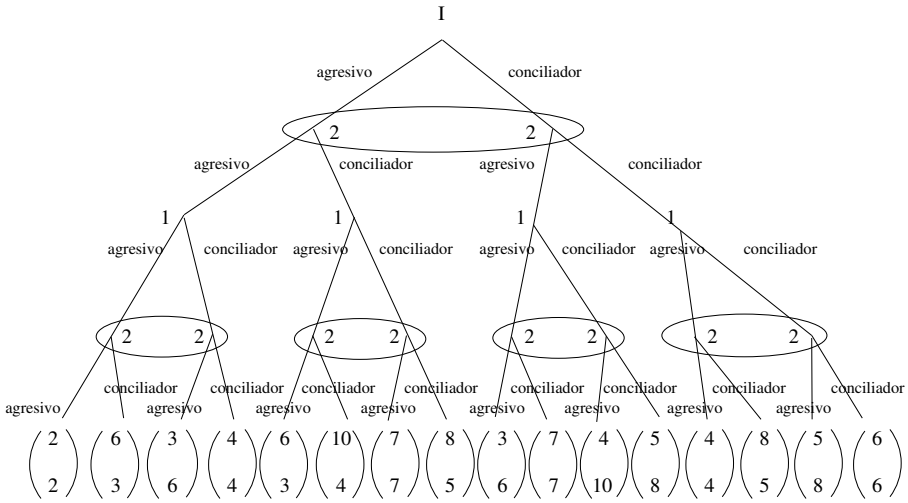

Figura 7.6.2:

Ejercicio 7.13. Diseñe un dilema del prisionero Γ de más de 2 jugadores y encuentre el valor de descuento δ mínimo para que el juego repetido (Γ, δ) tenga como uno de sus equilibrios de Nash al perfil "ojo por ojo, diente por diente".

Capítulo 8

Selección de Equilibrios

8.1. ¿Y si existe más de un equilibrio?

A lo largo de este texto nos hemos encontrado con numerosos juegos que tienen más de un equilibrio de Nash, tanto si nos limitamos a las estrategias puras, como a las mixtas. En algunas ocasiones, hemos argumentado a favor de algunos equilibrios y en contra de otros. Por ejemplo, en los juegos extensivos, preferimos los equilibrios de subjuego perfecto a los que no lo son, porque en los primeros se garantiza que los jugadores están prevenidos contra los errores que puedan cometerse. Análogamente en los juegos antagónicos (en estrategias puras o mixtas) argumentamos a favor de los equilibrios formados por estrategias conservadoras. Sin embargo, no hemos presentado una forma sistemática para discriminar dentro del conjunto de equilibrios y quedarnos sólo con el conjunto de equilibrios que sea "mejor" desde algún punto de vista preciso.

Esta problemática empezó a trabajarse desde finales de los años 50 del siglo pasado y su desarrollo, desde el inicio, se asocia a los nombres de Harsanyi y Selten. Por este desarrollo, estos autores recibieron, junto a John Nash, el premio Nobel de Economía en 1994. Desde luego, John Nash no es ajeno a esta problemática, como a muchos de los temas centrales de la Teoría de Juegos cuyo desenvolvimiento vislumbró, así fuera en sus lineamientos generales, desde los trabajos, en donde introdujo el concepto de equilibrio que lleva su nombre y demostró el teorema de existencia. Pero es en el extenso e importante libro "A General Theory of Equilibrium Selection in Games" de Harsanyi y Selten [26], donde se encuentran una gran cantidad de resultados y conceptos asociados a este tema y se exploran en forma muy extensa y sugestiva la mayoría de las ideas que se han generado a su alrededor, como

el concepto de equilibrio de subjuego perfecto, el equilibrio bayesiano y muchos otros. Las concepciones dinámicas de aprendizaje para la selección de equilibrio están también vinculadas a estos autores. Sin embargo, las ideas más relacionadas con una selección que se apoya en la racionalidad de los jugadores son las que expondremos de acuerdo a esos autores, mientras que las ideas que seleccionan equilibrios de acuerdo al aprendizaje, las tomamos de los llamados juegos evolutivos.

En este capítulo, expondremos brevemente dos enfoques distintos para la selección de equilibrios. En el primero de ellos, lo decisivo es encontrar criterios de discriminación de los equilibrios basados en supuestos sobre la racionalidad de los jugadores, en particular, sobre el riesgo que corren al elegir estrategias, y sobre el conocimiento que ellos tienen sobre todas las vicisitudes que pueden ocurrir y sobre la personalidad y gustos de los demás. En el segundo, por el contrario, se pretende simular la forma de actuar de personas comunes y corrientes con limitaciones de racionalidad y de conocimiento, aunque pueden tomar en cuenta su experiencia, con las limitaciones que mencionamos, para corregir sus estrategias intentando mejorar su pago, pero cometiendo errores en esta correcciones. En este último caso, se estudia hacia donde conducen esas correcciones con errores, si lo hacen o no a equilibrios de Nash y cuáles de éstos seleccionarían, en caso de hacerlo. En ambos enfoques, como decíamos, Harsanyi y Selten son importantes, aunque, en el segundo que es mucho más reciente, hay asociados a él muchos otros nombres, en especial el de Maynard Smith [35]. Fue en la década de los 80 que se empezó a desarrollar ampliamente este enfoque que busca darle al concepto de solución de Nash un fundamento más acorde con la filosofía de los juegos no cooperativos.

En la sección 8.2 de este capítulo, elegimos, para exponer los criterios de selección "racional", en primer lugar, las ideas de Nash sobre dicha selección y, en segundo lugar, el artículo de Harsanyi de 1959. Este artículo desarrolla sistemáticamente una forma de selección basada en fuertes criterios de racionalidad.

Frente a este enfoque se exponen, en la mayor parte del capítulo, a partir de la sección 8.3, las ideas dinámicas de selección propias de los Juegos Evolutivos. Nos basamos para dicha exposición en los trabajos de Kandori, Mailath, Rob [28, 29] y Young [56, 57].

8.2. Selección de Harsanyi

Los criterios de Nash y los del artículo pionero de Harsanyi [25] para seleccionar equilibrios resultan, en cierto sentido, normativos, pues se basan en definiciones de dominancia de unos equilibrios sobre otros que requieren hipótesis de racionalidad y de conocimiento, tanto privado como común, muy fuertes. A pesar de que el ideal de la teoría de Juegos No Cooperativos está muy alejado de este tipo de supuestos tan fuertes, no le ha sido fácil prescindir de ellos. El mismo concepto de solución propio de esta teoría, el equilibrio de Nash, los contiene ampliamente. En esta sección expondremos el método de selección correspondiente a estos supuestos.

Veamos, primero, el enfoque de selección de Nash.

8.2.1. La Selección de Equilibrios Propuesta por Nash

Equilibrios intercambiables

Dado un juego rectangular, la primera idea para escoger el subconjunto de equilibrios de un cierto juego que tuviera derecho a ser llamado la solución del juego es de Nash. Para él, este tipo de subconjuntos de equilibrios tendría que ser de tal manera que los jugadores llegaran a alguno de sus puntos, sin necesidad de ponerse de acuerdo. Supongamos que dos equilibrios X^* y X^{**} pertenecieran al conjunto solución, si los jugadores tienen que actuar sin avisarse, ni siquiera a través de señales, de cuál de los dos equilibrios piensan elegir, es muy probable que unos se inclinaran por las estrategias correspondientes a X^* y otros por las de X^{**} y, entonces, ni el perfil X^* ni el X^{**} se alcanzarían, sino alguna de las posibles combinaciones de estrategias de ambos perfiles. Nash reflexiona diciendo que el conjunto solución debe ser de tal manera que cualquiera de esas combinaciones de equilibrios en el conjunto solución debe ser, a su vez, un equilibrio que pertenezca a dicho conjunto. Precisamos la idea en la primera definición.

Definición 8.2.1. Se dice que X^* y X^{**}, dos equilibrios de Nash de un juego rectangular, son intercambiables, si cualquier perfil $(Y^1, Y^2, \ldots, Y^n)$ tal que $Y^j = X^{*j}$ o $Y^j = X^{**j}$ es equilibrio de Nash.

Definición 8.2.2. Un subconjunto Γ^* de equilibrios de Nash de un juego rectangular es una solución de Nash, si cada pareja de elementos de Γ^* es intercambiable y Γ^* es maximal respecto a dicha propiedad.

Sea B un subconjunto de equilibrios de Nash de un juego y $\widehat{X}^j$ una estrategia mixta de j, denotamos como $B(\widehat{X}^j)$ al conjunto

$\{(X \left| \widehat{X}^j \right.) \in B\}$.

Definición 8.2.3. Sea B un subconjunto de equilibrios de un juego rectangular y $\widehat{X}^j$ una estrategia de j. El pago de seguridad de $\widehat{X}^j$ relativo a B es, por definición, $\min\limits_{(X|\widehat{X}^j)\in B} E_j\left(X \left| \widehat{X}^j \right.\right)$.

Dado un subconjunto de equilibrios B y el perfil de estrategias mixtas X, B es admisible respecto a X, si el pago de seguridad de la estrategia X^j relativo a B está bien definido, para toda j.

Si B es admisible respecto a algún $\left(X \left| \widehat{X}^j \right.\right) \in B$, denotemos como $E_j^*\left(\widehat{X}^j \,|B\right)$ al $\min\limits_{(X|\widehat{X}^j)\in B} E_j\left(X \left| \widehat{X}^j \right.\right)$.

Lema 8.2.4. *Si Γ^* es una solución de Nash, entonces para todo $\widehat{X}$ en Γ^*, tenemos que $E_j^*\left(\widehat{X}^j \,|\Gamma^*\right) = \min\limits_{X\in\Gamma^*} E_j(X)$ para todo jugador j.*

Demostración. Sean X^* y X^{**} dos equilibrios cualesquiera en Γ^*. Ambos son intercambiables y por las propiedades de equilibrio de ambos perfiles, tenemos

$E_j\left(X^* \left| X^{*j} \right.\right) \geq E_j\left(X^* \left| X^{**j} \right.\right) \geq E_j\left(X^* \left| X^{*j} \right.\right)$.

Es decir, $E_j(X^*) = E_j\left(X^* \left| X^{**j} \right.\right)$

Por otro lado, para todo jugador j,

$E_j^*\left(X^{**j} \,|\Gamma^*\right) = \min\limits_{(X|X^{**j})\in\Gamma^*} E_j\left(X \left| X^{**j} \right.\right) = E_j\left(\widetilde{X} \left| X^{**j} \right.\right)$ para algún equilibrio $\widetilde{X}$ de Γ^*. Por otra parte,

$E_j\left(\widetilde{X} \left| X^{**j} \right.\right) = E_j\left(\widetilde{X} \left| X^{*j} \right.\right) \leq E_j^*\left(X^{*j} \,|\Gamma^*\right) = \min\limits_{(X|X^{*j})\in\Gamma^*} E_j\left(X \left| X^{*j} \right.\right)$.

Pero $\min\limits_{(X|X^{*j})\in\Gamma^*} E_j\left(X \left| X^{*j} \right.\right) = E_j\left(\widetilde{\widetilde{X}} \left| X^{*j} \right.\right)$ para algún equilibrio $\widetilde{\widetilde{X}}$ de Γ^*.

Por lo tanto, $E_j\left(\widetilde{\widetilde{X}} \left| X^{*j} \right.\right) \leq E_j\left(\widetilde{\widetilde{X}} \left| X^{**j} \right.\right) \leq E_j^*\left(X^{**j} \,|\Gamma^*\right)$.

Usando todas las desigualdades, se obtiene que $E_j^*\left(X^{**j} \,|\Gamma^*\right) = E_j^*\left(X^{*j} \,|\Gamma^*\right)$, es decir todos los equilibrios de una solución de Nash tienen el mismo pago de seguridad relativos a esta solución.

Además, $\min\limits_{X\in\Gamma^*} E_j(X) = E_j\left(\widehat{X}\right)$ para algún equilibrio $\widehat{X}$ en Γ^*, por lo que

$$E_j\left(\widehat{X}\right) = E_j\left(\widehat{X} \left| \widehat{X}^j \right.\right) \geq E_j^*\left(\widehat{X}^j \,|\Gamma^*\right) \geq E_j\left(\widehat{X}\right) = \min_{(X)\in\Gamma^*} E_j^*(X).$$

∎

Es decir, los equilibrios de una solución de Nash son equivalentes por los pagos usuales y por los pagos de seguridad. Desgraciadamente no siempre existen.

8.2.2. La Selección de Harsanyi

Harsanyi construye, en su artículo de 1963, una metodología sistemática para ir depurando el conjunto de equilibrios de Nash de un juego hasta obtener un subconjunto de equilibrios "satisfactorio" que pueda considerarse la solución del juego. Esta solución siempre existe.

Como decíamos más arriba, la selección de Harsanyi está basada en fuertes supuestos de racionalidad. Una racionalidad que se establece frente a la seguridad, el equilibrio y el riesgo.

Este autor considera como situaciones muy diferentes, aquella que ocurre en un juego, en el que los jugadores no pueden tener ningún tipo de comunicación, estando obligados a limitarse a acuerdos tácitos y la que ocurre en un juego en el que hay comunicación, aunque no sea más que a través de señales, entonces se definen dos conceptos de solución, la $t-$ solución, para los primeros, y la $v-$solución, para los segundos. Estas soluciones coinciden en gran cantidad de casos, pero no en todos.

8.2.3. La v-Solución y la t-Solución de Harsanyi

En primer lugar, está la idea de seguridad, en el sentido de que los jugadores se mueven con base en lo que pueden lograr por sus propias fuerzas, en la forma que se introdujo el máximo asegurable.

Es cierto que en un equilibrio de Nash, cualquier jugador j gana al menos dicho máximo asegurable, $v_j = \max\limits_{X^j \in M_j} \min\limits_{X \in M} E_j\left(X \,\middle|\, X^j\right)$, pero si a alguno de ellos se le ocurre cambiar de estrategia, j puede ganar menos. Es decir, cuando un jugador j elige una estrategia de equilibrio no siempre estará seguro de ganar al menos v_j. Examinemos, por ejemplo, el juego 1.3.2 c),

$$\begin{pmatrix} (-1,-1) & (0,2) \\ (2,0) & (-5,-5) \end{pmatrix}.$$

En este juego, la pareja de estrategias $(1,2)$ es un equilibrio de Nash. El máximo asegurable en estrategias mixtas para el jugador I es $-5/8$. En el equilibrio $(1,2)$, I gana 0, una cantidad mayor que v_I, pero si, por cualquier razón, el segundo jugador escoge su primera estrategia, mientras que I sigue en la estrategia del equilibrio en cuestión, la 1, ganará -1 que es menor que $-5/8$.

¿Por qué podría aceptar, un jugador, actuar de acuerdo a un equilibrio de Nash? Porque le da cierta seguridad sobre la conducta de los demás jugadores, aunque siempre hay un riesgo de que ellos no cumplan. El problema es que a veces dicho riesgo significa ganar menos que el máximo asegurable. Pensemos en un equilibrio de Nash X^* en el que j gana algo que puede conseguir por sí mismo, por ejemplo v_j. Y que, además, para X^* hay una estrategia X^k de un jugador k, tal que $E_j\left(X^* \left| X^k\right.\right) < v_j$. Claramente, para j, no valdría la pena correr el riesgo. Por ello, dicho jugador sólo considerará correr el riesgo de ganar menos que su máximo asegurable para los equilibrios en los que obtenga un pago estrictamente mayor que el máximo asegurable. Pero esto debe ser cierto no sólo para él mismo, sino también para todos los demás. Es decir, j sólo considerará correr el riesgo de actuar de acuerdo al equilibrio X^* si para todo k, $E_k\left(X^*\right) > v_k$. Esto último, no porque a j le preocupe, en lo más mínimo, el bienestar de los demás, sino porque sabe que si algún otro jugador k gana con un equilibrio X^* su máximo asegurable y X^{*k} no es una estrategia conservadora, entonces no es posible contar con que k actuará de acuerdo a X^*.

La idea de seguridad ha sido introducida, en este texto, desde el primer capítulo con las estrategias puras conservadoras de los jugadores que les permiten, sin importar las acciones de los demás jugadores, ganar al menos su máximo asegurable respecto a las estrategias puras. Después se extendió al contexto de estrategias mixtas. Harsanyi trabaja el concepto relativo a cualquier subconjunto de estrategias mixtas.

Para arribar a la primera selección de Harsanyi, definimos:

Definición 8.2.5. Se dice que *un equilibrio de Nash X^* es beneficioso si, para toda j, $E_j(X^*) > v_j$.*

Entonces, un jugador j no puede aceptar actuar de acuerdo a un perfil de estrategias X, si éste no es un equilibrio beneficioso.

En el ejemplo anterior, los dos equilibrios en estrategias puras $(1,2)$ y $(2,1)$ son beneficiosos; en cambio el equilibrio $((5/8,3/8),(5/8,3/8))$ no lo es pues los jugadores ganan $-5/8$, el máximo asegurable para ambos.

Estudiemos un ejemplo con más equilibrios.

Ejemplo 8.2.1.

$$\begin{pmatrix} (0,0) & (1,0) \\ (2,1) & (0,0) \end{pmatrix}$$

El conjunto de equilibrios es

$$\{((1,0),(y,(1-y))\,|0<y<1/3\,\} \cup \{((0,1),(1,0)),((1,0),(0,1))\}.$$

Como tenemos que $v_1 = 2/3$ y $v_2 = 0$, el único equilibrio beneficioso es $((0,1),(1,0))$, pues en todos los demás el pago que obtiene el jugador II es 0.

La primera depuración del conjunto de estrategias de un jugador que realiza Harsanyi es la de deshacerse de aquellas que no forman parte de algún equilibrio beneficioso. Con ello, obtiene un juego más pequeño, con los conjuntos de estrategias restantes.

Denotemos como Γ^0 , al conjunto de todos los equilibrios y como Γ^1 al subconjunto de los equilibrios beneficiosos, $\Gamma^1 \subseteq \Gamma^0$. Notemos que Γ^1 puede ser vacío. Por ejemplo, los juegos antagónicos del capítulo 1, en particular todos los juegos bipersonales de suma cero no tienen equilibrios beneficiosos.

Primer Criterio para la Selección de Harsanyi

En caso de que el conjunto de equilibrios beneficiosos del juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$ sea vacío, podemos decir que la solución de Harsanyi del juego (la $v-$ solución y la $t-$solución) es el conjunto

$\{(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2, \ldots, \widehat{X}^n) \Big| \ \widehat{X}^j$ *es conservadora, para toda* j $\}$

Podemos establecer los resultados siguientes.

Proposición 8.2.6. *En un juego* 2×2*, sin equilibrio de Nash en estrategias puras, la* $v-$ *solución es el conjunto de perfiles de estrategias mixtas conservadoras (la* $t-$*solución coincide con la* $v-$*solución).*

Demostración. El juego puede expresarse con la matriz

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix},$$

con $a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}$ y $b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}$ distintos que cero.

El único equilibrio del juego es de la forma $(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2)$, donde

$$\widehat{X}^1 = (\frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}}, \frac{b_{11} - b_{12}}{b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}})$$

y

$$\widehat{X}^2 = (\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}}).$$

Sea $a = a_{11} - a_{12} + a_{22} - a_{21}$ y $b = b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21}$, entonces,
$E_1(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2) = \frac{1}{ab}((b_{22} - b_{21})\,(a_{22} - a_{21})\,a_{11} +$
$(b_{22} - b_{21})\,(a_{11} - a_{12})\,a_{12} + (b_{11} - b_{12})\,(a_{22} - a_{21})\,a_{21} +$
$(b_{11} - b_{12})\,(a_{11} - a_{12})\,a_{22} =$

$\frac{1}{ab}(b_{11} - b_{12} + b_{22} - b_{21})\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = v_1$.

Análogamente, se demuestra que $E_2(\widehat{X}^1, \widehat{X}^2) = v_2$.

Para algunos de estos juegos 2×2, el equilibrio está formado por estrategias conservadoras, en cambio para otros no. En los primeros, la solución sería el equilibrio, en los segundos la pareja de estrategias conservadoras. ∎

Por los resultados obtenidos en el capítulo 6, se tiene la proposición 8.2.7.

Proposición 8.2.7. *En un juego antagónico, tanto la v-solución, como la t-solución es el conjunto de los equilibrios de Nash que están formados por estrategias conservadoras para cada jugador.*

Otro de los ejemplos que aparece en muchas ocasiones es el dilema del prisionero n-personal (ejemplos 1.3.6 a) y b)). En ese juego, el único equilibrio de Nash es el perfil en el que los jugadores eligen No Cooperar. Este equilibrio no es beneficioso, pues los jugadores ganan exactamente su máximo asegurable. Entonces Γ^1 es vacío, la solución (los conjuntos v-solución y t-solución de Harsanyi) consta del perfil formado por estrategias conservadoras que además es el único equilibrio de Nash del juego, es decir,

$\Gamma^0 = \{(No\ Cooperar, No\ Cooperar, \ldots, No\ Cooperar)\}$.

Segundo Criterio de Harsanyi

Supongamos, ahora, que Γ^1 no es vacío. Para construir el segundo criterio de Harsanyi se establecen ciertos criterios de dominancia, de unos equilibrios sobre otros, basados en los pagos de seguridad que tienen los jugadores, respecto a las estrategias correspondientes a equilibrios de Nash que están en subconjuntos de Γ^1.

Dominancia Simple y Dominancia Estricta

Eliminamos todas las estrategias, de cada jugador j, que no correspondan a equilibrios beneficiosos; denotemos como $\widetilde{M}_j^1$ a dicho conjunto, como $\overline{\Gamma}$ al juego correspondiente y como $\overline{\Gamma}^1$ al conjunto de equilibrios de ese juego que es menor que Γ^1.

Establecemos dos criterios de dominancia, el simple y el estricto, relativos a subconjuntos de equilibrios beneficiosos y los utilizamos para depurar, en iteraciones sucesivas, los conjuntos de estrategias. De esta manera, se irán considerando juegos cada vez más pequeños.

Definición 8.2.8. Sea $B \subseteq \Gamma^1$Dados $\widehat{X}$ y $\widehat{\widehat{X}}$ en B, decimos que $\widehat{X}$ domina estrictamente a $\widehat{\widehat{X}}$ en B, si $E_j^*\left(\widehat{X}^j \,|B\right) > E_j^*\left(\widehat{\widehat{X}}\right)$ para todo jugador j. Decimos que $\widehat{X}$ domina simplemente a $\widehat{\widehat{X}}$ en B, si $E_j^*\left(\widehat{X}^j \,|B\right) > E_j^*\left(\widehat{\widehat{X}}^j \,|B\right)$ para toda j.

Se establece, entonces, un proceso de depuración de estrategias eliminando aquellas que no se usan en equilibrios que no están estrictamente dominados por ningún otro. Inmediatamente, se considera el conjunto de equilibrios en este juego más chico y así sucesivamente. Obteniéndose, con este proceso, una sucesión de subconjuntos de equilibrios, cada uno de ellos contenido en el anterior.

Sea $\overline{\Gamma}^1 = \Gamma^1$, $B \subseteq \Gamma^1$ y $F_e\,(B)$ el conjunto de equilibrios que no están estrictamente dominados en B.

Sea $D_e^j(B) = \{X^j \,\big|X^j$ no se usa en los perfiles de $F_e\,(B)\}$.

Para toda j, borramos todas las estrategias de j en $D_e^j(\overline{\Gamma}^1)$, es decir

$$\widetilde{M}_j^2 = \widetilde{M}_j^1 - D_e^j(\overline{\Gamma}^1).$$

Sea $\overline{\Gamma}^2$ el conjunto de equilibrios de este juego depurado.

Supongamos que hemos construido $\widetilde{M}_j^k$ y $\overline{\Gamma}^k$; ahora construimos

$$\widetilde{M}_j^{k+1} = \widetilde{M}_j^k - D_e^j(\overline{\Gamma}^k)$$

Sea $\overline{\Gamma}^{k+1}$ el conjunto de equilibrios del nuevo juego.

Es evidente que $\overline{\Gamma}^{k+1}$ está contenido en $\overline{\Gamma}^k$, para k=1, 2, ...

Tenemos dos posibles resultados de este proceso de depuración basado en la dominancia estricta:

a) El proceso "termina" en un número finito de pasos, es decir existe un número natural mínimo $\widehat{k}$ tal que $\overline{\Gamma}^{\widehat{k}+1} = \overline{\Gamma}^{\widehat{k}}$, en cuyo caso decimos que $\overline{\Gamma}^{\widehat{k}}$es d_e-estable.

b) La sucesión $\{\overline{\Gamma}^k\}$ es infinita.

Proposición 8.2.9. *Si la sucesión $\{\overline{\Gamma}^k\}$ es infinita, entonces la intersección de las $\overline{\Gamma}^k$ no es vacía.*

Demostración. Consideremos el conjunto de pagos de los equilibrios beneficiosos; existe al menos uno de estos equilibrios X^{**} tal que $E(X^{**})$ no

está dominado, coordenada a coordenada, por ningún otro vector de pagos. Por lo tanto, X^{**} está en todos los conjuntos $\overline{\Gamma}^k$ y la intersección infinita no es vacía. ∎

Obviamente, en el caso finito podemos considerar la sucesión infinita $\{\overline{\Gamma}^k\}$ que a partir de cierta $\widehat{k}$, $\overline{\Gamma}^k = \overline{\Gamma}^{\widehat{k}}$. Entonces, el resultado del proceso de depuración, en ambos casos, se puede considerar como la intersección infinita de las $\overline{\Gamma}^k$. Con este conjunto iniciamos un nuevo proceso de depuración, ahora usando el criterio de dominancia simple.

Denotemos a $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\Gamma}^i$ como $\overline{\overline{\Gamma}}^1$, y sea $\widetilde{\widetilde{M}}_j^1$ el conjunto de las estrategias de j que se usan en algún equilibrio de $\overline{\overline{\Gamma}}^1$.

Sea $B \subseteq \overline{\overline{\Gamma}}^1$ y $F_s(B)$ el conjunto de equilibrios que no están simplemente dominados en B. Sea $D_s^j(B) = \{X^j \,|\, X^j$ no se usa en los perfiles de $F_s(B)\}$.

Para toda j, borramos todas las estrategias de j en $D_s^j(\overline{\overline{\Gamma}}^1)$, es decir $\widetilde{\widetilde{M}}_j^2 = \widetilde{\widetilde{M}}_j^1 - D_s^j(\overline{\overline{\Gamma}}^1)$. Sea $\overline{\overline{\Gamma}}^2$ el conjunto de equilibrios de este juego depurado.

Supongamos que tenemos $\widetilde{\widetilde{M}}_j^k$ y $\overline{\overline{\Gamma}}^k$. Entonces construimos $\widetilde{\widetilde{M}}_j^{k+1}$ como $\widetilde{\widetilde{M}}_j^k - D_s^j(\overline{\overline{\Gamma}}^k)$ y consideramos $\overline{\overline{\Gamma}}^{k+1}$ el conjunto de equilibrios del juego depurado.

Para $k = 1, 2, \ldots,$ $\overline{\overline{\Gamma}}^{k+1} \subseteq \overline{\overline{\Gamma}}^k$.

De nuevo, puede pasar que el proceso se estacione a partir de un $\widehat{\widehat{k}}$ mínimo o que continúe indefinidamente, pero en ambos casos la intersección es no vacía.

Proposición 8.2.10. $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\overline{\Gamma}}^i$ *no es vacía.*

Demostración. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\overline{\Gamma}}^i$ es vacía, entonces para cada equilibrio X^* en $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\Gamma}^i$, existe un último k' tal que $\overline{\overline{\Gamma}}^{k'}$ contiene a X^*. Es decir, X^* pertenece a todos los conjuntos del encaje $\overline{\overline{\Gamma}}^{k'} \subseteq \overline{\overline{\Gamma}}^{k'-1} \subseteq \ldots \subseteq \overline{\overline{\Gamma}}^1$, pero no a $\overline{\overline{\Gamma}}^{k'+1}$.

Definamos $U : \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\Gamma}^i \longrightarrow R^n$, como $U(X) = E^*(X \,|\, \overline{\overline{\Gamma}}^{k'})$, donde k' es el último conjunto del encaje generado en el que se encuentra X.

Pensemos en el conjunto de vectores $U(X)$ tales que X está en $\overline{\overline{\Gamma}}^1$. En este conjunto existe al menos un vector $\widetilde{X}$ que no está dominado simplemente por ningún otro vector del mismo conjunto. Sea $\overline{\overline{\Gamma}}^s$ el último conjunto del encaje generado por la dominancia simple en el que se encuentra $\widetilde{X}$.

En $\overline{\overline{\Gamma}}^s$ debe haber algún equilibrio $\widetilde{\widetilde{X}}$ que domina simplemente a $\widetilde{X}$, pues de lo contrario, $\widetilde{X}$ estaría en $\overline{\overline{\Gamma}}^{s+1}$. Entonces $\widetilde{X}$ está dominado, lo que es contrario a lo que se había supuesto. ∎

Denotemos como $\overline{\overline{\Gamma}}$ a $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\overline{\Gamma}}^i$.

Ya estamos preparados para el segundo criterio de Harsanyi, dice lo siguiente:

Si para cada pareja de equilibrios de Nash $\widehat{X}$ y $\widehat{\widehat{X}}$ que pertenece a $\overline{\overline{\Gamma}}$ se cumple que $E_j^*(\widehat{X}^j \left| \overline{\overline{\Gamma}}^{k'} \right.) = E_j^*(\widehat{\widehat{X}}^j \left| \overline{\overline{\Gamma}}^{k'} \right.)$ para todo jugador j, entonces la $v-$solución del juego es $\overline{\overline{\Gamma}}$.

Tenemos dos casos posibles:

a) Los equilibrios de $\overline{\overline{\Gamma}}$ son intercambiables; entonces también la $t-$solución del juego es $\overline{\overline{\Gamma}}$. En ese caso, también la solución de Nash es $\overline{\overline{\Gamma}}$.

b) Los equilibrios de $\overline{\overline{\Gamma}}$ no son intercambiables y hay que considerar otro criterio de dominancia para obtener la $t-$solución.

En el caso b) es en el que puede haber diferencia entre los resultados que se obtienen cuando existe comunicación entre los jugadores, aunque esta sea mínima (los juegos vocales) y los resultados para juegos sin ninguna comunicación (los juegos tácitos).

Para el caso b), y para cuando los elementos de $\overline{\overline{\Gamma}}$ no tienen el mismo pago de seguridad relativo a $\overline{\overline{\Gamma}}$, tenemos que considerar la racionalidad de los jugadores ante el riesgo.

Pero examinemos, antes, algunos ejemplos. Dos de ellos pueden solucionarse apelando al primero y segundo criterios de selección de Harsanyi, mientras que para el tercero no son suficientes dichos criterios.

Ejemplo 8.2.2. Sea Γ el juego

$$\begin{pmatrix} (2,2) & (-1,0) \\ (0,-1) & (1,1) \end{pmatrix},$$

de modo que $\Gamma^0 = \{((1,0),(1,0)),((0,1),(0,1)),((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2}))\}$,

$v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}$.
Por lo tanto, $E_1((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})) = v_1$, $E_2((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},\frac{1}{2})) = v_2$.
Entonces $\Gamma^1 = \{((1,0),(1,0)),((0,1),(0,1))\}$.
Sea $\overline{\Gamma}^1 = \Gamma^1$. Obsérvese que $((1,0),(1,0))$ domina estrictamente a $((0,1),(0,1))$, pues

$$E_1^*((1,0)\,\big|\,\Gamma^1) = 2,\ E_2^*((1,0)\,\big|\,\Gamma^1) = 2,$$

$$E_1((0,1),(0,1)) = 1,\ \ E_2((0,1),(0,1)) = 1.$$

Por lo tanto $\overline{\Gamma}^2 = \{((1,0),(1,0))\}$.
El proceso de depuración termina con $((1,0),(1,0))$.
Entonces la $v-$solución y la $t-$solución de Harsanyi son iguales a

$$\{((1,0),(1,0))\}.$$

Ejemplo 8.2.3.

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (2,1) \\ (1,2) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

En este juego, todas las parejas de estrategias mixtas son equilibrios de Nash. Es decir, $\Gamma^0 = M_1 \times M_2$.
$v_1 = 1$, $v_2 = 1$.

$$E_1((x,1-x),(y,1-y)) = \begin{cases} 1 & \Longleftrightarrow y = 1, \\ \text{mayor que } 1 & \Longleftrightarrow y < 1, \end{cases}$$

y

$$E_2((x,1-x),(y,1-y)) = \begin{cases} 1 & \Longleftrightarrow x = 1, \\ \text{mayor que } 1 & \Longleftrightarrow x < 1. \end{cases}$$

Entonces los equilibrios que están en la unión de los conjuntos
$\{((1,0)\,,(y,1-y))\,|y \in [0,1]\,\}$ y
$\{((x,1-x)\,,(1,0))\,|x \in [0,1]\,\}$
no son beneficiosos, por lo que

$$\Gamma^1 = \{((x,1-x),(y,1-y))\,|\ 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\,\}.$$

Hacemos $\overline{\Gamma}^1 = \Gamma^1$.
Para todo equilibrio $(\widehat{X}^1,\ \widehat{X}^2)$ en $\overline{\Gamma}^1$ y para $j = 1,2$,

$$E_j^*(\widehat{X}^j\,\Big|\,\overline{\Gamma}^1) = \min_{(X|\widehat{X}^j)\in\overline{\Gamma}^1} \left(2 - x_1^j\right) > 1.$$

Sin embargo, $E_j^*(\widehat{\widehat{X}}^1,\ \widehat{\widehat{X}}^2) = 2 - x_1^k > 1$ para k distinto de j y para cualquier $(\widehat{\widehat{X}}^1,\ \widehat{\widehat{X}}^2)$ en $\overline{\Gamma}^1$. Por lo tanto, $D_e(\overline{\Gamma}^1) = \theta$ y $\overline{\overline{\Gamma}}^1 = \overline{\Gamma}^1$.

Es claro que tampoco existen puntos que dominen simplemente a ningún (X^{*1}, X^{*2}) en $\overline{\overline{\Gamma}}^1$. Es decir, $\overline{\overline{\Gamma}} = \overline{\overline{\Gamma}}^1$. Además, se cumple que el pago de seguridad relativo a $\overline{\overline{\Gamma}}$ es el mismo en cada punto de $\overline{\Gamma}$ para los dos jugadores.

Entonces, la solución de Harsanyi (la $v-$solución y la $t-$solución) es

$$\{((x, 1-x), (y, 1-y)) \,|0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}.$$

Tendremos que establecer un tercer criterio, en cambio, en otros juegos no simétricos, como el siguiente

Ejemplo 8.2.4.

$$\begin{pmatrix} (-100, -10) & (1, 0) \\ (0, 1) & (-1, -1) \end{pmatrix}.$$

$\Gamma^0 = \{((1,0),(0,1)),((0,1),(1,0)),((\frac{1}{6},\frac{5}{6}),((\frac{1}{51},\frac{50}{51}))\}$. Como antes, el equilibrio en estrategias mixtas propiamente hablando no es beneficioso y $\Gamma^1 = \{((1,0),(0,1)),((0,1),(1,0))\}$.

Aplicando la depuración de acuerdo a las dominancias estricta y simple, llegamos a que

$\overline{\overline{\Gamma}}^1 = \Gamma^1 = \{((1,0),(0,1)),((0,1),(1,0))\}$ pues ninguno de los dos equilibrios domina al otro ni estricta, ni simplemente ya que

$E_1^*((0,1)\,|\Gamma^1) = 0$ y $E_2^*((1,0)\,|\Gamma^1) = 1$ y

$E_1((1,0),(0,1)) = 1$ y $E_2((1,0),(0,1)) = 0$.

Pero el pago de seguridad de los jugadores relativo a $\overline{\overline{\Gamma}}$ no es el mismo en los dos equilibrios. Por lo tanto, el segundo criterio de solución de Harsanyi no permite llegar a la solución y es necesario uno tercero.

Tercer Criterio de Harsanyi

Criterios de Dominación por Riesgo. Consideremos los conjuntos de estrategias después de haber eliminado las estrategias que no se usan en equilibrios beneficiosos y las que no se usan en equilibrios no dominados bajo los dos criterios de dominancia estricta y simple. Además, en cada equilibrio en $\overline{\overline{\Gamma}}$, consideramos, en lugar de los pagos originales, los pagos de seguridad relativos a $\overline{\overline{\Gamma}}$. En cambio, en los perfiles del juego más pequeño que no son equilibrios, conservamos el pago original. A este nuevo juego lo denotamos como Γ^{**} y le llamamos el juego reducido. Denotamos como E^{**} a la función de pago del juego reducido.

En el juego reducido Γ^{**} introducimos la nueva hipótesis de racionalidad, respecto al riesgo, que permitirá obtener una nueva relación de dominio.

Esta nueva relación de dominio se basa en una regla que sugirió Zeuthen para llevar a cabo una negociación y es consistente con postulados naturales de racionalidad. En los juegos bipersonales conduce a una solución equivalente a la solución cooperativa propuesta por Nash (ver el libro de G.Owen (1968)) y permite generalizar dicha solución a juegos n-personales. Harsanyi la usa para construir su tercer concepto de dominancia.

La idea es como sigue. Supongamos que A, el vendedor de un bien, y B, el comprador, están regateando sobre el precio de dicho bien. La última exigencia de A ha sido x_A, mientras que B ha ofrecido x_B. Si no llegan a un acuerdo, el precio que se establecerá es c. Cada uno obtiene una ganancia que depende del precio establecido. Consideramos la relación

$$G_i'(x_i, x_k) = \frac{G_i(x_i) - G_i(x_k)}{G_i(x_i) - G_i(c)}, \text{con } i \text{ y } k = A \text{ o } B, \text{ pero } i \neq k.$$

Estos cocientes se pueden considerar como medidas de los riesgos que corren los jugadores y les ayudan a tomar decisiones. El numerador es el incremento de ganancia que obtendría el negociador i si logra imponer el precio que quiere respecto a lo que obtendría si se impone el precio que quiere k. El denominador es el incremento de ganancia que obtendría el negociador i si logra imponer el precio que quiere respecto a lo que arriesga obtener si se impone el precio c. Es decir, $G_i'(x_i, x_k)$ es una ganancia obtenida por unidad de riesgo corrida.

Zeuthen razona diciendo que lo racional es que i debería ceder, mientras que k debe mantenerse en su exigencia, si $G_i'(x_i, x_k) < G_k'(x_k, x_i)$.

En cambio, si los dos cocientes son iguales ambos podrían ceder, o no hacerlo.

Siguiendo a Zeuthen, Harsanyi construyó sus criterios de dominancia por riesgo, débil y fuerte, y llevó a cabo sendas depuraciones de los conjuntos de equilibrios, cosa que no expondremos aquí.

En el caso de juegos sencillos, como el juego del ejemplo 8.2.4, el criterio de Harsanyi coincide con el principio de Zeuthen, así

$$\begin{aligned} G_1'(((1,0),(0,1)),((0,1),(1,0))) &= \frac{E_1((1,0),(0,1)) - E_1((0,1),(1,0))}{E_1((1,0),(0,1)) - E_1((1,0),(1,0))} \\ &= \frac{1}{101}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} G_2'(((0,1),(1,0)),((1,0),(0,1))) &= \frac{E_2((0,1),(1,0)) - E_2((1,0),(0,1))}{E_2((0,1),(1,0)) - E_2((1,0),(1,0))} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

El jugador dos gana más por unidad de riesgo, por lo que tiene más capacidad de resistir intentando imponer su estrategia.

Finalmente, las soluciones propuestas por Harsanyi se describen en la siguiente definición.

Definición 8.2.11. La v- solución es Γ_v, un subconjunto de Γ^{**0} que no es vacío y tal que cumple una de las dos afirmaciones siguientes:

1. Si $X^* \in \Gamma_v$, entonces X^* domina fuertemente por riesgo a todos los demás equilibrios de Γ^{**0}.

2. Si $X^* \in \Gamma_v$, entonces X^* domina débilmente a todos los demás equilibrios de Γ^{**0} y domina fuertemente a los equilibrios que no son equivalentes a X^*.

La t-solución es el subconjunto Γ_t de Γ^{**0}, no vacío, y tal que dos equilibrios cualesquiera en Γ_t son intercambiables y una de las dos afirmaciones se cumplen:

1′. Si $X^* \in \Gamma_t$, entonces X^* domina fuertemente por riesgo a todos los demás equilibrios de Γ^{**0},

2′. Si $X^* \in \Gamma_t$, entonces X^* domina débilmente a todos los demás equilibrios de Γ^{**0} y domina fuertemente al menos a aquellos equilibrios que no son intercambiables por X^*.

Esas definiciones están basadas en los supuestos de racionalidad discutidos, incluyendo al principio de Zeuthen.

Si los conjuntos Γ_v y Γ_t son vacíos, la solución es el conjunto de perfiles de estrategias conservadoras.

8.3. Un enfoque más realista de selección

La descripción de las "leyes naturales" de los conflictos humanos, a través de los juegos no cooperativos, no había podido escapar de la exigencia de que

los participantes, en dichos conflictos, cumplieran los supuestos de racionalidad y de conocimiento e información propios de la Teoría Económica. Pero la gente común y corriente no cumple dichos supuestos, no está compuesta por sabelotodos, propietarios de información enciclopédica, ni por super héroes carentes de miedos y otras ataduras que les impidan abandonar la forma de actuar que estaban siguiendo, para adoptar otras, como reacción inmediata. Por el contrario, los individuos reales son miopes, no van mucho más allá, para valorar las opciones que tienen, de observar lo sucedido, con sus amigos, sus vecinos y ellos mismos, al seguir determinadas conductas. Obtienen información de los medios masivos de comunicación y, con ello, pueden detectar que, en un momento dado, algunas estrategias son mejores que otras, desde un punto de vista más bien cualitativo, pues no tienen forma de hacer grandes cálculos o análisis teóricos, para encontrar, en forma precisa, la medida en que lo son. Además, es común que tengan miedo a cambiar de estrategia o esto sea costoso y, por lo tanto, puede existir una fuerte inercia que trabe el cambio. Los juegos evolutivos pretenden modelar esta complicada situación y poner a prueba, con dinámicas "realistas" y "humanas", la validez del concepto de equilibrio de Nash en cuanto a su carácter de "ley natural de un conflicto" y, también, establecer mecanismos, igualmente "realistas", para la selección de algunos de estos equilibrios y la discriminación de otros.

La mayoría de los conflictos que tienen interés no ocurren en una sola ocasión, sino que se repiten una y otra vez. Puede ser que en ellos participen siempre las mismas personas, puede ser que los participantes estén cambiando continuamente, pero, en los dos casos, las personas aprenden a comportarse a partir de su propia experiencia y la de los otros. Entonces, aunque cada uno empiece tomando decisiones sin ninguna idea previa, poco a poco, irá cambiando sus estrategias tratando de mejorar su pago. ¿Conduce ese camino hacia equilibrios de Nash? y, si esto fuera así, ¿qué ocurre cuando hay varios equilibrios? ¿cuáles dominarían en este accidentado proceso de aprendizaje?

Expusimos muy resumidamente, en la sección anterior, la forma sistemática que Harsanyi estableció para discriminar en el conjunto de equilibrios y quedarse sólo con algunos "mejores", desde un punto de vista de racionalidad preciso. En las secciones siguientes desarrollaremos otro concepto de solución de un juego que responde a un enfoque filosófico diferente al de una racionalidad absoluta. Por supuesto, no se prescinde de toda exigencia de racionalidad, pero se trata de modelar el tipo de gente común y corriente que enfrenta los conflictos reales y la cual no tiene ni información, ni memoria perfectas, ni una racionalidad con propiedades tan fuertes. Al

contrario, tiene problemas de información, de memoria y del manejo de éstas, para encontrar las decisiones óptimas que corresponden. Por otro lado, le atrae la experimentación y comete frecuentes errores. Este tipo de enfoque empezó en biología con los trabajos de Maynard Smith [35] y ha tenido también interesantes frutos en las ciencias sociales. El enfoque no es sólo un método dinámico, y relativamente realista de selección de equilibrios de Nash, sino que pone a prueba el derecho de este concepto de ser considerado la solución de un juego.

Expondremos diversos aspectos del enfoque propio de los Juegos Evolutivos, como las desarrollan Kandori, Mailath, Rob [28, 29] y Young [56, 57], en las secciones que restan del capítulo. Una idea importante vinculada al enfoque es que los jugadores aprenden de su experiencia y ajustan sus elecciones a este aprendizaje. Es importante hacer notar que se habla de aprendizaje en un sentido especial, con muchas limitaciones, pues los jugadores simplemente perciben lo que hacen los demás y cuáles estrategias les permiten mejorar. Para colmo de debilidad en su aprendizaje, los jugadores cometen errores.

Trabajaremos sólo con los modelos rectangulares, aunque la problemática se podría extender a los modelos extensivos.

8.4. Digráficas y aprendizaje

Las dinámicas de aprendizaje de individuos envueltos en un conflicto, se consideren o no como parte de una gran población, se pueden expresar con gráficas dirigidas. En el capítulo 2, sección **??**, se empezó a esbozar este tratamiento, para las estrategias puras; en este capítulo continuamos con él, ahora, para las estrategias mixtas.

En muchos contextos es usual utilizar gráficas dirigidas (digráficas) para expresar una dinámica o flujo dentro de algún conjunto V de estados posibles. Las flechas de la gráfica dirigida indican cuando es posible pasar de un estado a otro, debido a la dinámica. El conjunto de flechas se denota como $\overrightarrow{A}$ y a la digráfica como $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$. En el capítulo 2, el conjunto de estados V era el de perfiles de estrategias puras del juego estudiado y nuestro interés se centraba en algunos de sus subconjuntos, las llamadas Clases de Comunicación Recurrente (ccr), ver definición 2.6.2, a las que también les podemos dar el nombre de Patrones de Conducta Social Aprendidos. Estos subconjuntos desempeñaban un papel especial, dentro del movimiento de unos estados a otros, representado por la gráfica dirigida $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$ del capítulo 2, pues siguiendo la dinámica, a partir de cualquier estado, se arriba a

alguno de los pertenecientes a una de estas clases. Por otro lado, situándonos dentro de una de dichas clases o patrones, la dinámica puede conducir de cualquiera de sus vértices a cualquier otro, pero, en cambio, no permite salir de la clase. Algunas de las clases, las que constan de un solo elemento son equilibrios de Nash en estrategias puras

8.4.1. Dinámica de Aprendizaje en Poblaciones, el Enfoque de Kandori, Mailath y Rob

Partamos, para esbozar el enfoque, de la versión de la batalla de los sexos que hemos trabajado en otros capítulos cuya matriz de pago es la siguiente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Reb} & D \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-5) & (3,-3) \\ (0,2) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}.$$

M tiene el significado de una conducta impositiva y machista por parte del hombre y la C de una conducta compresiva y cooperadora con su pareja. Por su parte, la *Reb* significa que la mujer se rebela continuamente y no permite imposiciones, mientras la D que se comporta en forma dócil y abnegada. M, C, *Reb* y D son estrategias que los hombres y las mujeres eligen y no formas de ser de unos y otras.

El conflicto no se desarrolla en una sola ocasión, ni entre la misma pareja. Pensemos que repetidamente, periodo tras periodo, se están enfrentando en este conflicto miembros de una población muy grande que está formada por k_h hombres y k_m mujeres. Antes de iniciar el periodo t, cada uno de los hombres y cada una de las mujeres ha escogido una de sus estrategias posibles. La estructura estratégica de la población, en el periodo t, se puede describir con una pareja de números (x_t, y_t), donde x_t es el número de hombres que, en dicho periodo, escoge la estrategia machista M ($k_h - x_t$ hombres escogerían la estrategia C). El número de mujeres que escoge la estrategia *Reb*, en t, es y_t ($k_m - y_t$ mujeres escogerían D). A esta composición estratégica representada por (x_t, y_t), al hacer el análisis teórico, se le considera como el perfil de estrategias mixtas

$$\left(\left(\frac{x_t}{k_h}, \frac{k_h - x_t}{k_h}\right), \left(\frac{y_t}{k_m}, \frac{k_m}{k_m - y_t}\right)\right).$$

Puede interpretarse dicho perfil como que la población entera está actuando, en determinado periodo, aún sin darse cuenta, de acuerdo a esta pareja de

estrategias mixtas y cada miembro de la población tendrá una percepción de la estructura estratégica social y hará los reajustes a su conducta de acuerdo a esto.

Dentro del periodo t se enfrentan, en una enorme cantidad de partidas del conflicto, parejas de un hombre y una mujer, escogidos al azar. Los miembros de estas parejas usarán la estrategia que tienen preestablecida para el periodo t. Cada persona, hombre o mujer, debe decidir la nueva estrategia que escogerá para el periodo $t+1$. Para ello, hará una evaluación "limitada" de los resultados obtenidos, en el periodo t, con las estrategias elegidas por todos. Dicha evaluación se refiere tanto a él mismo como a sus congéneres. Será una evaluación miope, sujeta a inercias y con otras limitaciones que correspondan a la situación que se pretenda modelar, pero a través de ella, se establecerá un proceso de cambio de la estructura de estrategias de la "población", periodo tras periodo. Existen diferentes dinámicas que pueden resultar plausibles para esquematizar algún proceso particular.

Entonces, en el ejemplo que estamos examinando, cada personaje masculino que participa en el conflicto, puede considerar que entre todas las mujeres están escogiendo una estrategia mixta y buscar una respuesta adecuada ante dicha estrategia, por ejemplo, la mejor. Por su lado, cada mujer puede, también, proceder en forma semejante.

Para concretar, supongamos que hay 6 hombres y 6 mujeres, entonces asociaremos, a cada posible partición de 6 mujeres en m que han elegido actuar como rebeldes y $6-m$ como dóciles, la estrategia mixta $(\frac{m}{6}, \frac{6-m}{6})$ y análogamente para los hombres. Trabajamos con un número pequeño de hombres y de mujeres para que la digráfica no sea demasiado grande. No es necesario que el número de hombres y de mujeres sea el mismo.

Supongamos que, en el periodo t, hubo l_t hombres machistas (M), y $6-l_t$ hombres conciliadores (C), m_t mujeres rebeldes (Reb) y $6-m_t$ mujeres sumisas (D).

Denotemos como $x(t)$ a $(l_t, 6-l_t)$ y como $y(t)$ a $(m_t, 6-m_t)$, llamamos dinámica de aprendizaje de mejor respuesta o de pánico a la que tiene la forma siguiente:

$d(x(t), y(t)) = (x(t+1), y(t+1))$, donde

$$x(t+1) = \begin{cases} (6,0) & \text{si } m_t < 4, \\ (0,6) & \text{si } m_t > 4, \\ x\,(t) & \text{si } m_t = 4 \end{cases}$$

y

$$y(t+1) = \begin{cases} (6,0) & \text{si } l_t < 2, \\ (0,6) & \text{si } l_t > 2, \\ y\,(t) & \text{si } l_t = 2. \end{cases}$$

Es una dinámica de pánico porque todos los miembros de la población pueden escoger, en forma inmediata, su mejor respuesta.

Como el conflicto es de tal naturaleza que cada persona tiene dos estrategias, para describir un estado basta decir cuántos hombres y cuántas mujeres escogieron su primera estrategia, M y Reb, respectivamente. Así al conflicto, expresado por el juego rectangular, y a la dinámica de aprendizaje d se le puede asociar la digráfica $\left(V, \overrightarrow{A}\right)$, con

$V = \{(l,m)\,|0 \leq l \leq 6, 0 \leq m \leq 6\}$ y

$\overrightarrow{A} = \{(z,z')\,|z$ y z' están en V y $z' = d(z)\}$.

En la gráfica de la figura 8.4.1 se representa la dinámica de pánico en el conflicto de los hombres contra las mujeres. Los Patrones de Conducta Social Aprendidos de esta gráfica dirigida son: $\{(6,0)\}$, $\{(0,6)\}$, $\{(2,4)\}$ y el ciclo $\{(6,6),(0,0)\}$. Asociando perfiles de estrategias mixtas a estas parejas, las tres primeras clases o patrones de conducta corresponden a los 3 equilibrios de Nash del juego, a saber $((1,0),(0,1))$, $((0,1),(1,0))$ y $((\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{1}{3}))$.

Es decir, los patrones de conducta que aprende la población estudiada son:

i) El mundo en que todos los hombres son machistas y todas las mujeres son abnegadas.

ii) El mundo en que todas las mujeres tienen un rodillo y todos los hombres un mandil.

iii) Un mundo en el que caben los machistas, los comprensivos, las rebeldes y las sumisas, en una cierta proporción.

iv) Un mundo en el que la población se encuentra en un ciclo perpetuo entre el mundo de machistas con parejas rebeldes todos inconformes, por lo que cambian al mundo de comprensivos con parejas sumisas, que tampoco están conformes y regresan al esquema anterior.

La dinámica que acabamos de describir es muy rápida, no en el sentido de su convergencia, sino en el de que toda la población reacciona simultáneamente eligiendo, sin ataduras, su mejor réplica a la composición social existente. Esta forma de "aprender" puede corresponder a una situación en que no hay costos por hacer cambios, ni miedos a dichos cambios. Es decir, no hay inercias.

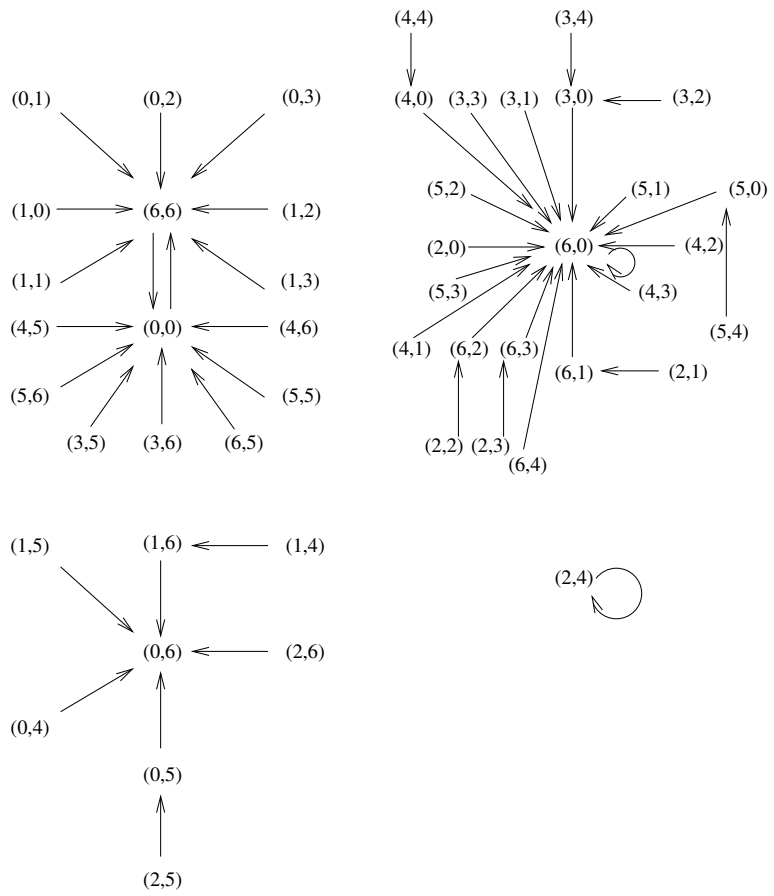

Figura 8.4.1:

No es la única dinámica que se puede establecer entre los estados posibles que describen el número de hombres que se comportan en forma machista y el que se comporta en forma comprensiva, así como el número de mujeres que eligen rebelarse y el de las que deciden comportarse dócilmente. Dinámicas más graduales pueden describirse en forma semejante, es decir, los jugadores eligen su mejor respuesta, pero tienen inercia, por lo que, por ejemplo, sólo pueden reaccionar, en un periodo t, un hombre y una mujer. Formalmente tenemos la función $d : V \to V$ tal que si $(l', m') = d(l, m)$, entonces

$$l' = \begin{cases} \min\{6, l+1\} & \text{si } m < 4 \\ \max\{0, l-1\} & \text{si } m > 4 \\ l & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

y

$$m' = \begin{cases} \min\{6, m+1\} & \text{si } l < 2 \\ \max\{0, m-1\} & \text{si } l > 2 \\ m & \text{si } l = 2 \end{cases}$$

La digráfica tiene el mismo conjunto de estados que la de la figura 8.4.1, pero las flechas cambian pues la dinámica es distinta (figura 8.4.2).

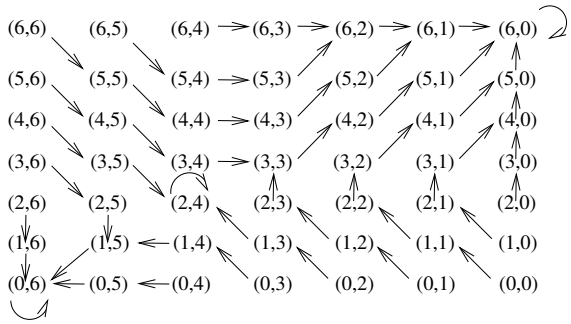

Figura 8.4.2:

Los patrones de conducta social aprendidos son $\{(6,0)\}$ y $\{(0,6)\}$ que representan los equilibrios de Nash en estrategias puras del juego y $\{(2,4)\}$ que representa al equilibrio en estrategias mixtas, en sentido estricto. El ciclo ha desaparecido.

Consideremos, ahora, una dinámica, con mucha inercia, pues sólo una persona, hombre o mujer, puede reaccionar con su mejor réplica en cada periodo. Entonces la dinámica tiene la forma $(l', m') \in d(l, m)$ si

$$l' = \begin{cases} \min\{6, l+1\} & \text{si } m < 4 \\ \max\{0, l-1\} & \text{si } m > 4 \\ l & \text{si } m = 4 \end{cases}$$

y, además, $m' = m$ ó

$$m' = \begin{cases} \min\{6, m+1\} & \text{si } l < 2 \\ \max\{0, m-1\} & \text{si } l > 2 \\ m & \text{si } l = 2 \end{cases}$$

y, además, $l' = l$.

La dinámica de este último ejemplo se expresa con una correspondencia d.

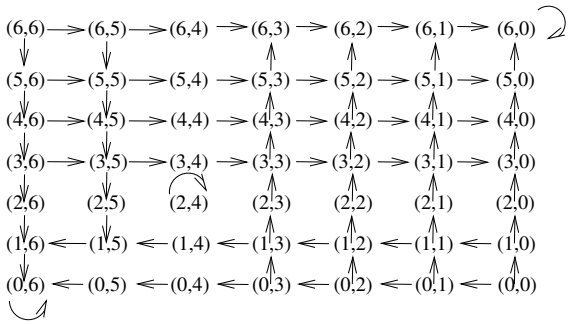

Figura 8.4.3:

La figura 8.4.3 muestra la gráfica dirigida de esa dinámica con mucha inercia.

Otra vez los patrones de conducta social aprendidos son $\{(6,0)\}$, $\{(0,6)\}$ y $\{(2,4)\}$.

En las tres digráficas anteriores, aparece un hecho interesante, el patrón correspondiente al "equilibrio de los hombres" revela tener más fuerza de atracción que los otros patrones de conducta social aprendidos, pues se puede alcanzar partiendo desde más estructuras estratégicas de la población.

Existen otras dinámicas graduales dentro de poblaciones, pero no las examinaremos en este texto. Por mencionar algunas ideas sobre un tipo de inercia distinta que la presentada aquí, pensemos en la función de reajuste de Nash, en la que los jugadores no cambian abruptamente a la estrategia pura de mejor respuesta. Podemos hablar de una dinámica que funciona como dicha función cambiando el porcentaje de personas que escogen cada estrategia pura de acuerdo a que tanto mejoraría, cada una de dichas estrategias, el pago esperado.

Dinámicas de Aprendizaje en Poblaciones Simétricas

Cuando una población está involucrada en un conflicto que se expresa como un juego simétrico n-personal, la población puede estar dividida en n subpoblaciones, cada una de las cuales contiene a las personas que pueden representar a un jugador fijo, por ejemplo el primero, y no pueden aparecer como representante de ninguno de los demás jugadores. De esta manera, en el análisis del conflicto de hombres contra mujeres, podíamos haber estudiado una matriz simétrica, como se presenta tradicionalmente la batalla de los sexos, pero considerar a la población dividida en hombres y mujeres y los miembros de la subpoblación de los hombres sólo pueden representar al

jugador que elige los renglones y lo análogo para las mujeres. En ese caso, los patrones de conducta social aprendidos $((6,0),(0,6))$ y $((0,6),(6,0))$ atraerían al mismo número de estructuras estratégicas y ninguno mostraría más fuerza que otro.

Pero el conflicto simétrico puede ser de tal manera que cualquier miembro de la población puede representar el papel de cualquiera de los jugadores en las diversas partidas que ocurren. Entonces la población no estaría dividida en subpoblaciones y diríamos que es simétrica u homogénea.

Pensemos en los juegos simétricos 2×2, es decir juegos de la forma

$$\begin{pmatrix} (a,a) & (b,c) \\ (c,b) & (d,d) \end{pmatrix}.$$

Podría tener interés, para determinados conflictos, no dividir a la población involucrada K. Supongamos que queremos analizar dinámicas semejantes a las que estudiamos con una población dividida, en ese caso, cada estado posible se puede determinar con el número de personas pertenecientes a K que escogen la primera estrategia. Es decir, el conjunto de estados posibles sería $Z = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$, donde k es el número de miembros de K.

Asociaremos a cada elemento z de Z, la estrategia mixta

$$\widehat{z} = (\frac{z}{k}, \frac{(k-z)}{k}).$$

Para cualquier persona es importante considerar también las estrategias

$$\widehat{z}^{+} = (\frac{z-1}{k-1}, \frac{(k-z)}{k-1}) \text{ y } \widehat{z}^{-} = (\frac{z}{k-1}, \frac{(k-1-z)}{k-1}).$$

Un miembro de K que ha escogido la primera estrategia puede actuar como si entre todos los otros miembros de K hubieran escogido $\widehat{z}^{+}$. Análogamente, cualquiera de los que escogieron la segunda estrategia actuaría como si los demás, en conjunto, hubieran escogido $\widehat{z}^{-}$.

Una dinámica de aprendizaje para un conflicto simétrico es una correspondencia $d\colon Z \multimap Z$. Diremos que la dinámica es darwiniana (según la terminología de Kandori, Mailath y Rob (1993 y 1995)), si cumple, para z distinto de cero y de k,

$$\operatorname{sign}(d(z) - z) = \operatorname{sign}(E_1\left((1,0), \widehat{z}^{+}\right) - E_1\left((0,1), \widehat{z}^{-}\right)),$$

$$d(k) = k \Leftrightarrow E_1\left((1,0),(1,0)\right) - E_1\left((0,1),(0,1)\right) \geq 0,$$

$$d(N) < N \text{ de otra manera,}$$

$$d(0) > 0 \Leftrightarrow E_1\left((0,1),(0,1)\right) - E_1\left((1,0),(1,0)\right) \geq 0,$$

$$d(0) = 0 \text{ de otra manera.}$$

Ejemplo 8.4.1. Consideremos, por ejemplo, un conflicto representado por el juego simétrico siguiente:

$$\begin{pmatrix} (-2,-2) & (5,0) \\ (0,5) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Si K es una población formada por 12 personas y la dinámica es la de mejor réplica, $d_{pánico}$, es decir

$$d_{pánico}(z) = \begin{cases} k & \text{si } E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) > E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right), \\ 0 & E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) < E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right), \\ z & E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) = E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right). \end{cases}$$

La digráfica correspondiente a esta dinámica es la de la figura 8.4.4.

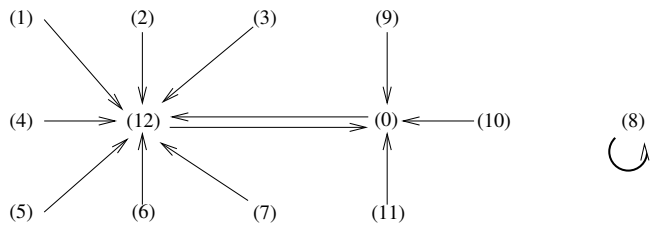

Figura 8.4.4:

Los patrones de conducta social aprendidos son, en este caso, el ciclo $\{0, 12\}$ y $\{8\}$. No aparecen, dentro de dichos patrones, los equilibrios de Nash en estrategias puras, pues estos equilibrios no son simétricos y en el conjunto de estados posibles Z no están representadas las estructuras estratégicas sociales que determinan perfiles de estrategias no simétricos, puros o mixtos. El único equilibrio simétrico del juego es $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$ y está representado por el vértice 8.

Estudiemos el mismo ejemplo, pero con la dinámica de mejor réplica con inercia fuerte, es decir aquella que en cada periodo sólo un miembro de K optará por su mejor réplica. Esta dinámica tiene la forma siguiente:

$$d_{inerciaf}(z) = \begin{cases} z+1 & \text{si } E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) > E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right),\ z \neq k \text{ y } z \neq 0, \\ z-1 & \text{si } E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) < E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right),\ z \neq k \text{ y } z \neq 0, \\ z & \text{si } E_1\left((1,0)\,,\widehat{z}^{+}\right) = E_1\left((0,1)\,,\widehat{z}^{-}\right),\ z \neq k \text{ y } z \neq 0, \\ k & \text{si } E_1\left((1,0)\,,(1,0)\right) \geq E_1\left((0,1)\,,(0,1)\right) \text{ y } z = k, \\ k-1 & \text{si } E_1\left((1,0)\,,(1,0)\right) < E_1\left((0,1)\,,(0,1)\right) \text{ y } z = k, \\ 0 & \text{si } E_1\left((1,0)\,,(1,0)\right) \leq E_1\left((0,1)\,,(0,1)\right) \text{ y } z = 0, \\ 1 & \text{si } E_1\left((1,0)\,,(1,0)\right) > E_1\left((0,1)\,,(0,1)\right) \text{ y } z = 0. \end{cases}$$

La única clase de comunicación recurrente es $\{8\}$ que corresponde al único equilibrio de Nash simétrico del juego, $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}))$. (Ver figura 8.4.5

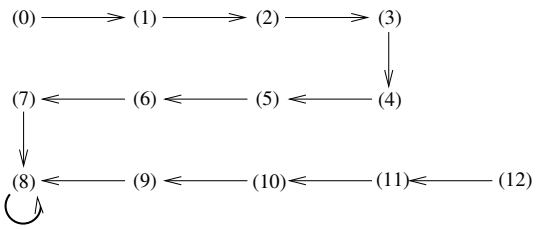

Figura 8.4.5:

8.4.2. Dinámica de historias de tamaño r. El Enfoque de Young.

Pensemos que los participantes en un conflicto aprenden de la experiencia que tuvieron en los r últimos periodos. Este enfoque lo inició David Canning [9, 10], utilizando una técnica distinta a la de este capítulo que corresponde a la usada por Kandori, Mailath y Rob, por un lado, y Peyton Young, por el otro. Canning ataca conflictos de sólo 2 personas y piensa que, en cada periodo, se escogen al azar parejas de una población infinita que se enfrentan recordando, cada persona, las conductas (estrategias) que utilizaron sus oponentes en los últimos r periodos. Con base en esto, Canning establece un sistema dinámico sobre el cambio de la proporción de la población que elige cada estrategia a lo largo del tiempo. Young, en cambio, considera un conflicto de n jugadores y una población finita, partida en n subpoblaciones (cada una de estas corresponde a los posibles representantes de uno de los jugadores). En cada periodo, sólo hay un enfrentamiento entre n jugadores, tomando al azar a los representantes de cada jugador j de las subpoblaciones que les corresponden. Después, Young establece un sistema dinámico del cambio entre las historias de tamaño r, basándose en lo que ocurriría si, después de una de estas historias, las personas sólo fueran capaces de informarse de una pequeña muestra de algunos de los r periodos y reaccionar óptimamente ante dicha muestra. Young expresa esta dinámica a través de una digráfica con pesos en sus flechas.

Expondremos la dinámica de Young en forma simplificada, en el sentido de que los participantes tienen como única "muestra" a la historia de tamaño r completa.

En el periodo t, las personas de la población sólo recuerdan lo que ocur-

rió en los r periodos más recientes. Describiremos la dinámica con una gráfica dirigida, donde los vértices son historias de tamaño r y habrá una flecha de una historia a otra, si es posible pasar de la primera a la segunda con "buenas" decisiones de los jugadores y respetando la historia de la que se parte. Las clases de comunicación recurrente de esta digráfica serán las historias que tienden a observarse como patrones de comportamiento aprendido.

Las historias de tamaño r son vectores de dimensión r, en los que su coordenada t' representa lo que ocurrió en el periodo t'; es decir, el perfil de estrategias puras que se usó en t', que es a su vez un vector. Por lo tanto, cada historia tiene la forma de una matriz, con tantas columnas como jugadores hay en el conflicto y tantos renglones como el tamaño de la memoria social. Los periodos están numerados desde el más viejo que se recuerda hasta el anterior al que está ocurriendo en el momento actual.

Sigamos el ejemplo no simétrico de los hombres y las mujeres estudiado al principio de esta sección.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{Reb} & \qquad D \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,-5) & (3,-3) \\ (0,2) & (1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Al inicio del periodo t, el hombre y la mujer que han sido elegidos para el encuentro de ese periodo decidirán una estrategia que signifique una buena actuación frente a la memoria social. Al tomar la decisión recuerdan los periodos $t-r$ hasta $t-1$. Entonces usarán la estrategia mixta de frecuencias como expresión de esa experiencia para elegir la estrategia pura que responde mejor a ella. Los jugadores del periodo t completan la historia que se recordará en el periodo $t+1$. Para dicho periodo, los jugadores han olvidado lo ocurrido en $t-r$ y la nueva historia recordada consta de lo sucedido en los periodos desde $t-(r+1)$ hasta t.

Entonces, si en el periodo t, la historia que recuerdan los jugadores se expresa con la $r-eada$ de vectores (C,D), $(C,\textit{Reb})$, $(M,\textit{Reb}),(M,D)$ y (M,D), podemos colocarlos como la matriz,

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ C \\ M \\ M \\ M \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} D \\ \textit{Reb} \\ \textit{Reb} \\ D \\ D \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

la cual se puede leer por columnas y por renglones. Así, la primera columna significa que el hombre fue comprensivo en los periodos $t-5$ y $t-4$, mientras

que fue machista en los periodos $t-3$, $t-2$ y $t-1$. La columna dos, por su lado, significa que la mujer fue dócil en $t-5$, $t-2$ y $t-1$ y fue rebelde en $t-4$ y $t-3$. El primer renglón informa lo que hicieron el hombre y la mujer en el periodo $t-5$, mientras que el segundo, lo que hicieron en el periodo $t-4$, etc.

Supongamos que, el día t, el hombre tiene que decidir, tomando en cuenta su experiencia, si le conviene portarse como un déspota o ser comprensivo. Sus recuerdos le informan sobre el comportamiento de la mujer en 5 periodos. De haber escogido la actitud de ser comprensivo durante todos esos periodos que recuerda, habría obtenido una ganancia total de 3 unidades, lo que implica $\frac{3}{5}$ unidades de pago medio. En cambio, si hubiera sido un déspota habría obtenido 7 unidades en total, es decir $\frac{7}{5}$ unidades de pago medio, por lo que llegará a la conclusión de que le conviene escoger de nuevo M. Los recuerdos de la mujer, por su lado, le revelan que le hubiera convenido ser dócil y es lo que escoge para el periodo t. Entonces en el periodo $t+1$, el recuerdo social sería

$$\left(\begin{pmatrix} C \\ M \\ M \\ M \\ M \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Reb \\ Reb \\ D \\ D \\ D \end{pmatrix} \right)$$

Para tener una digráfica completa tomemos a $r=2$. Sea V el conjunto de posibles historias de tamaño 2, es decir matrices 2×2, en las que los términos de su primera columna son M o C y los de la segunda son Reb o D. Por otro lado, existirá una flecha que une los vértices v y v', si el segundo renglón de v es igual al primero de v' y v'_{21} es la estrategia pura M o C que optimiza en el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(a_{Mv_{12}} + a_{Mv_{22}}\right), \frac{1}{2}\left(a_{Cv_{12}} + a_{Cv_{22}}\right) \right\},$$

mientras que v'_{22} es la mejor respuesta pura de las mujeres $\mathrm{Re}\,b$ o D que optimiza en el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(b_{v_{11}Reb} + b_{v_{21}Reb}\right), \frac{1}{2}\left(b_{v_{11}D} + b_{v_{21}D}\right) \right\}.$$

La digráfica de la figura 8.4.6 esquematiza como se pasaría de una historia a otra, cuando los jugadores tratan de mejorar sus pagos tomando en cuenta su experiencia.

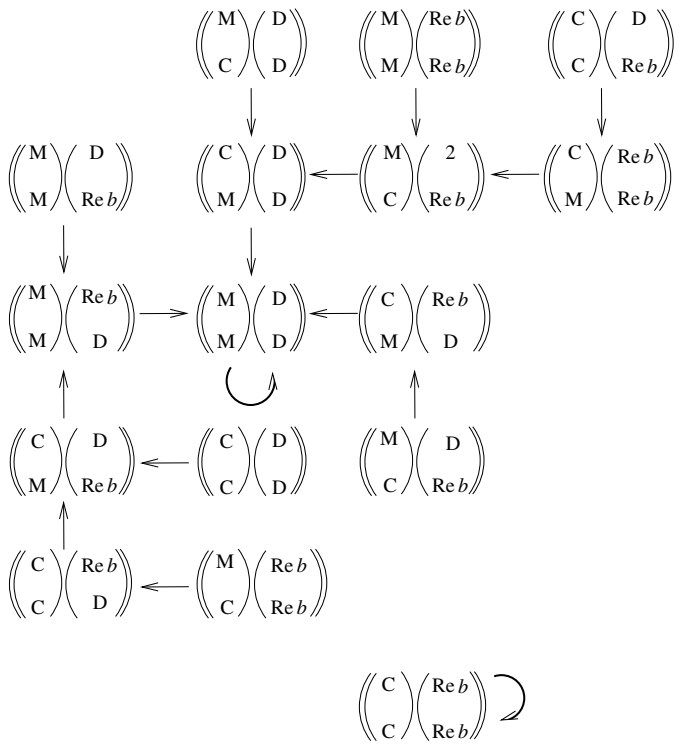

Figura 8.4.6:

Las clases de comunicación recurrente que, en este caso, pensamos como patrones de conducta social aprendida son

$$\left(\left(\begin{array}{c} M \\ M \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} D \\ D \end{array} \right) \right) \text{ y } \left(\left(\begin{array}{c} C \\ C \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} Reb \\ Reb \end{array} \right) \right).$$

Estos patrones corresponden a los dos equilibrios de Nash en estrategias puras. El equilibrio de Nash en estrategias mixtas no tiene representación.

En la digráfica se observa, en una forma más dramática que en las dinámicas de poblaciones, que la primera historia, la que corresponde al equilibrio favorable a los hombres, tiene mucha más fuerza de atracción que la que corresponde al "equilibrio de las mujeres". Pues a la "historia masculina", se llega desde cualquier otra historia que no sea la "femenina".

Sin embargo, no tenemos un criterio preciso para asegurar cuál es el patrón más fuerte que, además, nos sirva para cualquier conflicto sujeto a una dinámica de aprendizaje. Para lograr este objetivo, usaremos la hipótesis que planteamos al principio y que hemos dejado de lado, nos referimos a que

la gente no puede ajustarse mecánicamente a la dinámica de aprendizaje, sino que comete frecuentes errores, tiene grandes deseos de experimentar, etc., hechos que la desvían, en cierta medida, de lo que le marca la dinámica en cuestión. Estudiaremos que sucede con los patrones de conducta social aprendidos o acostumbrados (las ccr), tanto en el caso de las dinámicas de las poblaciones como en las de las historias, bajo estas perturbaciones.

8.4.3. Errar es de Humanos

Es natural esperar, como mencionábamos anteriormente, que los miembros de una población, envuelta en un conflicto representado por un juego y con una dinámica de aprendizaje, no siempre actuarán según esta dinámica, sino que de vez en cuando se equivocarán o querrán experimentar. A cada una de las dinámicas descritas anteriormente, tanto en este capítulo, como en el segundo, podemos perturbarlas ligeramente, suponiendo que cada jugador, en algunas ocasiones, se desvía de lo que le marca el proceso de aprendizaje y escoge alguna de sus otras estrategias. Obtendríamos, entonces, otra digráfica, a la que llamaremos la dinámica perturbada. Supondremos que todos los errores existentes son posibles. Esto provocará digráficas conexas. Además, le asociamos a cada flecha su costo en errores.

Podemos hablar del costo de una trayectoria dirigida de la digráfica perturbada sumando los costos de todas las flechas que la componen.

En el conflicto de los 6 hombres y 6 mujeres, con la dinámica de aprendizaje de mejor réplica, si tenemos una perturbación tal que se puede pasar de cualquier z a cualquier otro z', el costo de pasar directamente del vértice $(3,3)$ al $(0,0)$ es 6 (ver figura 8.4.1). Hay varias trayectorias, además de la que sólo consta de la pareja $\{(3,3),(0,0)\}$ para transitar de $(3,3)$ a $(0,0)$, cada una tiene un costo. Una de las trayectorias de mínimo costo es

$$(3,3) \xrightarrow{0} (6,0) \xrightarrow{5} (6,5) \xrightarrow{0} (0,0)\,.$$

Es decir, el costo mínimo de pasar de $(3,3)$ a $(0,0)$ es 5 y se logra con la trayectoria $\{(3,3),(6,0),(6,5),(0,0)\}$. Este costo mínimo es el mismo que el de pasar de $(6,0)$ a $(0,0)$.

En cambio, en la dinámica de mejor réplica, con inercia fuerte (figura 8.4.3), la flecha entre $(3,3)$ y $(0,0)$ tendría un costo de 5 y la trayectoria antes considerada tendría un costo de 20, pues tenemos:

$$(3,3) \xrightarrow{5} (6,0) \xrightarrow{5} (6,5) \xrightarrow{10} (0,0)\,.$$

Una trayectoria de costo mínimo que une a $(3,3)$ y $(0,0)$ es:

$$(3,3) \xrightarrow{0} (3,2) \xrightarrow{0} (3,1) \xrightarrow{0} (3,0) \xrightarrow{4} (0,0)\,,$$

con un costo de 4.

Las dinámicas de historias son muy diferentes a las de poblaciones y dan lugar a digráficas diferentes. En las que corresponden a las segundas siempre hay una flecha entre dos vértices posibles. En dichas dinámicas de poblaciones, se describen cuáles fueron las proporciones de la población de un cierto tipo que escogieron cada una de las estrategias en un periodo dado y, además, los patrones de conducta social son algunas de estas proporciones especiales, en las segundas, van cambiando las historias de lo que ocurrió en los r últimos periodos y los patrones de conducta socialmente aprendidos son historias en donde los jugadores repiten, periodo tras periodo, su conducta o son ciclos de historias.

La interpretación de los vértices es muy distinta en ambas gráficas dirigidas. Por ejemplo, en las dinámicas de poblaciones, cada vértice se puede entender como un perfil de estrategias mixtas y si un patrón de conducta social aprendido consta de un solo vértice se puede preguntar si éste es o no equilibrio de Nash (em) del juego. En cambio, en las gráficas de historias, a cada patrón de conducta social aprendido que consta de un vértice se le puede asociar un perfil de estrategias puras, el que se está repitiendo en cada periodo. Dichos perfiles que se repiten son siempre Equilibrios de Nash (ep). Young estudia el establecimiento de convenciones sociales, a través de estas dinámicas.

Dos vértices cualesquiera, en la dinámica de las historias perturbadas, no necesariamente están unidos por una flecha, aunque sí lo estarán por una trayectoria. Por ejemplo, desde el vértice

$$v = \left(\begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ Reb \end{pmatrix} \right)$$

al vértice

$$v\prime = \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ Reb \end{pmatrix} \right),$$

no puede haber una flecha de la digráfica perturbada, pues los errores no pueden borrar el hecho de que una historia que sea el vértice final de una flecha que empiece en v debe tener como primer renglón a (C, Reb), en cambio el segundo renglón sí puede ser cualquiera de las parejas posibles. Una trayectoria que une a los dos vértices mencionados se encuentra en la figura 8.4.7. Sobre cada una de las flechas hay un número (el costo)

que significa el número de personas que deben equivocarse para pasar de un vértice a otro. Cómo sólo actúan dos personas, en nuestro ejemplo, los posibles costos de las flechas son 0, 1 y 2.

$$\left(\begin{pmatrix} M \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ Reb \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Reb \\ D \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{1} \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ Reb \end{pmatrix}\right)$$

Figura 8.4.7

La trayectoria de la figura 8.4.7 tiene costo 2 y es una de las trayectorias de mínimo costo que une a esos dos vértices. El costo de la primera flecha es 1, pues la mejor respuesta del hombre debió ser M en lugar de C. La segunda flecha tiene costo 1, por la misma razón.

8.5. Digráficas de aprendizaje en general

Trataremos sólo el caso de dinámicas de poblaciones y de estas aquellas que no son dinámicas simétricas. La formalización general de los otros casos sería semejante.

En la situación que trataremos, K una población muy grande compuesta por n clases de personas tiene un conflicto, en su interior, esquematizado por el juego rectangular n personal $(N, \{D_j\}, \varphi)$. Es decir, la población K se encuentra partida, en el sentido matemático, en $K_1, K_2, \ldots, K_n$ subconjuntos, tantos como jugadores hay en el juego que representa al conflicto. De tal manera que K_j está formado por las únicas personas de K que pueden ocupar el papel de jugador j. Cada subconjunto puede tener distinto número de miembros. Asignemos el símbolo k_j al número de miembros de K_j.

Entre los miembros de la población se establece alguna dinámica de aprendizaje. Iremos precisando cuáles dinámicas y perturbaciones admitiremos como válidas. Sólo nos ocuparemos, en esta sección, de las dinámicas de poblaciones, pero el tratamiento con las dinámicas entre las historias sería análogo.

En un periodo t cualquiera, se realizarán una cantidad enorme de encuentros, partidas del juego, entre n oponentes, escogidos al azar, uno de cada conjunto K_j. Cada miembro de K_j escoge una de las estrategias puras propias del jugador j, es decir un elemento de D_j y, durante todo el periodo t, ese personaje utilizará la estrategia elegida, en los numerosos encuentros que le tocará sostener. k_i^j denotará el número de personas del subconjunto K_j escogió su $i-$ésima estrategia. Entre todos los miembros de K determinan una estructura estratégica, formalmente:

Definición 8.5.1. Se dice que

$$((k_1^1, k_2^1, \ldots, k_{l_1}^1), (k_1^2, k_2^2, \ldots, k_{l_2}^2), \ldots, (k_1^n, k_2^n, \ldots, k_{l_n}^n))$$

es una estructura estratégica de la población K en el conflicto representado por $(N, \{D_j\}, \varphi)$, si para toda i y toda j, k_i^j es un entero no negativo y $\sum\limits_{i \in D_j} k_i^j = k_j$, para toda j.

No será hasta que termine el periodo t y se vaya a iniciar el $t+1$, cuando, después de hacer un balance, no exhaustivo sino "limitado" de lo sucedido en t, cada miembro de la población K decidirá cuál será la nueva estrategia que utilizará en $t+1$. En aras de poner un mínimo de condiciones a la forma de elegir esta nueva estrategia y diseñar así las dinámicas de aprendizaje que consideraremos válidas, conviene asociar, a cada una de las estructuras estratégicas, el perfil de estrategias mixtas del juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$ determinado por la frecuencia con que ha sido utilizada cada una de las diversas estrategias puras por los miembros de las diversas subpoblaciones de K.

Así a $z = ((k_1^1, k_2^1, \ldots, k_{l_1}^1), (k_1^2, k_2^2, \ldots, k_{l_2}^2), \ldots, (k_1^n, k_2^n, \ldots, k_{l_n}^n))$, le corresponde:

$$\overline{z} = \left(\left(\frac{k_1^1}{k_1}, \frac{k_2^1}{k_1}, \ldots, \frac{k_{l_1}^1}{k_1} \right), \left(\frac{k_1^2}{k_2}, \frac{k_2^2}{k_2}, \ldots, \frac{k_{l_2}^2}{k_2} \right), \ldots, \left(\frac{k_1^n}{k_n}, \frac{k_2^n}{k_n}, \ldots, \frac{k_{l_n}^n}{k_n} \right) \right).$$

Podemos llamar indistintamente estructuras estratégicas a este tipo de perfiles de estrategias mixtas y a las definidas en 8.6.1 y entender en el contexto a cuál de ellas nos referimos. Denotemos como Z, a los conjuntos de estructuras estratégicas y de estrategias mixtas de frecuencias asociadas. Los elementos de Z son los estados posibles por los que puede atravesar la población sometida a una dinámica de aprendizaje, mientras se repite el conflicto tanto horizontalmente (dentro de un periodo), como verticalmente (a lo largo del tiempo, periodo tras periodo). ¿Existirán, para la población en conflicto, algunos estados especialmente importantes respecto a dicha dinámica?

Las respuestas que mejoran el pago, en un proceso de aprendizaje determinado, pueden no ser únicas, por lo que es natural esperar dinámicas que se tengan que expresar con una correspondencia d, como ocurría en algunos de nuestros ejemplos de dinámicas de la sección 8.4. Cuando una dinámica d está definida, entenderemos que, si en un periodo t, el estado es $z(t) \in Z$, en el tiempo $t+1$, el estado puede ser cualquiera de los elementos

de $d(z(t))$. Solo tratamos con dinámicas estacionarias, en el sentido de que $d(z(t)) = d(z(t'))$ si $z(t) = z(t')$, t y t' arbitrarias. Además, a las dinámicas de aprendizaje les impondremos una propiedad especial a la que Kandori et al [28, 29] le dan el nombre de darwiniana.

Definición 8.5.2. Una correspondencia $d : Z \multimap Z$ es una dinámica darwiniana de aprendizaje para el conflicto si, para cualquier z, $d(z)$ es no vacío y, además,

a) si $z' \in d(z)$ y $z_i'^j > z_i^j$, entonces $E_j(\overline{z} \mid i) > E_j(\overline{z})$,

y

b) si $z' \in d(z)$ y $z_i'^j = z_i^j > 0$, entonces $E_j(\overline{z} \mid i) = E_j(\overline{z})$.

Decimos que $(N, \{D_j\}, \varphi)$, K, $d)$ es un proceso dinámico de aprendizaje si K está envuelta en el conflicto representado por el juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$ y d es una dinámica darwiniana de aprendizaje y estacionaria.

A este proceso le llamaremos una dinámica darwiniana.

Definición 8.5.3. Un equilibrio de una dinámica darwiniana de aprendizaje d es un elemento z de Z tal que z está en $d(z)$, es decir, z es un punto fijo de la correspondencia d.

Proposición 8.5.4. *La estructura estratégica z es equilibrio de una dinámica darwiniana si y sólo si $\overline{z}$ es un equilibrio de Nash tal que z está en Z.*

Demostración. Sea z en Z un punto fijo de d, es decir z está en $d(z)$. Esto implica que $z(t+1) = z(t)$, pero d es darwiniana, y entonces se cumple que para toda j y para toda $i \in D_j$, $E_j(\overline{z} \mid i) \leq E_j(\overline{z})$, es decir $\overline{z}$ es un equilibrio de Nash que está en Z.

Por otro lado, si $\overline{z}$ es un equilibrio de Nash tal que $z \in Z$, entonces para toda j y para toda $i \in D_j$, $E_j(\overline{z} \mid i) \leq E_j(\overline{z})$ y como d es darwiniana, entonces para toda j y para toda $i \in D_j$, $z_i^j = z_i'^j$ para toda $z' \in d(z)$, es decir $z \in d(z)$. ∎

Los ejemplos de dinámicas de poblaciones que aparecieron en la sección 8.4, para el conflicto entre hombres y mujeres, son darwinianas. Todas ellas se pueden definir para cualquier juego finito.

Consideremos un juego con n jugadores.

Ejemplo 8.5.1 (La Dinámica de Mejor Réplica o de Pánico). $z' \in d(z)$ si y sólo si, para cada K_j,

$$z'^{j}_{\sigma^j} = \begin{cases} k_j & \text{si } \sigma^j = \widehat{\sigma^j} \ (\ \widehat{\sigma^j} \text{ es una mejor respuesta} \\ & \quad \textit{estricta del jugador } j \text{ a } \overline{z}), \\ 0 & \text{si } \sigma^j \neq \widehat{\sigma^j}\ , \\ z^j_{\sigma^j} & \text{si } j \text{ no tiene mejores repuestas estrictas a } \overline{z}. \end{cases}$$

Las dinámicas de mejor respuesta modelan escenarios en los que las personas de la población pueden reaccionar inmediatamente, pues no hay costos para el cambio de estrategias, ni tampoco algún tipo de temor. Les hemos dado el nombre de dinámicas de pánico, pues son las que pueden modelar situaciones de pánico. Aunque no necesariamente la resultante de una de estas dinámicas es una catástrofe, como frecuentemente se asocia a las situaciones de pánico. Un posible resultado en estas dinámicas es un patrón de tipo cíclico.

Los siguientes 3 ejemplos representan cambios relativamente graduales que se prestan para modelar situaciones en donde el costo del cambio no sea despreciable, aunque no aparezca explícitamente en los pagos, y que esto pueda provocar que sólo poco a poco puedan reaccionar los individuos.

Ejemplo 8.5.2. Dinámica con inercia débil $z' \in d(z)$ si, y sólo si, para cada K_j, se cumple:

a) cuando hay un jugador j que tiene mejores respuestas estrictas a $\overline{z}$,

$$z'^{j}_{\sigma^j} = \begin{cases} \min\left\{z^j_{\widehat{\sigma^j}} + 1, k_j\right\} & \text{si } \sigma^j = \widehat{\sigma^j}\ (\ \widehat{\sigma^j} \text{ es una mejor} \\ & \quad \text{respuesta estricta de } j \text{ a } \overline{z}), \\ \max\left\{z^j_{\widehat{\widehat{\sigma^j}}} - 1, 0\right\} & \text{para alguna } \sigma^j = \widehat{\widehat{\sigma^j}};\ \widehat{\widehat{\sigma^j}} \neq \widehat{\sigma^j}, \\ z^j_{\sigma^j} & \text{si } \sigma^j \neq \widehat{\sigma^j} \text{ y } \sigma^j \neq \widehat{\widehat{\sigma^j}}. \end{cases}$$

b) si ningún jugador j tiene mejores respuestas estrictas a $\overline{z}$, entonces $z'^{j}_{\sigma^j} = z^j_{\sigma^j}$ para cualquier $\sigma^j \in D_j$.

Ejemplo 8.5.3. Dinámica con inercia fuerteDinámica con inercia fuerte es análoga a la anterior, pero en cada z, a lo más una persona de K, que puede pertenecer a cualquier K_j, puede cambiar su estrategia.

Ejemplo 8.5.4. Dinámica de Reajuste de Nash $z' \in d(z)$ si, y sólo si,

para cada K_j,

$$z'^{j}_{\widehat{\sigma^j}} = \begin{cases} \left[\dfrac{\widetilde{z^j_{\widehat{\sigma^j}}}}{1+\sum_{\sigma^j} c^j_{\sigma^j}(\widetilde{z})} k_j \right] & \text{si } c^j_{\widehat{\sigma^j}}(\widetilde{z}) = 0 \text{ y } \sum_{\sigma^j} c^j_{\sigma^j}(\widetilde{z}) \neq 0, \\ \left[\dfrac{\widetilde{z^j_{\widehat{\sigma^j}}} + c^j_{\widehat{\sigma^j}}(\widetilde{z})}{1+\sum_{\sigma^j} c^j_{\sigma^j}(\widetilde{z})} k_j \right]_+ & \text{si } c^j_{\widehat{\sigma^j}}(\widetilde{z}) \neq 0, \\ z^j_{\widehat{\sigma^j}} & \text{si } c^j_{\sigma^j}(\widetilde{z}) = 0 \text{ para cada } \sigma^j \in D_j, \end{cases}$$

donde, como en el capítulo 5, $c^j_{\sigma^j}(\widetilde{z}) = \text{máx}\{0, E_j\left(\widetilde{z}\,\middle|\sigma^j\right) - E_j(\widetilde{z})\}$ y para cada número real x, $[x]$ es el entero mayor que es menor o igual que x y $[x]_+$ es el entero menor que es mayor o igual que x.

La dinámica que hemos llamado de Nash porque está construída sobre la función de reajuste (capítulo 5) expresa una relación de cautela frente al cambio. La población no abandona bruscamente una estrategia, sino que hay un reacomodo gradual de las personas que corresponde al incremento de ganancia que las diversas estrategias puras hubieran provocado frente a una estructura estratégica dada. En este caso, a diferencia de la idea de la función que trabaja Nash, las personas siempre eligen estrategias puras y las estrategias mixtas solo las lleva a cabo la población en su conjunto. Debido a esto, la dinámica de reajuste de Nash está modelando cambios en la proporción de la población que usa una u otra estrategia pura.

Proposición 8.5.5. *Las dinámicas de los cuatro ejemplos anteriores son darwinianas.*

Demostración. Probaremos únicamente que la dinámica de mejor réplica es darwiniana.

Para cualquier $z \in Z$, si $z' \in d(z)$, los posibles valores de $z'^j_{\widetilde{\sigma}}$ son k_j, $z^j_{\widetilde{\sigma}}$ o 0.

a) Si $z'^j_{\widetilde{\sigma}}$ es k_j y $z'^j_{\widetilde{\sigma}} \neq z^j_{\widetilde{\sigma}}$, entonces $z'^j_{\widetilde{\sigma}} > z^j_{\widetilde{\sigma}}$. $\widetilde{\sigma}$ es una mejor réplica estricta de j a $\overline{z}$, pero eso quiere decir que $E_j(\overline{z}\,|\widetilde{\sigma}) > E_j(\overline{z})$. En este caso, la dinámica cumple la condición darwiniana.

b) Si $z'^j_{\widetilde{\sigma}}$ es 0 y $z'^j_{\widetilde{\sigma}} \neq z^j_{\widetilde{\sigma}}$, entonces, $z'^j_{\widetilde{\sigma}} < z^j_{\widetilde{\sigma}}$ y se tiene cualquier relación entre $E_j(\overline{z}\,|\widetilde{\sigma})$ y $E_j(\overline{z})$. Esto es compatible con la condición darwiniana, pues esta no afirma nada en este caso.

c) Si $z'^j_{\widetilde{\sigma}} = z^j_{\widetilde{\sigma}}$ y no existen mejores respuestas estrictas de j a $\overline{z}$, entonces $E_j(\overline{z}) \geq E_j\left(\overline{z}\,\middle|\sigma^j\right)$ para toda $\sigma^j \in D_j$. Si $z^j_{\widetilde{\sigma}}$ es positivo, tendríamos $E_j(\overline{z}) = E_j\left(\overline{z}\,\middle|\widetilde{\sigma}^j\right)$. Por lo que se cumple con la condición darwiniana.

c') Si $z'^{j}_{\widetilde{\sigma}} = z^{j}_{\widetilde{\sigma}}$ y existen mejores respuestas estrictas de j a $\overline{z}$, entonces $\widetilde{\sigma}$ no es la mejor respuesta elegida y $z'^{j}_{\widetilde{\sigma}} = 0$. Se cumple con la condición darwiniana. ∎

Dejamos como ejercicio la demostración de que las dinámicas de mejor respuesta con inercias y la de reajuste de Nash son darwinianas.

Para estudiar a que esquemas de comportamiento conducira una dinámica darwiniana, no sólo sus puntos fijos resultan interesantes, también pueden existir esquemas formados por varias estructuras estratégicas, tales que cuando la población es conducida por la dinámica d a ese subconjunto de Z, ya no podrá abandonarlo con posteriores aplicaciones de d.

En la sección 8.4, entramos en contacto con tres distintas digráficas asociadas al conflicto representado por el juego en el que estaba envuelta una población de 6 hombres y 6 mujeres. Cada digráfica fue generada con una de las tres dinámicas de aprendizaje, la de mejor réplica, sin inercia y con inercia débil y fuerte. Las definiciones que siguen formalizan lo que se realizó entonces.

Definición 8.5.6. Dada una población K, involucrada en un conflicto que se expresa en el juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$, y una dinámica darwiniana d, decimos que $(V, \overrightarrow{A})$ es la digráfica asociada a $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$, si $V = Z$ *y* (z, z') está en $\overrightarrow{A}$, si y sólo si z' está en $d(z)$.

Definición 8.5.7. Dado un juego n-personal $((N, \{D_j\}, \varphi)$ y una población K partida en n subconjuntos, se dice que una digráfica $(V, \overrightarrow{A})$ corresponde a alguna dinámica darwiniana del conflicto si $V = Z$ y para (z, z') que está en $\overrightarrow{A}$ si $z'^{j}_{i} > z^{j}_{i}$ implica $E_j(\overline{z} \mid i) > E_j(\overline{z})$, y si $z'^{j}_{i} = z^{j}_{i} > 0$, entonces $E_j(\overline{z} \mid i) = E_j(\overline{z})$.

Las estructuras estratégicas de la población que interesan dentro del proceso son las que pertenecen a las clases de comunicación recurrente de la digráfica. Los conjuntos que constan de uno de los puntos fijos de la dinámica son algunas de dichas clases. En la sección siguiente, nos ocupamos de estudiar si algunas de las ccr tienen una probabilidad mayor de ocurrir dentro del proceso. El tratamiento para las dinámicas de historias de Young es completamente semejante.

8.5.1. Digráficas Perturbadas

En las dinámicas de las poblaciones que se enfrentan en cualquier juego rectangular finito, con una dinámica de aprendizaje, supongamos que cada

persona puede equivocarse en cualquier vértice, escogiendo cualquiera de sus estrategias. Bajo este tipo de dinámicas perturbadas, se puede pasar de un vértice cualquiera z a otro z', pero esto, en algunas ocasiones, tendría un "costo en errores". Para cada pareja de vértices, para la que existía una flecha en la digráfica sin errores, diremos que el costo es cero. Entonces, a cada flecha de la digráfica perturbada, le asociaremos un entero que medirá el costo que es el mínimo número de personas que se tienen que equivocar, para pasar al vértice final de la flecha, en lugar de llegar a alguno de los vértices que marcaba la dinámica de aprendizaje sin equivocaciones. Las flechas de la digráfica original pertenecen a la perturbada y, como decíamos anteriormente, tendrán costo cero.

Observaciones: Nuestro objetivo en cualquier digráfica perturbada, con un costo para cada flecha será detectar los vértices que requieren del menor "costo total" posible para llegar a ellos, desde cualquier otro vértice.

A la perturbación conviene hacerle suficientes restricciones para que la digráfica perturbada resulte conexa, por ejemplo, que las personas que desempeñan el papel de jugador j, cualquiera que sea j, se puedan equivocar hacia cualquiera de sus estrategias. Tomando en cuenta estas restricciones $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$ la digráfica perturbada de $(V, \overrightarrow{A})$ es única. Además, es una digráfica conexa, finita, tal que $\overrightarrow{A} \subseteq \overrightarrow{\overrightarrow{A}}$, $\overrightarrow{\overrightarrow{A}} = V \times V$ y hay una función c de $\overrightarrow{\overrightarrow{A}}$ en $\{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que para toda $(v, v') \in \overrightarrow{A}$, $c\,(v, v')$ es cero.

Usaremos la notación $((V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}}), c)$ para referirnos a una digráfica perturbada de $(V, \overrightarrow{A})$, con función de costo c.

El costo de una flecha $(x, y) \in \overline{Z} \times \overline{Z}$ cuenta el mínimo número de errores para pasar del estado x al estado y. Se define como

$$c(x, y) = \min_{z \in d(x)} \left\{ \sum_{j \in N} \sum_{i \in D_j} \left| z_i^j - y_i^j \right| \right\}.$$

Diremos que el costo de una trayectoria es la suma de los costos de las flechas que pertenecen a la trayectoria.

Para medir el menor "costo total" posible para llegar a un estado z, definimos el concepto de z-árbol y su costo.

Definición 8.5.8. Dada una digráfica $(W, \overrightarrow{B})$ y un vértice z, *un* z-árbol es una subdigráfica $(W, \overrightarrow{B}_z)$ de $(W, \overrightarrow{B})$, tal que para cada vértice x distinto de z, existe una trayectoria única de $(W, \overrightarrow{B}_z)$ que une a x con z. Si tenemos una función de costo c definida en $\overrightarrow{B}$, el costo del z- árbol τ es la suma de los costos de todas las flechas que pertenecen a τ.

Definición 8.5.9. El potencial estocástico de un vértice z de $(V, \overrightarrow{A})$, v_z, es el mínimo costo de todos los $z-$árboles.

Diremos que z es un vértice de menor costo total, si es un vértice de mínimo potencial estocástico. Es natural esperar que entre los vértices de las clases de comunicación recurrente (ccr) de una digráfica se encuentran los de mínimo costo total, pues a ellos conduce la dinámica sin errores. Definiremos algunos conceptos útiles y estableceremos algunos resultados para estudiar la fuerza de atracción de cada vértice y de cada una de las ccr de una digráfica (los patrones de conducta social aprendidos) y encontrar los vértices de menor potencial estocástico dentro de $(V, \overrightarrow{A})$.

Definición 8.5.10. Se dice que x está en la cuenca de la clase de comunicación recurrente H, si existe una trayectoria de costo cero que une a x con algún vértice de H.

Denotamos como $Cue(H)$ a la cuenca de H .

Definición 8.5.11. Sea $((V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}}), c)$ una perturbación de $(V, \overrightarrow{A})$ y z y z' dos vértices distintos. El costo de pasar de z a z', $c_{zz'}$, es el mínimo de los costos de todas las trayectorias en $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$ que unen a z con z'.

Proposición 8.5.12. *Sean x y x' vértices en H, una Clase de Comunicación Recurrente (ccr) de $(V, \overrightarrow{A})$ y z un vértice cualquiera. Entonces c_{zx} es igual a $c_{zx'}$ (a este número lo denotamos como $c(z, H)$); además, c_{xz} es igual a $c_{x'z}$ (a este número lo denotamos como $c(H, z)$).*

Demostración. Consideremos una trayectoria de costo mínimo c_{zx} que une a z con x y unámosle una de las trayectorias de costo cero que une a x con x'. Hemos construido una trayectoria que une a z con x', cuyo costo es c_{zx}, por lo tanto, $c_{zx'} \leq c_{zx}$. Análogamente, se demuestra que $c_{zx} \leq c_{zx'}$, es decir, son iguales.

Por otro lado, considérese una trayectoria de costo mínimo que une a x con z y construyamos otra trayectoria uniéndole una de costo cero que una x' con x. La nueva trayectoria tiene costo c_{xz}; por lo tanto, $c_{x'z} \leq c_{xz}$. Pero podemos probar en forma análoga que $c_{xz} \leq c_{x'z}$, así que son iguales. ∎

Proposición 8.5.13. *Sea x un vértice de una ccr H, x' en la cuenca de H y z un vértice cualquiera. Entonces $c_{zx} \leq c_{zx'}$.*

Demostración. Consideramos una trayectoria de costo mínimo que une a z con x' y le unimos una trayectoria de costo cero que une a x' con x. Esta nueva trayectoria une a z con x y tiene costo $c_{zx'}$; por lo tanto, $c_{zx} \leq c_{zx'}$. ∎

Corolario 8.5.14. *Si x es un vértice de mínimo potencial estocástico, entonces x está en alguna clase de comunicación recurrente.*

Corolario 8.5.15. *Sean H_i y H_j dos clases de comunicación recurrente y dos vértices x y z tales que x está en H_i y z en H_j. Entonces c_{xz} no depende de x, ni de z. A éste número se le denota como $c(H_i, H_j)$*

Proposición 8.5.16. *Un $z-$ árbol de mínimo costo consta de trayectorias que unen a cualquier vértice x con z, pasando primero por un vértice u_H de alguna ccr H, tal que x está en la cuenca de H y de trayectorias de costo $c(H, z)$ que une a u_H con z. El potencial estocástico de z es igual a $\sum_i c(H_i, z)$.*

Demostración. Como un $z-$árbol debe unir a cada vértice de la gráfica distinto de z con z, dada una ccr, el costo mínimo de pasar de cualquiera de sus vértices a z es el mismo, $c(H, z)$. En un $z-$árbol de mínimo costo, hay por lo menos una trayectoria de costo $c(H, z)$ que une a un vértice u_H de H con z. Si los demás elementos de H están unidos con z a través de u_H, $c(H, z)$ sólo se suma una vez. Entre dos vértices que pertenecen a ccr distintas no hay trayectorias que los unan, dentro de $(V, \overrightarrow{A})$, que tengan costo cero. Por lo tanto, el costo de un $z-$ árbol es mayor o igual que $\sum_i c(H_i, z)$.

Sea x un vértice que no está en ninguna ccr. El vértice x está en la cuenca de H' para alguna ccr. Entonces existe una trayectoria de costo cero, dentro de $(V, \overrightarrow{A})$, que une a x con algún vértice de H'. Es decir, en el $z-$árbol de mínimo costo, x se une a z, a través de algún $u_{H'}$, o lo que es lo mismo, en dicho z- árbol ningún vértice que no está en alguna de las ccr añade más costo. Pero esto quiere decir que el costo mínimo para un $z-$árbol es menor o igual que $\sum_i c(H_i, z)$.

O sea, el costo mínimo para un $z-$árbol es $\sum_i c(H_i, z)$ y las trayectorias son de la forma descrita. ∎

Concluimos que la competencia por el mínimo potencial estocástico se establece entre las ccr. Buscaremos las ccr que contienen a los vértices z con $z-$árboles de mínimo costo, con las mismas ideas que hemos estado trabajando, pero en una nueva digráfica más pequeña que tendrá como vértices a las ccr.

8.5.2. La Digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente

Definición 8.5.17. Sea $((V, \overrightarrow{A}), c)$ la digráfica perturbada de $(V, \overrightarrow{A})$ con costo c. La digráfica de las Clases de Comunicación Recurrente de $(V, \overrightarrow{A})$ es la pareja $(\widetilde{V}, \widetilde{A})$, en donde $\widetilde{V} = \{H_1, H_2, \ldots, H_r\}$, con H_i una ccr de $(V, \overrightarrow{A})$ para toda i y $\widetilde{A} = \widetilde{V} \times \widetilde{V}$. La función de costo $\widetilde{c}$: $\widetilde{V} \times \widetilde{V} \to R$ es tal que $\widetilde{c}(H_i, H_j) = c(H_i, H_j)$.

Dada una ccr H, podemos hablar de los $H-$ árboles de $(\widetilde{V}, \widetilde{A})$ y del potencial estocástico de H, es decir, del mínimo costo de todos ellos.

Proposición 8.5.18. *Dada una digráfica $(V, \overrightarrow{A})$ y una función de costos c. Si H es una clase de comunicación recurrente y z un vértice que no está en la cuenca de H, entonces*

$$c\,(z, H) = \min_{y \in Cue(H)} c\,(z, y)\,.$$

Demostración. Sea $\tau^*_{zz'}$ una trayectoria que une a z con z' en H de la forma: $\{(z, x)\} \bigcup_{m=0}^{s} \{(x_m, x_{m+1})\}$, con x en la cuenca de H, tal que

$$\min_{y \in Cue(H)} c\,(z, y) = c(z, x),$$

$x_0 = x$ y $\{(x_0, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_{s-1}, x_s)\}$ una trayectoria de costo cero que une a x con algún vértice $x_s = z'$ de H.

Entonces $c(\tau^*_{zz'}) = c(z, x)$, y $c(\tau^*_{zz'})$ es mayor o igual que c_{zH}.

Para cualquier trayectoria τ' que une a z con un vértice x_s de H, definimos $k(\tau')$ como el número de vértices de τ' que no están en la cuenca de H.

Entonces $k(\tau^*_{zz'}) = 1$.

Para cada entero positivo κ, determinamos las trayectorias que unen a z con z' y que tienen a lo más κ vértices fuera de la cuenca de z'.

Definamos como

$$C(z, \kappa) = \min_{\tau_{zz'} | k(\tau_{zz'}) \leq \kappa} c(\tau_{zz'}).$$

Por inducción sobre κ demostremos que

$$c(\tau^*_{zz'}) = C(z, \kappa) = \min_{y \in Cue(H)} c\,(z, y) \text{ para toda } \kappa.$$

Supongamos que $\kappa = 1$. Si τ' es una trayectoria que une z con z' de mínimo costo y $k(\tau')$ es menor o igual que uno, entonces z es el único vértice de τ' que no pertenece a la cuenca de H y $c(\tau') = c(z, x') = C(z, 1)$.

Como τ' es de mínimo costo, $c(z, x') = c(z, x) = c(\tau^*_{zz'})$ y, por lo tanto, $c(\tau^*_{zz'}) = C(z, 1)$.

Supongamos, por hipótesis de inducción, que

$$\text{para alguna } \kappa \geq 2, c(\tau^*_{zz'}) = C(z, \kappa) = \min_{y \in Cue(H)} c\,(z, y)\,.$$

Sea τ' una trayectoria de costo mínimo que une a z con z' y tal que

$$k(\tau^*_{zz'}) = \kappa + 1.$$

Sea (z, z_0) en τ', tal que z_0 no está en la cuenca de H. Entonces

$$c(\tau') = c(z, z_0) + C(z_0, \kappa) = c(z, z_0) + c(\tau^*_{z_0 z'}),$$

donde $\tau^*_{z_0 z'}$ es una trayectoria de mínimo costo que une a z_0 con un vértice z' y

$$\tau^*_{z_0 z'} = \{(z_0, x')\} \bigcup_{m=0}^{s} \{(x_m, x_{m+1})\}$$

con x' en la cuenca de H tal que $\min_{y \in Cue(H)} c\,(z_0, y) = c(z_0, x')$ y $\bigcup_{m=0}^{s} \{(x_m, x_{m+1})\}$ trayectoria que une a x' con z'.

Es decir, $c(\tau') = c(z, z_0) + c(z_0, x')$.

La trayectoria $\{z, z^0\} \cup \tau^*_{z_0 z'}$ contiene dos puntos fuera de la cuenca de H, así que

$$c(\tau') = C(z, \kappa + 1) = c(\tau^*_{zz'}) = C(z, 2) = \min_{y \in Cue(H)} c\,(z, y)\,.$$

Por lo tanto, el costo mínimo de pasar de z a H es $c(z, x)$. ∎

Obtenemos como corolario:

Corolario 8.5.19. *El costo de pasar de la clase de comunicación recurrente H a la H' es igual al mínimo de los costos de las flechas que unen a un vértice de H con un vértice de la cuenca de H'.*

Con estos resultados podemos calcular el costo de las flechas de $(\widetilde{V}, \widetilde{A})$.

Reexaminemos el conflicto de los 6 hombres y las 6 mujeres, con las dinámicas de aprendizaje establecidas en las secciones anteriores, comencemos con la de mejor réplica. Sus ccr son H_1, H_2, H_3 y H_4 , donde

$$H_1 = \{(0, 6)\},$$

$$H_2 = \{(6,0)\},$$
$$H_3 = \{(6,6)\,,(0,0))\},$$
$$H_4 = \{(2,4)\}\,.$$

La digráfica de las cuatro ccr aparece en la figura 8.5.1.

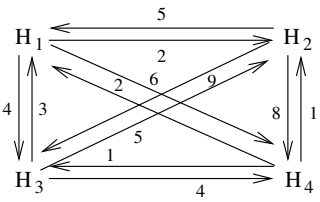

Figura 8.5.1:

Los $H_1(H_2, H_3, H_4)$-árboles aparecen en las figuras 8.5.2, 8.5.3, 8.5.4 y 8.5.5, respectivamente.

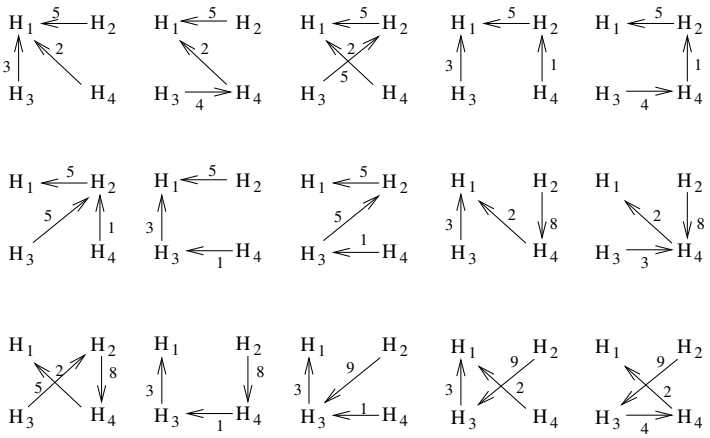

Figura 8.5.2:

El potencial estocástico de H_1 es 9.
El potencial estocástico de H_2 es 6.
El potencial estocástico de H_3 es 10.
El potencial estocástico de H_4 es 13.

Es decir, en la digráfica de las ccr, H_2 es el vértice de menor potencial estocástico, lo que significa que $(6,0)$ es el vértice de menor potencial estocástico en la digráfica original (figura 8.4.1). Este vértice corresponde al equilibrio de Nash que beneficia a los hombres, es decir $((1,0),(0,1))$ o lo

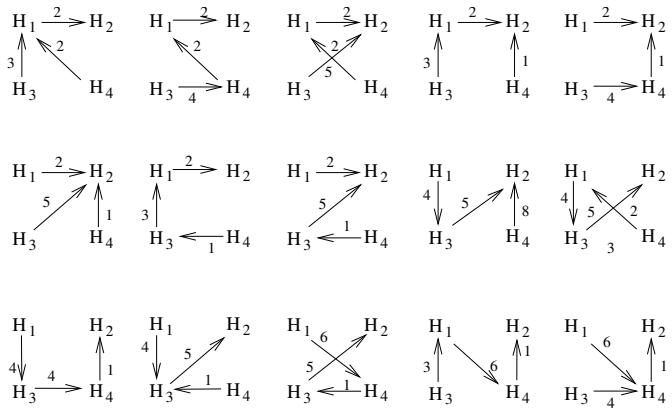

Figura 8.5.3:

que es lo mismo, interpretado en estrategias puras, el equilibrio de Nash (M, D).

La forma de las rutas aprendidas o acostumbradas, cuando los participantes utilizan la dinámica de aprendizaje de mejor réplica (de pánico) y bajo el supuesto de que la gente comete errores, se observan en la figura 8.5.6, las flechas punteadas tienen costo positivo, es decir suponen que se cometen errores y las otras flechas tienen costo cero.

Veamos que sucede, en el mismo juego, con una dinámica lenta, como la de mejor réplica con inercia fuerte. Conservando la notación que teníamos en la dinámica de pánico, ahora, en la de mejor réplica con inercias fuerte,

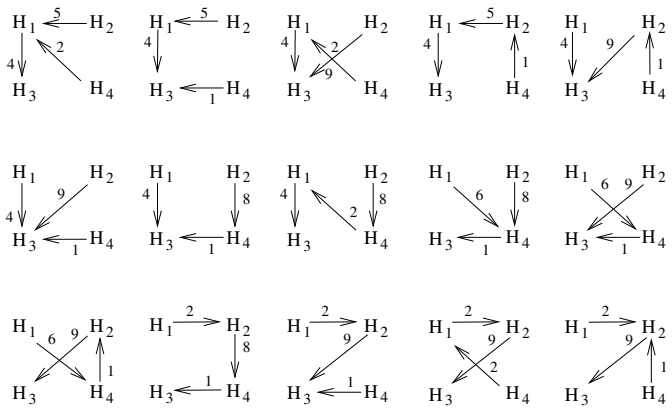

Figura 8.5.4:

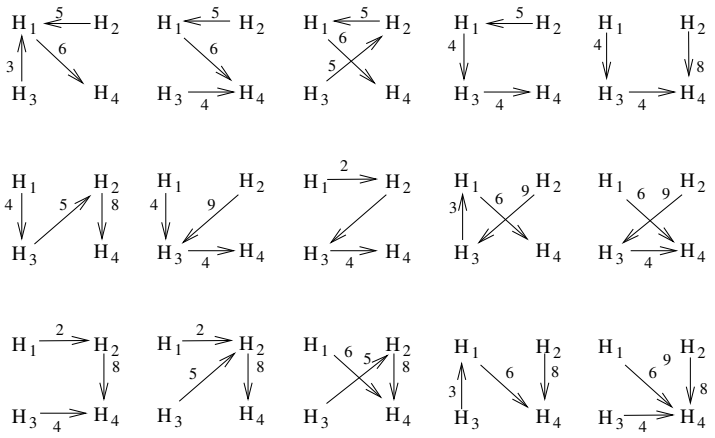

Figura 8.5.5:

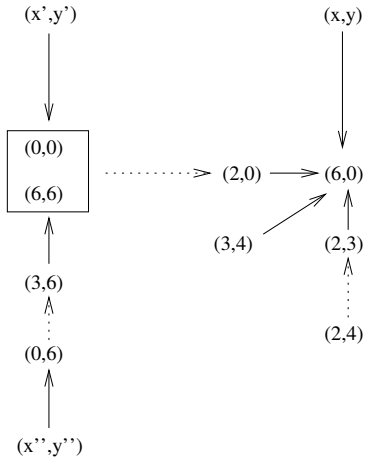

Figura 8.5.6:

las tres ccr son H_2, H_3 y H_4 y la digráfica de las ccr es como indica la figura 8.5.7.

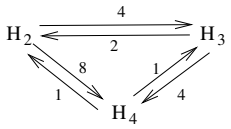

Figura 8.5.7:

Los H_2-árboles, los H_3-árboles y los H_4-árboles están representados en las figuras 8.5.8. El potencial de H_2 es 3, el potencial de H_3 es 5 y el potencial de H_4 es 8. Por lo que el vértice de menor potencial estocástico es, de nuevo, H_2, con las mismas consecuencias.

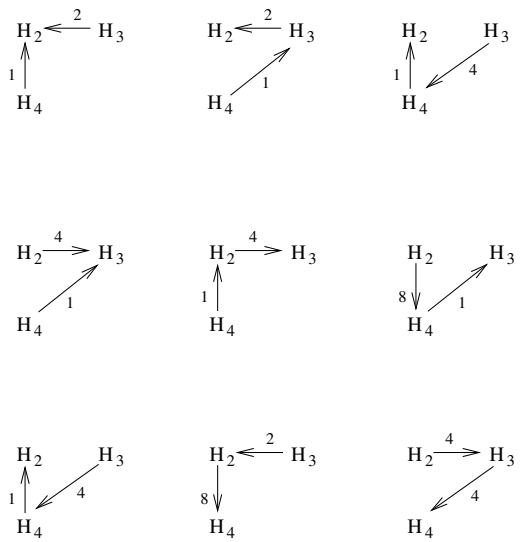

Figura 8.5.8:

Con la dinámica de las historias se procede en forma análoga. Así para el juego de los hombres y las mujeres que estamos examinando, con historias de tamaño 2, tenemos sólo dos clases de comunicación recurrente que son:

$$\left(\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ D \end{pmatrix}\right) \text{ y } \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Reb \\ Reb \end{pmatrix}\right).$$

Entonces, la digráfica de las ccr sólo tiene dos vértices

$$\left(\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ D \end{pmatrix}\right) \underset{1}{\overset{4}{\rightleftarrows}} \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Reb \\ Reb \end{pmatrix}\right).$$

Por lo que, sólo hay un $H-$árbol para cada ccr.

$$\left(\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ D \end{pmatrix}\right) \overset{4}{\rightarrow} \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Reb \\ Reb \end{pmatrix}\right)$$

y

$$\left(\begin{pmatrix} M \\ M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ D \end{pmatrix}\right) \underset{\leftarrow}{1} \left(\begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Reb \\ Reb \end{pmatrix}\right).$$

De nuevo, el equilibrio de Nash machista domina el panorama, pues es el que corresponde a la ccr con mínimo potencial estocástico.

Debe notarse que, siguiendo los criterios de Harsanyi y Selten expuestos en la sección 8.2, el equilibrio correspondiente a los hombres es dominante por riesgo y con el algoritmo de Harsanyi y Selten sería el seleccionado. En esta sección, hemos encontrado para este juego 2×2 el mismo equilibrio seleccionado por un criterio con fuertes supuestos racionalistas, pero aquí se han supuesto dinámicas de aprendizaje que se desenvuelve entre personas con muchas limitaciones de racionalidad, miopes y que cometen errores.

Pánico contra Calma

Pudiera parecer que para una población envuelta en un conflicto representado por un juego, cualquier dinámica llevará al mismo resultado, pero no es así.

Pensemos, por ejemplo, en un juego 2×2 que no tenga equilibrio de Nash en estrategias puras, como el del volado, con una población de 4 personas renglón y 4 personas columna que reaccionan con una dinámica de mejor respuesta, sin ningún tipo de inercia (dinámica de pánico), como en la figura 8.5.9.

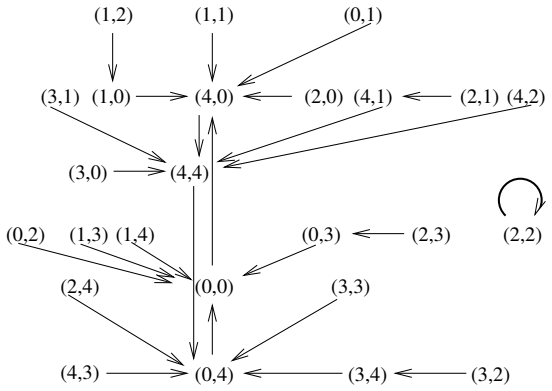

Figura 8.5.9:

Las únicas ccr son $H_1 = \{(2,2)\}$, que representa al único equilibrio de Nash del juego, es decir a $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$, y el ciclo

$$H_2 = \{(4,0), (4,4), (0,4), (0,0)\}.$$

Entonces, la ccr de menor potencial estocástico, bajo la dinámica del pánico es H_2, el ciclo.

$$H_1 \underset{4}{\overset{1}{\rightleftarrows}} H_2$$

Figura 8.5.10:

Es decir, todos los que esconden la moneda escogen águila en un periodo y todos los que tratan de adivinar escogen sol; en el siguiente periodo todo mundo escoge águila. En un tercer periodo, los que esconden escogen sol y los que adivinan águila, mientras que para el cuarto periodo todo mundo escoge sol y en el siguiente se vuelve a empezar.

Estudiemos que ocurre con una dinámica muy lenta, como la de mejor réplica con inercia fuerte que se presenta en la figura 8.5.11.

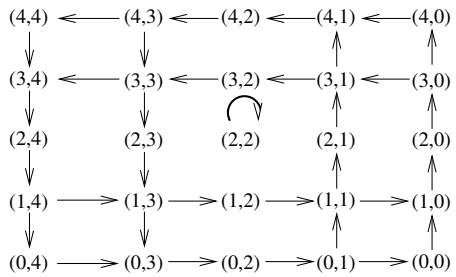

Figura 8.5.11:

Tenemos en esta dinámica dos ccr, una de ellas es $H_1 = \{(2,2)\}$, mientras que la segunda H_2 consta de todos los demás vértices. Ambas ccr tienen costo 1 para pasar de una a la otra. Esto significa que todos los vértices de la gráfica tienen potencial estocástico 1.

$$H_1 \underset{1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} H_2$$

Figura 8.5.12:

8.6. La dinámica como un proceso estocástico

Abordaremos en una forma distinta la problemática que hemos estado atacando a lo largo del capítulo.

Partimos como en la sección 8.5 de una población K envuelta en un conflicto expresado en el juego $(N, \{D_j\}, \varphi)$. La población está partida en n clases o subpoblaciones ajenas, una para cada jugador. El juego se repite

a lo largo de tiempo discreto y en cada periodo cada j en K elige una estrategia y queda determinado un patrón de conducta social (estructura estratégica social). El conjunto Z representa, como en 8.5, el conjunto de patrones de conducta sociales posibles. Existe d una correspondencia definida de Z en sí mismo que modela la dinámica de aprendizaje de las personas pertenecientes a K. A d se le pide que sea una dinámica darwiniana (definición 8.5.2). Estudiamos los patrones de conducta que la sociedad aprenderá a lo largo del tiempo.

Definición 8.6.1. Decimos que una colección Z_1 , Z_2 , ..., Z_r es una colección de patrones de conducta socialmente aprendidos en el largo plazo, en el proceso $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$ si se cumplen:

a) para $i = 1, 2, \ldots, r$ Z_i es un subconjunto no vacío de Z y $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para toda i y j distintas.

b) Para cualquier z en Z existe una sucesión $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset Z$, tal que $z_1 = z$, z_m está en Z_k, para alguna k, y z_{i+1} está en $d(z_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

c) Si z está en Z_k y z' no está en Z_k no existe ninguna sucesión $\{z_1, \ldots, z_m\}$, tal que $z_1 = z$, z_{i+1} está en $d(z_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $z_m = z'$.

d) Si z y z' están en Z_k, existe una sucesión $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\} \subset Z$, tal que $z_1 = z$, z_{i+1} está en $d(z_i)$, para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $z_m = z'$.

$Z_i = \{z\}$ si y sólo si $\overline{z}$ es un equilibrio de Nash estricto que está representado en Z. En ese caso, z es un punto fijo de d.

Observemos que siempre existe al menos un patrón de conducta socialmente aprendido, aunque d no tenga punto fijo. Tenemos, entonces, que una población K, enfrentada en el "conflicto" $(N, \{D_j\}, \varphi)$ y sometida a una dinámica de aprendizaje será conducida a ciertos patrones de conducta, en particular a los correspondientes a algunos de los equilibrios de Nash. Pero aún no sabemos a cuál de estos patrones irá a parar.

Antes de abordar dicho problema, asociemos a cada una de estas dinámicas de aprendizaje, una matriz de incidencia. Supongamos que para toda estructura estratégica z, todos los elementos de $d(z)$ tienen la misma probabilidad de ocurrir y construimos P^0, una matriz cuadrada de orden $\#Z$.

$$P^0_{zz'} = \begin{cases} 0 & \text{si } z' \notin d(z), \\ \frac{1}{\#d(z)} & \text{si } z' \in d(z). \end{cases}$$

La matriz construida representa a d, en un sentido probabilístico. Si la población está en el estado z, hay una probabilidad $P^0_{zz'}$ de pasar a z'. Los signos de los términos de P^0 dependen de la dinámica d.

Denotemos como Q al conjunto de distribuciones de probabilidad en Z, es decir Q es el simplejo unitario en $R^{\#Z}$.

Podemos interpretar a P^0 como una dinámica de Q en Q. Es decir, si $q_t \in Q$ es el vector de distribución de probabilidad en Z, en el periodo t, entonces $q_t P^0$ será el vector de distribución de probabilidad en Z, en el periodo $t+1$.

P^0 es una matriz no negativa y, además, los términos de sus renglones suman 1, entonces por los famosos resultados de Perron-Frobenius, sobre los valores y vectores propios de matrices no negativas, podemos asegurar que 1 es el valor propio de P^0 de magnitud mayor y que al menos un elemento de Q es uno de sus vectores propios asociado a 1. Es decir, existe al menos una distribución de probabilidad $\widehat{q}$ tal que $\widehat{q}P^0 = \widehat{q}$. En ese caso diremos que $\widehat{q}$ es una distribución estacionaria de P^0.

P^0 puede tener muchas distribuciones estacionarias. Para establecer una forma de discriminar entre esas distribuciones estacionarias de P^0, pensemos que la población K está enfrentada en $(N, \{D_j\}, \varphi)$ y sometida a una dinámica de aprendizaje P^0, pero ocurre que cada miembro de la población K se desvía, con una pequeña probabilidad, de la respuesta marcada. Estas desviaciones pueden ser producto de errores, experimentación, mutaciones o lo que sea.

8.6.1. Otra vez sobre errores y experimentos

Supongamos, como en la sección 8.5, que los miembros de K, no siempre aplican rígidamente d, sino que experimentan o se equivocan con cierta probabilidad. Con una probabilidad alta, las cosas suceden de acuerdo a P^0, pero con una pequeña probabilidad ocurren transiciones de unos estados a otros que no podían ocurrir con P^0.

Diremos que la dinámica de aprendizaje d está perturbada (por errores y experimentaciones) si:

a) en cada z, cualquier j en K_j se desvía desde las estrategias que están marcadas en los elementos de $d(z)$, con probabilidad $\varepsilon\eta_j$, $0 < \varepsilon\eta_j < 1$ y

b) para cada z y j, hay una distribución $\rho_j(\quad|z)$ en D_j, tal que $\rho_j\left(\sigma^j|z\right)$ es positiva para cada $\sigma^j \in D_j$.

Las desviaciones de cada j son independientes de las de otras personas y de los periodos $\rho_j\left(\sigma^j|z\right)$ especifica la probabilidad de que los miembros de K_j, estando en z, se desvíen a σ^j.

Dados P^0, ε, $\left\{\eta_j\right\}_{j\in N}$ y $\left\{\rho_j(\quad|z)\right\}_{j\in N}$, como antes, definimos P^ε, una perturbación de P^0, como

$$P^{\varepsilon}_{zz'} = \left(\prod_{i\in K}(1-\varepsilon\eta_i)\right)P^0_{zz'}+$$

$$\sum_{y\in d(z)\ y\neq z'}\left(\sum_{J_{yz'}\neq\emptyset} Q^{J_{yz'}}_{yz'}\left(\prod_{i\in J_{yz'}}\varepsilon\eta_{s|i\in K_s}\right)\left(\prod_{i\notin J_{yz'}}\left(1-\varepsilon\eta_{s|i\in K_s}\right)\right)P^0_{zy}\right),$$

donde $Q^J_{xx'}$ es la probabilidad de ir de x a x', cuando los únicos que se equivocan son los miembros del conjunto J.

Es decir, si $J\neq\emptyset$, entonces

$$Q^J_{yz'} = \prod_{i\in J}\rho_i\left(\sigma'^i\,|y\right);$$

si $J=\emptyset$, $Q^J_{xx'} = P^0_{xx'}$.

$J_{yz'}$ es un subconjunto de K para el que $Q^{J_{yz'}}_{yz'}$ es positivo.

El proceso perturbado tiene propiedades más fuertes que P^0. Dichas propiedades se resumen en la siguiente proposición.

Proposición 8.6.2. *a) $P^{\varepsilon}_{zz'}$ es positiva para cada z y z' en Z.*

b) $\lim_{\varepsilon\to 0} P^{\varepsilon}_{zz'} = P^0_{zz'}$ para cada z y z' en Z.

c) Para cada z y z' en Z, existe un entero no negativo mínimo $r(z,z')$, tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-r(z,z')}P^{\varepsilon}_{zz'} \text{ existe y es positivo.}$$

d) Existe una única distribución estacionaria de P^{ε}, q^{ε} en Q, tal que $q^{\varepsilon}P^{\varepsilon} = q^{\varepsilon}$.

e) q^{ε} es un vector positivo.

f) Para cada q en Q, existe un entero no negativo l_q, tal que $q(P^{\varepsilon})^{l_q} = q^{\varepsilon}$.

Demostración. a) $Q^J_{yz'} = \prod_{i\in J}\rho_i\left(\sigma'^i\,|y\right)$, donde $\{\sigma'^{\ i}\}_{i\in J}$ es la colección de errores que los miembros de J realizan.

Siempre existe $y\in d(z)$ y $J_{yz'}$ tales que $Q^{J_{yz'}}_{yz'}$ es positivo. Además, como y está en $d(z)$, P^0_{zy} también es positivo.

Es decir, $P^{\varepsilon}_{zz'}$ es positivo, para cada z y z' en Z.

b) La afirmación b se desprende inmediatamente de la expresión de $P^{\varepsilon}_{zz'}$.

c) Sea $r(z,z') = \min_{x\in d(z)}\sum_{i,j}\left|x^j_i - z'^j_i\right| = \min_{y\in d(z)}\left|J_{yz'}\right|$, donde $J_{yz'}$ puede ser vacío, entonces $r(z,z')$ es el más pequeño entero no negativo, tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-r(z,z)}P^{\varepsilon}_{zz'} \text{ existe y es positivo.}$$

El número $r(z, z')$ es el orden de nulidad de $P^{\varepsilon}_{zz'}$.

d), e) y f) se desprenden de la afirmación a), pues P^{ε} es una matriz positiva, por lo que es irreducible y primitiva. Entonces existe un único vector $q^{\varepsilon} \in Q$ tal que $q^{\varepsilon}P^{\varepsilon} = q^{\varepsilon}$. Este vector tiene todas sus coordenadas positivas y, para cada q en Q, existe un entero no negativo l_q, tal que $q(P^{\varepsilon})^{l_q} = q^{\varepsilon}$. ∎

Observación: q^{ε} no sólo es un punto de equilibrio del proceso expresado por P^{ε}, sino que, debido a la propiedad f, desde cualquier estado $q \in Q$, el proceso conduce al punto q^{ε}. Es decir, q^{ε} es estable.

El número $r(z, z')$ mide la resistencia de pasar de z a z' de acuerdo a la dinámica d.

Nos falta, ahora, saber qué ocurre cuando los errores son pequeños, o sea, cuando hacemos tender a cero la probabilidad de errar de la sociedad. ¿Tendremos la buena suerte de que $\{q^{\varepsilon}\}$ converja? Si así fuera, el límite sería un vector q^{**}, con coordenadas no negativas y que sumarían 1, es decir una distribución de probabilidad entre los elementos de Z. Los estados de Z, correspondientes a las coordenadas positivas de q^{**}, serían los más fuertes, pues lograrían sobrevivir a la dinámica llena de ruido. De existir q^{**} ¿qué relación tienen sus coordenadas positivas con los equilibrios de Nash? ¿qué relación tienen con los patrones de conducta socialmente aprendidos?

No parece fácil probar si existe o no q^{**} y calcularlo, en caso de que existiera.

Afortunadamente a ciertos procesos de Markov perturbados se les puede convertir en un problema de redes, es decir, en un problema de los que estudiamos en la sección anterior, con digráficas que tienen una función de costo definida. Esta transformación se estableció en un teorema de Young [56] que es una versión finita del teorema de M. Freidlin y A. Wentzell [17].

¿En que consisten esos procesos de Markov perturbados de los que estamos hablando? Precisémoslo en la definición siguiente:

Definición 8.6.3. Dada una matriz de Markov A^0 y una familia de matrices de Markov $\{A^{\varepsilon}\}$, ε en $(0, a]$, asociada a ella, decimos que $\{A^{\varepsilon}\}$ es un sistema regular de perturbaciones de A^0, si tiene las siguientes propiedades:

i) A^{ε} es irreducible y primitiva para toda ε en $(0, a]$.

Y para toda z y z' en Z,

ii) el límite de $A^{\varepsilon}_{zz'}$ *es* $A^0_{zz'}$, cuando ε tiende a 0;

iii) si $A^{\varepsilon}_{zz'} > 0$, entonces existe un entero no negativo mínimo $r(z, z')$, tal que el límite de $\varepsilon^{-r(z,z')}\ A^{\varepsilon}_{zz'}$, cuando ε tiende a cero existe y es positivo.

La proposición 8.6.2 demuestra que el sistema $\{P^{\varepsilon}\}$ es un sistema regular de perturbaciones de P^0.

8.6.2. Una versión de Young de un teorema de Freidlin y Wentzell sobre procesos de Markov finitos y perturbados.

Para lograr dar vuelta al problema, recurriremos, como mencionamos antes, a las digráficas, con una función de costo. Asociaremos, a cada proceso dinámico de aprendizaje $((N, \{D_j\}, \varphi), K, P^0)$, una digráfica y en ella estudiaremos las clases de comunicación recurrente y, dada una perturbación de P^ε, construiremos la digráfica perturbada, con sus acostumbrados costos.

Definición 8.6.4. Dado un proceso dinámico de aprendizaje social

$$((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$$

la digráfica perturbada asociada a $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$ es la digráfica $(V, \overrightarrow{A})$, con $V = Z$ y

$$\overrightarrow{A} = \{(z, z') \in Z \times Z \,\big|\, P^0_{zz'} > 0\}$$

Los Patrones de Conducta Socialmente Aprendidas de un proceso dinámico de aprendizaje corresponden claramente a las Clases de Comunicación Recurrente de su digráfica asociada.

Proposición 8.6.5. *Si $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ es la Colección de Patrones de Conducta Socialmente Aprendidos en el largo plazo en el proceso de aprendizaje $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$, entonces $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ son las Clases de Comunicación Recurrente de la digráfica asociada. Los estados estacionarios de la dinámica darwiniana son los estados absorbentes de la digráfica asociada y corresponden a los equilibrios de Nash estrictos del juego formados por las estrategias de frecuencias inducidos.*

Si ahora consideramos que $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$, el proceso dinámico de aprendizaje, es sometido a un sistema de perturbaciones que consisten en que, con probabilidad ε la gente se desvía de lo que marca d, podemos construir la digráfica perturbada, con la función de costos de la resistencia que resulta la misma que se utilizó en la sección 8.6.

Definición 8.6.6. Dado un proceso dinámico de aprendizaje social

$$((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$$

y un sistema regular de perturbaciones $\{P^\varepsilon\}_{\varepsilon \epsilon (o,a]}$, la digráfica perturbada asociada a $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d, \varepsilon)$ es la digráfica $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$, con $V = Z$ y

$$\overrightarrow{\overrightarrow{A}} = \{(z, z') \in Z \times Z \,|\, P^\varepsilon_{zz'} > 0\}$$

y como función costo,

$$r : \overrightarrow{\overrightarrow{A}} \to \{0, 1, 2, \ldots\},$$

definida como

$$r(z, z') = \sum_{j \in N} \sum_{i \in D_j} \min_{x \in d(z)} \left| x_i^j - z_i'^j \right|.$$

Si z está en Z, denotamos como T_z a la colección de $z-$árboles de $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$ y, podemos definir el potencial estocástico de z.

Debido a la versión de Young de un teorema de Freidlin y Wentzell podremos obtener el límite de $\{q^\varepsilon\}$ que resulta relacionado con los vértices de potencial estocástico mínimo de la digráfica perturbada.

Teorema 8.6.7 (Young-Freidlin-Wentzell). *Sea A un proceso de Markov finito y $\{A^\varepsilon\}$ un sistema regular de perturbaciones de A. Si para cada ε positivo, v^ε es el único vector no negativo cuyas coordenadas suman 1 tal que $v^\varepsilon A^\varepsilon = v^\varepsilon$, entonces el $\lim \{v^\varepsilon\}$ existe y es un vector no negativo cuyas coordenadas suman 1 y tal que es un vector propio de A asociado al valor propio 1. Sus coordenadas positivas corresponden a los vértices de mínimo potencial estocástico.*

Interpretando este teorema en el contexto que estamos estudiando obtenemos,

Teorema 8.6.8. *Sea $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$ un proceso dinámico de aprendizaje social, P^0 la matriz de Markov asociada a d y $\{P^\varepsilon\}$, ε en $(0, a]$ el sistema de perturbaciones de P^0, entonces existe q^*, el límite de $\{q^\varepsilon\}$, cuando ε tiende a cero. Además,*

a) $q^* P^0 = q^*$ *y*

b) *si q_z^* es positiva, entonces z está en alguna de las clases de comunicación recurrente de menor potencial estocástico de $(V, \overrightarrow{\overrightarrow{A}})$, la digráfica asociada a $((N, \{D_j\}, \varphi), K, d)$.*

La demostración del teorema es esencialmente la de Young (1993). Para establecerla, probemos antes el siguiente lema.

Lema 8.6.9. $q_z^\varepsilon = \dfrac{\sum_{\tau \in T_z} \prod_{(x,x') \in \tau} P_{xx'}^\varepsilon}{\sum_{z \in Z} \sum_{\tau \in T_z} \prod_{(x,x') \in \tau} P_{xx'}^\varepsilon}$.

Demostración. Dada z en Z, definimos el vector $\widehat{q}(\varepsilon)$ como

$$\widehat{q}_z(\varepsilon) = \sum_{\tau \in T_z} \prod_{(x,x') \in \tau} P^{\varepsilon}_{xx'}.$$

Este número es positivo, pues P^{ε} es irreducible, de hecho la matriz es positiva.

La coordenada z de $\widehat{q}(\varepsilon) P^{\varepsilon}$ es
$\sum_{x \in Z} \widehat{q}_x(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{xz} = \widehat{q}_z(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{zz} + \sum_{x \in Z | x \neq z} \widehat{q}_x(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{xz}$.

Por otro lado,
$\sum_{x \in Z | x \neq z} \widehat{q}_x(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{xz} = \sum_{x \in Z | x \neq z} P^{\varepsilon}_{xz} \sum_{\tau \in T_x} \prod_{(y,y') \in \tau} P^{\varepsilon}_{yy'}$
y reordenando los términos, tendremos que
$\sum_{x \in Z | x \neq z} \widehat{q}_x(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{xz} = \sum_{x \in Z | x \neq z} P^{\varepsilon}_{zx} \sum_{\tau \in T_z} \prod_{(x,x') \in \tau} P^{\varepsilon}_{xx'} =$
$\widehat{q}_z(\varepsilon) \sum_{x \in Z | x \neq z} P^{\varepsilon}_{zx} = \widehat{q}_z(\varepsilon)(1 - P^{\varepsilon}_{zz})$.

Sumando $\widehat{q}_z(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{zz}$ a ambos lados de la última igualdad, tenemos que para toda z, $\sum_{x \in Z} \widehat{q}_x(\varepsilon) P^{\varepsilon}_{xz} = \widehat{q}_z(\varepsilon)$.

Es decir, $\widehat{q}(\varepsilon) P^{\varepsilon} = \widehat{q}(\varepsilon)$.

Todos los vectores propios de P^{ε} correspondientes al valor propio 1 están en la recta determinada por $\widehat{q}(\varepsilon)$. ∎

Demostración. (Teorema 8.6.8)

Para z, un estado cualquiera, denotemos como τ a uno de los $z-$árboles y como $c(\tau)$ al costo de τ, es decir $c(\tau) = \sum_{(x,x') \in \tau} r(x, x')$.

Consideramos la función $\gamma : Z \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ definida como

$$\begin{aligned} \gamma(z) &= \min_{\tau \in T_z} c(\tau) \\ \gamma^* &= \min_{z \in Z} \gamma(z). \end{aligned}$$

Para el $z-$árbol a_z, consideramos la identidad,
$\varepsilon^{-\gamma^*} \prod_{(x,x') \in a_z} P^{\varepsilon}_{xx'} = \varepsilon^{c(a_z) - \gamma^*} \prod_{(x,x') \in a_z} \varepsilon^{-r(x,x')} P^{\varepsilon}_{xx'}$ (1).

Sabemos que $\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-r(z,z')} P^{\varepsilon}_{zz'} > 0$ y $\lim_{\varepsilon \to 0} \prod_{(x,x') \in \widetilde{a}_z} \varepsilon^{-r(x,x')} P^{\varepsilon}_{xx'} > 0$.

Si z y $\widetilde{a}_z$ son tales que $\gamma(z) = \gamma^*$ y $r(\widetilde{a}_z) = \gamma^*$, entonces
$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{c(\widetilde{a}_z) - \gamma^*} \prod_{(x,x') \in \widetilde{a}_z} \varepsilon^{-r(x,x')} P^{\varepsilon}_{xx'} > 0$.

De (1), $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma^*}\prod_{(x,x')\in\widetilde{a}_z}P^{\varepsilon}_{xx'}>0$ y, también, $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in A_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}>0$.

Pero, si $\gamma(z)\neq\gamma^*$, tendríamos que $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in A_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}=0$.

Uniendo los dos casos, se tiene que se cumple

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{z\in Z}\sum_{a_z\in A_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}>0.$$

Entonces, $\lim_{\varepsilon\to 0}\dfrac{\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in QA_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}}{\sum_{z\in Z}\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in A_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}}>0$ si, y sólo si, $\gamma(z)=\gamma^*$.

Por otro lado, por el lema 8.6.9, $q^{\varepsilon}_z=\dfrac{\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in QA_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}}{\sum_{z\in Z}\varepsilon^{-\gamma^*}\sum_{a_z\in A_z}\prod_{(x,x')\in a_z}P^{\varepsilon}_{xx'}}$ y, por ello, $q^*_z=\lim_{\varepsilon\to 0}q^{\varepsilon}_z$ siempre existe, y es positivo si, y sólo si, $\gamma(z)=\gamma^*$.

Es claro que $q^*=\lim_{\varepsilon\to 0}q^{\varepsilon}$ es una distribución estacionaria de P^0. ∎

Llamaremos a q^* la distribución límite y a las coordenadas positivas de q^*, los estados de equilibrio a largo plazo. Es decir, los únicos estados a los que la distribución límite les otorga probabilidad positiva son los que pertenecen a una ccr de mínimo potencial de la digráfica asociada al proceso dinámico de aprendizaje social. Recordemos que si estas ccr constan de un solo vértice, entonces, el estado de equilibrio a largo plazo representaría a un equilibrio de Nash del juego $(N,\{D_j\},\varphi)$.

Con una interpretación más amplia de Z y una definición adecuada de las dinámicas darwinianas, estos resultados son válidos para las dinámicas con historias (ver el artículo de Young sobre la evolución de las convenciones).

8.7. Ejercicios

Ejercicio 8.1. Supongamos que hay una población K envuelta en el conflicto representado en el juego

$$\begin{pmatrix} (6,6) & (-1,5) \\ (5,-1) & (0,0) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que hay 6 personas renglón y 6 personas columna. La pareja (u,v) con u y v en $\{0,1,2,\ldots,6\}$, quiere decir que u personas renglón han

escogido su primera estrategia y $6-u$ la segunda, análogamente en cuanto a v.

Considere la dinámica de aprendizaje $d(u,v)=(u',v')$, con

$$u'=\begin{cases} 6 & \text{si } E_1\left((1,0),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right)>E_1\left((0,1),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right),\\ 0 & \text{si } E_1\left((1,0),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right)<E_1\left((0,1),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right),\\ u & \text{si } E_1\left((1,0),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right)=E_1\left((0,1),\left(\frac{v}{6},\frac{6-v}{6}\right)\right),\end{cases}$$

y

$$v'=\begin{cases} 6 & \text{si } E_2\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(1,0)\right)>E_1\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(0,1)\right),\\ 0 & \text{si } E_2\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(1,0)\right)<E_1\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(0,1)\right),\\ u & \text{si } E_2\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(1,0)\right)=E_1\left(\left(\frac{u}{6},\frac{6-u}{6}\right),(0,1)\right).\end{cases}$$

Construya la gráfica dirigida $(V,\overrightarrow{A})$, con

$$V=\{0,1,2,\ldots,6\}\times\{0,1,2,\ldots,6\}$$

y

$$\overrightarrow{A}=\{((u,v),(u',v'))\in V\times V\,|(u',v')\in d(u,v)\}\ .$$

Encuentre los subconjuntos de V que representan los patrones de conducta socialmente aprendidos en los que pueden caer la población K.

Ejercicio 8.2. Para el mismo juego del ejercicio 8.1, con la misma población, defina formalmente la dinámica de mejor respuesta con inercia débil. Construya la gráfica dirigida $(V,\overrightarrow{A})$ y estudie los patrones de conducta socialmente aprendido. ¿Difieren de los estudiados en el ejercicio 1?

Ejercicio 8.3. Proceda igual que en el ejercicio anterior

a) con la dinámica de mejor respuesta con inercia fuerte,

b) con la dinámica de reajuste de Nash.

Ejercicio 8.4. Considere que la población involucrada en el juego del ejercicio 1 es simétrica (sin partir en subpoblaciones) y consta de 12 personas.

a) Defina formalmente la dinámica de mejor respuesta, construya su gráfica y estudie los patrones de conducta socialmente aprendida.

b) Defina formalmente la dinámica de mejor respuesta, con inercia débil, construya su gráfica y estudie los patrones de conducta socialmente aprendida.

c) Defina formalmente la dinámica de mejor respuesta, con inercia fuerte, construya su gráfica y estudie los patrones de conducta socialmente aprendida.

d) Defina formalmente la dinámica de reajuste de Nash, construya su gráfica y estudie los patrones de conducta socialmente aprendida.

Compare los resultados con los que se obtienen en los casos en que la población no es homogénea (ejercicios 1, 2 y 3).

Ejercicio 8.5. Estudie los ejemplos del capítulo 1 con diversas poblaciones y dinámicas.

Ejercicio 8.6. Estudie los juegos

a) $\begin{pmatrix} (-3,-3) & (1,0) \\ (0,1) & (-4,-4) \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} (2,2) & (1,-1) \\ (-1,1) & (3,3) \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} (5,7) & (3,4) \\ (10,1) & (0,5) \end{pmatrix}$

con la digráfica de las historias de tamaño 2 y tamaño 3. ¿Cuáles son los puntos absorbentes de las digráficas? ¿Qué relación tienen con los equilibrios de Nash?

Ejercicio 8.7. Trabaje el juego b del ejercicio 8.6:

a) con la digráfica de poblaciones partidas. Elija el tamaño de K_1 y K_2 para que en las digráficas aparezca representado el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, estrictamente hablando. Estudie las digráficas con las dinámicas de pánico y con inercia fuerte. ¿Cuáles son las clases de comunicación recurrente?

b) Estudie los ejemplos 8.6 a y 8.6 b, pero con una población simétrica, sin partir. Elija el tamaño de K para que en las digráficas de poblaciones aparezca representado el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, estrictamente hablando. Estudie las digráficas con las dinámicas de pánico y con inercia fuerte. ¿Cuáles son las clases de comunicación recurrente?

Ejercicio 8.8. Demuestre que la dinámica de mejor respuesta con inercia débil es darwiniana.

Ejercicio 8.9. Demuestre que la dinámica de reajuste de Nash es darwiniana.

Ejercicio 8.10. Demuestre que la dinámica de Canning que construimos a continuación es darwiniana.

Dinámica de Canning: considérese un juego $2 \times m$, simétrico. Sea $D = \{1, ..., m\}$ y K una población con un número grande y par de miembros. En cada periodo, hay muchos encuentros (partidas) entre dos miembros distintos de K tomados al azar, de tal manera que cada miembro de K toma parte en una sola partida. En z, cada j en K recuerda la historia $h_z^j \in D^T$ de las estrategias escogidas por sus oponentes en cada uno de los T últimos periodos, de tal manera que:

1) Si $\sigma \in D$ ha sido escogida, en $T+1$, j actualizará su memoria con $b : D^T \times D \to D^T$, tal que $b(h^j, \sigma) = h'^j$, donde $h'^j_{T-i} = h'^j_{T-i+1}$, para $1 \leq i < T$ y $h'^j_{T+1} = \sigma$;

2) j desarrolla creencias sobre la conducta estratégica de la población total. Estas creencias se pueden formular con una estrategia mixta construída de acuerdo a la función $\mu : D^T \to M$.

3) j responde a su creencia con $\tau : M \to D$, tal que su pago esperado no es peor que el que tenía si usa la estrategia $\tau\left(\mu(h^j)\right)$.

T, b, μ y τ son las mismas para cada $j \in K$.

$Z = \left\{ (z_1, z_2, ..., z_m) \middle| z_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i \in D} z_i = kT \right\}$.

Para cada $z \in Z$, sea $\widehat{z} = \frac{z}{kT}$; por supuesto, $\widehat{z} \in M$.

Si $h = \{h^j\}$ es la colección de historias que recuerdan los miembros de K, en z, decimos que $d_{C(T,\, b,\, \mu,\, \tau)}$ es la dinámica de Canning para T, b, μ, τ y h si $d_{C(T,\, b,\, \mu,\, \tau)}$ es una correspondencia de Z en Z, tal que $d\,(z)$ no es vacía, para cada z, y $z' \in d\,(z)$ si, y sólo si, $z_s = \sum_{i=1}^{T} \sum_{j \in K} \delta_{is}^j$ y $z'_s = \sum_{i=2}^{T} \sum_{j \in K} \delta_{is}^j + \sum_{j \in K} \delta_s'^j$, donde

$$\delta_{is}^j = \begin{cases} 1 & \text{si } h_i'^j = s, \\ 0 & \text{de otra manera,} \end{cases}$$

y

$$\delta_s'^j = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists\, h^k \in h \text{ tal que } \tau\left(\mu\left(h^k\right)\right) = s, \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases}$$

Ejercicio 8.11. Estudie algún ejemplo simétrico de dos jugadores pensando en que una población simétrica y par aprende con una dinámica de Canning. Encuentre una gráfica dirigida que represente la dinámica de la población y encuentre los patrones de conducta socialmente aprendidos.

Ejercicio 8.12. Encuentre los equilibrios a largo plazo de los juegos anteriores, utilizando las diversas dinámicas construidas e introduciendo la hipótesis de que cada miembro de la población se desvía con probabilidad ε de lo que marca la dinámica y que la probabilidad con la que escoge su primera estrategia es positiva.

Ejercicio 8.13. Encuentre los equilibrios a largo plazo de los juegos del capítulo 1, considerando poblaciones adecuadas y definiendo las dinámicas a su juicio pertinentes e introduciendo la hipótesis de que cada miembro de la población se desvía con probabilidad ε de lo que marca la dinámica y que la probabilidad con la que escoge su primera estrategia es positiva.

Bibliografía

[1] L. Ausubel, R. Deneckere, "Reputation in Bargaining and Durable Goods Monopoly", Econometrica, 57 (1989), 511-531.

[2] R. Aumann, "Agreeing to desagree", Annals of Statistics, 4 (1976), 1236-1239.

[3] H.S. Bierman, L. Fernández, "Game Theory with Economic Applications", Addison-Wesley, 1993.

[4] K. Binmore, "Teoría de Juegos", McGraw-Hill, 1994.

[5] K. Binmore, "Game Theory and the Social Contract", in R. Selten, "Game Equilibrium Models II. Methods, Morals, and Markets", Springer-Verlag, 1991.

[6] K. Binmore , "Game Theory and the Social Contract", Volume 1 "Playing Fair", 1995 y Volume 2 "Just Playing", 1998, MIT Press.

[7] K. Binmore, L. Samuelson, "Evolutionary Stability in Repeated Games Played by Finite Automata", Journal of Economic Theory, 57 (1992), 278-305.

[8] G. W. Brown, "Iterative Solutions of Games by Fictious Play", en T. Koopmans, "Activity Analysis of Production and Allocation", Willey, 1951.

[9] D. Canning, "Average Behavior in Learning Models", Journal of Economic Theory, 57 (1992), 442-472.

[10] D. Canning, "Learning and Social Equilibrium in Large Populations", en A. Kirman, M. Salmon, "Learning and Rationality in Economics", Blackwell, 1995.

[11] R. Coase, "Durability and Monopoly", Journal of Law and Economics, 15 (1972), 143-149.

[12] A. Cournot, "Investigaciones acerca de los Principios Matemáticos de la Teoría de Las Riquezas", Alianza Editorial, 1969. La primera edición en francés es de 1838.

[13] M. D. Davis, "Introducción a la Teoría de Juegos", Alianza Editorial, 1986.

[14] M. Dresher, L. Shapley, A. Tucker, eds. "Advances in Game Theory", Study 52, Annals Of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1963.

[15] M. Dresher, A. Tucker, eds., "Contributions to the Theory of Games, III", Study 39, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1957.

[16] D. Foster , P. Young , "Stochastic Evolutionary Game Dynamics". Theoretical Population Biology, 38 (1990) 219-232.

[17] M. Freidlin, A. Wentzell, "Random Perturbations of Dynamical Systems", Springer -Verlag, New York, 1984.

[18] J. Friedman, "A noncooperative equilibrium for supergames". Review of Economic Studies, 38 (1971), 1-12.

[19] D. Fudenberg, D. Levin, J. Tirole, "Infinite Horizont Models of Bargaining with One-Sided Incomplete Information", en A. Roth, "Game Theoretic Models of Bargaining", Cambridge University Press, 1985.

[20] D. Fudenberg, J. Tirole, "Game Therory", The MIT Press, 1991.

[21] D. Gale, "The Theory of Linear Economic Models", McGraw-Hill, 1960.

[22] R. Gardner, "Juegos para Empresarios y Economistas", Antoni Bosh, 1996.

[23] R. Gibbons, "Un Primer Curso de Teoría de Juegos", Antoni Bosh, 1993.

[24] G. Hardin, "The Tragedy of the Commons", Science, Vol. 162 (1968), 1243-1248.

[25] J.C. Harsanyi "A General Solution For Finite Non-Cooperative Games, Based On Risk-Dominance", en M. Dresher, L. S. Shapley, A. W. Tucker, "Advances in Games Theory", Study 52, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1963.

[26] J. C. Harsanyi , R. Selten, "A General Theory of Equilibrium Selection in Games", MIT Press, 1988.

[27] S. Hernández, "Modelos Matemáticos sobre el Origen de la Ganancia del Capital", Miscelánea Matemática (por aparecer).

[28] M. Kandori, G. Mailath, R. Rob, "Learning, Mutation and Long Run Equilibria in Games", Econometrica, 61 (1993), 29-56.

[29] M. Kandori, R. Rob, "Evolution of Equilibria in the Long Run: A General Theory and Applications", Journal of Economic Theory, 65 (1995), 383-414.

[30] H.W. Kuhn, "Extensive Games and the problem of Information", en H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds., "Contributions to the Theory of Games, II", Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton University Press, 1953.

[31] H.W. Kuhn, A.W. Tucker, eds., "Contributions to the Theory of Games, I-II", Annals of Mathematics Studies Nos 24, 28, Princeton University Press, 1950, 1953.

[32] J.E. Littlewood, "Mathematical Miscellany", B. Bollobas, 1953.

[33] R. D. Luce, H. Raiffa, "Games and Decisions", John Wiley & Sons, 1957.

[34] R. D. Luce, A.W. Tucker, eds., "Contributions to the Theory of Games, IV", Study 40, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1959.

[35] J. Maynard Smith, "Evolution and the Theory of Games", Cambridge University Press, 1982.

[36] J.C.C. McKinsey, "Introducción a la Teoría Matemática de los Juegos", Aguilar, 1966.

[37] D. Monderer, L. Shapley, "Ficticious Play Property for Games with Identical Interests", Journal of Economic Theory, 68 (1996), 258-265.

[38] J. Nash, "Equilibrium Points in n-Person Games", Proc.Nat.Acad. Sci. U.S.A, 36 (1950), 48-49.

[39] J. Nash, "The Bargaining Problem", Econometrica, 18 (1950), 155-162.

[40] J. Nash, "Non-Cooperative Games", Annals of Mathematics, 54 (1951), 286-295.

[41] A. Okada, K. Sakakibara, "The Emergence of the State: A Game Theoretic Approach to Theory of Social Contract". The Economic Studies Quarterly, 42(4) (1991), 315-333.

[42] M. J. Osborne, A. Rubinstein, "Bargaining and Markets", Academic Press, 1990.

[43] G. Owen, "Game Theory", Saunders Company, 1968.

[44] E. Rasmusen, "Juegos e información. Una introducción a la teoría de juegos", Fondo de Cultura Económica, 1996.

[45] J. Robinson, "An Iterative Method of Solving a Game", Annals of Mathematics, 54 (1951), 296-301.

[46] H.E. Scarf, "The Computation of Equilibrium Prices", en H. Scarf, J. Shoven editors, "Applied General Equilibrium Analysis", Cambridge University Press, (1984), 207-230.

[47] T. C. Schelling, "The Strategy of Conflict", Harvard University Press, 1960. (Existe traducción al español en Editorial Fondo de Cultura Económica.)

[48] T. C. Schelling, "Micromotivos y Macroconducta", Fondo de Cultura Económica, 1989.

[49] J. Sobel, I. Takahashi, "A Multi-Stage Model of Bargaining", Review of Economic Studies, 50 (1983), 411-426.

[50] N. Stokey, "Rational Expectations and Durable Goods Pricing". Bell Journal of Economics 12 (1981), 112-128.

[51] J. Tirole, "The Theory of Industrial Organization", MIT Press, (1988). (Existe traducción al español en Editorial Ariel.)

[52] F. Vega Redondo, "Competition and Culture in an Evolutionary Process of Equilibrium Selection: A Simple Example", Games and Economic Behavior, 5 (1993), 618-631.

[53] F. Vega-Redondo, "Economía y Juegos", Antoni Bosh, 2000.

[54] E. S. Ventsel, "Introducción a la Teoría de Juegos", Limusa, 1963.

[55] J. von Neumann, O. Morgenstern, "Theory of Games and Economic Behavior", Princeton University Press, 1944.

[56] P. Young, "The Evolution of Conventions", Econometrica, 61 (1993), 57-84.

[57] P. Young, "Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions", Princeton University Press, 1998.

[58] P. Zapata, "¿Convenir para Jugar o Jugar para Convenir?", Miscelánea Matemática, 36 (2002), 29-48.

[59] P. Zapata, "La Conjetura de Coase sobre Monopolios en Bienes Durables", Aportaciones Matemáticas, 29 (2001), 243-267.

[60] E. Zermelo, "Über eine Awendung der Menhenlehre auf die Theorie des Schachspiels", Proceedings of the Fith International Congress of Mathematicians, 2 (1913), 501-504. Volume II. E. W. Hobson, A.E.H. Love. ed. Cambridge University Press.

Índice alfabético

z-árbol, 379
¿Dónde quedó la cabrita?, 97

Algoritmo de Juego Ficticio, 201
Algoritmo de Zermelo, 109
alternativa, 64
amenaza increíble, 46
Amenazas creíbles e increíbles, 57
asegurable en estrategias mixtas, 247
asegurable en estrategias puras, 19

Cálculo de Estrategias Conservadoras con Programación Lineal, 269
clases de comunicación recurrente, 87
composición de estrategia, 105
Conjetura de Coase, 317
Conjunto de Estrategias Puras, 6
Conjunto de jugadores, 6
conjunto de jugadores, 66
conjunto de vértices del jugador j, 66
conjuntos de información, 67
Conocimiento Común, 166
Conocimiento Privado, 159
convexa, 224
Coronel Blotto, 33
correspondencia, 224
correspondencia de mejor respuesta del juego, 212
correspondencia de mejor respuesta del jugador, 207
mathbf 2×2, 207
curva de reacción, 212

Decisiones simultáneas e información no perfecta, 51
Demandas triviales, 57
descomposición de una estrategia, 105
digráfica, 82
digráfica de mejor respuesta, 87
Digráficas de aprendizaje, 372
Digráficas Perturbadas, 378
Dilemas del Prisionero n-Personales, 14
Dinámica con inercia débil, 375
dinámica darwiniana de aprendizaje, 374
Dinámica de Aprendizaje en Poblaciones, 358
Dinámica de Canning, 399
Dinámica de historiasde Young, 366
Dinámica de Mejor Réplica o de Pánico, 375
Dinámica de Reajuste de Nash, 376
Dinámicas de Aprendizaje en Poblaciones Simétricas, 363
distribución límite, 396
Dominación por Riesgo, 353
Dominancia Simple y Dominancia Estricta, 348

El baile de Shapley, 13
El Duelo, 49
El duopolio de Bertrand, 41
El Duopolio de Cournot, 35
El juego de Gale, 96
El juego de la Cargada, 17
El juego de los cerillos, 74
El juego del Contento, 56
El juego del Nim, 96
El juego del parasitismo social, 15
El ligue de Nash, 13
El Operador de Conocimiento, 160
El Póker Simplificado, 54
El Surgimiento de una Organización Social, 296
equilibrio bayesiano, 182
Equilibrio Bayesiano de Nash, 176
equilibrio de Nash de un juego repetido, 314
equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento, 288
equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento perfecto en subjuegos, 290
equilibrio de Nash en estrategias mixtas, 217
Equilibrio de Nash en Estrategias Puras, 7
equilibrio de Nash en estrategias puras, 118
equilibrio de Nash es benificioso, 346
equilibrio perfecto en subjuegos, 127
Equilibrios intercambiables, 343
Errar es de Humanos, 370
estado absorbente, 88
estados de equilibrio a largo plazo, 396
estrategia conservadora, 21
estrategia de comportamiento, 285
estrategia en un juego extensivo, 103
estrategia mixta, 195
estrategia no dominada, 8
estrategias mixtas conservadoras, 250
estructura estratégica, 373

factible, 315
factor de descuento o probabilidad de continuación, 313
Fichas de dominó en un tablero, 98
forma normal, 117
forma normal de un juego extensivo, 118
función de pago esperado, 197
función de utilidad, 154, 155
función de utilidad de von Neumann y Morgenstern, 157

G. Hardin, 14
Generalización del algoritmo de Zermelo, 129
gráfica, 62
gráfica conexa, 62
gráfica conexa sin ciclos, 63

Harsanyi, 168
hipótesis del mundo pequeñ
historia de repetición del juego, 312

Inducción hacia atrás, 109
Inducción hacia atrás en el caso infinito, 131
Inducción hacia atrás en estrategias mixtas, 328
Inducción hacia atrás para estrategias de comportamiento, 292
información perfecta, 67

interpretación geométrica de D. Gale de la desmotración del Teorema de von Neumann, 258

Juego antagónico en estrategias mixtas, 255
juego antagónico en estrategias puras, 23
juego bipersonal de suma cero, 10
juego de continuación, 169
Juego de Posiciones, 74, 76
juego estado, 313
juego extensivo, 66
juego repetido, 313
Juegos Bipersonales de Suma Cero, 8
juegos bipersonales de suma cero, 256
Juegos de Concurreccia o de Ventanillas, 17
Juegos de información perfecta y sin azar, 46
juegos de información completa, 173
juegos de información incompleta, 151
Juegos de Información no Perfecta, 50
Juegos de información perfecta y con azar, 48
Juegos de Mayoría, 16
Juegos de Posiciones, 75
Juegos de señalización, 179
Juegos extensivos bayesianos, 179
Juegos extensivos infinitos, 57
Juegos extensivos infinitos, con información no perfecta, 59
Juegos infinitos de información perfecta, 57
Juegos rectangulares bayesianos, 174
Juegos Simétricos $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, 11

Kuhn, 66

La Cadena de Supermercador de Selten, 46
La Selección propuesta por Harsanyi, 345
Lema de Sperner, 232
Los juegos de información incompleta o bayesianos, 169
lotería, 156

máximo asegurable para j en estrategias mixtas, 250
máximo asegurable para el jugador j, 21
método algebraico para encontrar estrategias conservadoras en juegos 2×2, 263
método geométrico para calcular estrategias conservadoras en juegos $2 \times m$ y $m \times 2$, 266
mejor respuesta del jugador, 7
mejor respuesta estricta, 200
mejor respuesta mixta, 205
mejor respuesta pura, 199
memoria perfecta, 289
Monopolio en el Mercado de un bien durable, 317

núcleo de una digráfica, 84

operador de conocimiento común, 166
operador de creencias, 160
operador de creencias comunes, 167

partida, 64
patrones de conducta aprendidos, 88

potencial estocástico de un vértice, 379
propiedad de juego ficticio, 205
punto silla, 10
punto silla de la función de pago esperado, 256
punto silla del juego, 28

relación de preferencia, 154
repetición del dilema del prisionero, 309
Riesgo Moral, 48
Robert Aumann, 166
Rubinstein, 145

Selección de Equilibrios Propuesta por Nash, 343
solución de Nash, 343
subjuego, 68
superiormente semicontinua, 224

t-Solución, 345
Teorema de Friedman, 315
Teorema de Punto Fijo de Brouwer, 226
Teorema del Folklore, 315
Teorema von Neumann, 257
trayectoria, 62
triangulación, 230

Un Algoritmo de Scarf para Calcular Puntos Fijos, 227
Un juego de negociación, 58
Un juego rectangular, 6
Un principio de equilibrio, 139

v-Solución, 345
vértice final, 64
vector, 315
Von Neumann y Morgenstern, 155